

Ю. Н. Хижняков, кандидат технических наук, доцент
Пермский государственный технический университет

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Рассмотрен модифицированный метод гармонической линеаризации расчета параметров автоколебаний релейной системы с многоуровневым релейным элементом, позволяющий определить девиацию, амплитуду и частоту автоколебаний при переходе от одного уровня к другому регулируемого неполного притока.

Ключевые слова: многопозиционный релейный элемент, регулируемый неполный приток, коэффициенты гармонической линеаризации, амплитуда, частота, смещение автоколебаний

Известный в литературе метод гармонической линеаризации (МГЛ) [1] позволяет линеаризовать нелинейную систему на уровне первой гармоники. Важным свойством МГЛ является то, что он исключает решение исходных нелинейных дифференциальных уравнений для определения процессов во времени. С его помощью составляются алгебраические уравнения, связывающие непосредственно параметры регулируемого объекта и релейного элемента (РЭ) с показателями качества квазиустановившегося режима – амплитудой и частотой автоколебаний, а также с величинами F^0 и x^0 , медленно меняющимися составляющими, соответственно, на входе и выходе объекта. Поэтому МГЛ приспособлен для решения задач на этапе проектирования при создании систем управления с нелинейностями. Однако амплитуда и частота автоколебаний, так же, как и сам факт возникновения автоколебаний, зависит от параметров системы регулирования, которые не всегда могут быть приемлемыми. А. А. Кампенемм в своих работах [2, 3] предложил ввести неполный приток в систему с одноуровневым релейным элементом с целью снижения энергии на управление. В дальнейшем замена одноуровневого релейного элемента на многоуровневый релейный элемент (МРЭ) позволила реализовать регулируемый неполный приток (РНП) [4].

Рассмотрим расчет параметров автоколебаний системы с МРЭ.

На рис. 1 приведена релейная система с МРЭ, которая является системой первого класса, так как имеет на входе сложное нелинейное звено, состоящее из параллельно простых асимметричных РЭ одного типа, одну переменную.

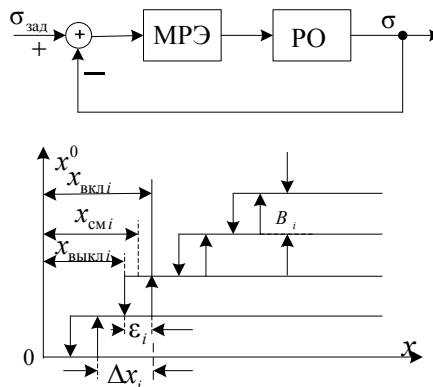


Рис. 1. Релейная САР с МРЭ

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i &= i\Delta C(1-m_i); \\ m_i &= \frac{i\Delta C - \varepsilon_i}{i\Delta C}; \\ X_{\text{см}i} &= 0,5i(1+m_i)\Delta C; \\ X_{\text{вкл}i} &= i\Delta C; \\ X_{\text{выкл}i} &= im_i\Delta C. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Математическое описание статической характеристики МРЭ (1) характеризуется: уровнем B , шириной петли гистерезиса ε , смещением вправо от начала координат $x_{\text{см}}$, параметром m , который связан с шириной петли гистерезиса, порогом включения $x_{\text{вкл}}$ и порогом выключения $x_{\text{выкл}}$ и текущим значением выходного сигнала МРЭ $Y = \sum_{i=1}^l B_i$, где l – число возбужденных уровней среди n уровней МРЭ.

Запишем для i -уровня МРЭ коэффициент гармонической линеаризации q [5]:

$$q_i = \frac{B_i}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \frac{(c_i - x_i^0)^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{(m_i c_i - x_i^0)^2}{A^2}} \right]. \quad (2)$$

Возведем в квадрат обе части уравнения (2) и с учетом (1) получим:

$$\begin{aligned} \frac{q_i^2 \pi^2 A^2}{B_i^2} &= 1 - \frac{(x_{\text{вкл}i} - x_i^0)^2}{A^2} + \\ &+ 1 - \frac{(m_i x_{\text{вкл}i} - x_i^0)^2}{A^2} + 2 \left[\left(1 - \frac{(x_{\text{вкл}i} - x_i^0)^2}{A^2} \right) \left(1 - \frac{(m_i x_{\text{вкл}i} - x_i^0)^2}{A^2} \right) \right]^{0,5}. \end{aligned}$$

После преобразований получим квадратное уравнение

$$a_{1i} (x_i^0)^2 + a_{2i} x_i^0 + a_{3i} = 0, \quad (3)$$

где $a_{1i} = 4B_i^2 \left[B_i^2 x_{\text{вкл}i}^2 (1-m_i)^2 + \pi^2 q_i^2 A^4 \right];$

$$a_{2i} = -4B_i^2 x_{\text{вкл}i} \left[B_i^2 x_{\text{вкл}i}^2 (1-m_i)(1-m_i^2) + \pi^2 q_i^2 A^4 (1+m_i) \right];$$

$$a_{3i} = B_i^4 x_{\text{вкл}i}^4 (1-m_i^2)^2 + \pi^2 q_i^2 A^4 \left[\pi^2 q_i^2 A^4 + 2B_i^2 x_{\text{вкл}i}^2 (1+m_i) - 4B_i^2 A^2 \right].$$

Задаваясь значениями x_i^0 от $x_{\text{см}i}$ в сторону увеличения, рассчитываем правую половину зависимости (лепестка), а в сторону уменьшения – левую половину лепестка от i -уровня МРЭ.

Определяем амплитуду автоколебаний

$$A = x_{2i}^0 - x_{1i}^0. \quad (4)$$

Учитывая, что МРЭ состоит из n РЭ с разным смещением статических характеристик, каждый РЭ будет характеризоваться своей парой коэффициентов гармонической линеаризации и значением F^0 . В зависимости от изменения $\Delta x = x_{\text{зад}} - x$ срабатывают по нарастающей или убывающей уровни МРЭ, определяя как постоянную, так и переменную составляющую его выхода. При условии $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_i = \dots = \varepsilon_n = \varepsilon$ искомые периодические решения в системе будут равны друг другу, а также и их смещения на входе и выходе объекта:

$$\begin{aligned} F_1^0 = F_2^0 = \dots = F_i^0 = \dots = F^0; \\ x_1^0 = x_2^0 = \dots = x_i^0 = \dots = x^0. \end{aligned} \quad (5)$$

Результирующий сигнал на выходе регулируемого объекта (РО)

$$x = \sum_{i=1}^l x_i^0 + x_{l+1}^0 + x^*. \quad (6)$$

Тогда согласно (5) и (6) получим:

$$x = l x^0 + x_{l+1}^0 + x^*,$$

где $l = 1, n$.

Приложение П

Рассчитать параметры автоколебаний для системы первого класса с применением МРЭ, содержащего четыре уровня.

Рассмотрим одноконтурную релейную систему, содержащую объект без самовыравнивания не ниже третьего порядка с передаточной функцией

$$W(p)_{\text{об}} = \frac{k}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}, \quad (\text{П.1})$$

где $k = 50$; $T_1 = 0,22 \text{ с}$; $T_2 = 1 \text{ с}$.

С учетом

$$\begin{aligned} B_1 = B_2 = \dots = B_i = 1A; \\ \varepsilon_i = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_i = 1,5B; \\ \Delta C_1 = \Delta C_2 = \dots = \Delta C_i = 3B \end{aligned}$$

рассчитаем параметры МРЭ и запишем в табл. 1.

Таблица 1. Параметры МРЭ

Номер уровня	Параметр уровня	Включение уровня	Смещение уровня	Отключение уровня
1	0,500	3	2,25	1,5
2	0,750	6	5,25	4,5
3	0,830	9	8,25	7,5
4	0,875	12	11,25	10,5

Запишем нормированный комплексный коэффициент передачи i -уровня МРЭ с петель гистерезиса

$$W(A)_i = q_i + jq'_i, \quad (\text{П.2})$$

где q_i определяется согласно (2).

Запишем выражение q'_i из [5]:

$$q'_i = -\frac{Bc}{\pi A^2} (1-m). \quad (\text{П.3})$$

Из условия нахождения линеаризованной САР на границе устойчивости запишем:

$$W(p)_{\text{об}} W_n(A)_i = -1. \quad (\text{П.4})$$

После подстановки в (П.4) выражений (П.1) и (П.2) получим

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + k \left(q_i + \frac{q'_i}{\omega} p \right) = 0. \quad (\text{П.5})$$

Заменим в (П.5) оператор $p \rightarrow j\omega$ и выделим действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} -(T_1 + T_2) \omega^2 + k q_i &= 0; \\ -T_1 T_2 \omega^3 + \omega + k q'_i &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Подставив (2) во второе уравнение (П.6), запишем выражение для амплитуды автоколебаний A :

$$A = \left[\frac{k B_i \Delta C i (1 - m_i)}{\pi \omega (1 - T_1 T_2 \omega^2)} \right]^{0,5}. \quad (\text{П.7})$$

Исследуем (П.7) на экстремум по частоте ω :

$$\frac{dA}{d\omega} = \frac{k B_i \Delta C i (m_i - 1) (1 - 3 T_1 T_2 \omega^2)}{2 \omega (1 - T_1 T_2 \omega^2) \left[k B_i \Delta C i (1 - m_i) \pi \omega (1 - T_1 T_2 \omega^2) \right]^{0,5}} = 0,$$

откуда

$$1 - 3 T_1 T_2 \omega^2 = 0;$$

$$\omega_{\text{авт}} = \sqrt{\frac{1}{3T_1T_2}} = 1,23 \text{ с}^{-1}. \quad (\text{П.8})$$

Определим q_i , подставив (П.8) в первое уравнение (П.6):

$$q_i = \frac{(T_1 + T_2)}{3T_1T_2k} = 0,037 \text{ с}^{-1}.$$

Для ($i=1$) – уровня МРЭ, задавшись численными значениями $m=0,5$; $B=1A$; $\Delta C=3B$; $q_i=0,037 \text{ с}^{-1}$, согласно (3), изменяя переменную A от 0 до 17,17, получим численные значения функции $A=f(x_1^0, x_2^0)$, показанной в виде шаблона на рис. 3.

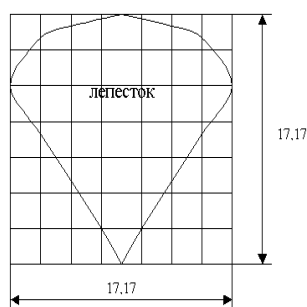


Рис. 2. Шаблон графической зависимости $A=f(x_1^0, x_2^0)$

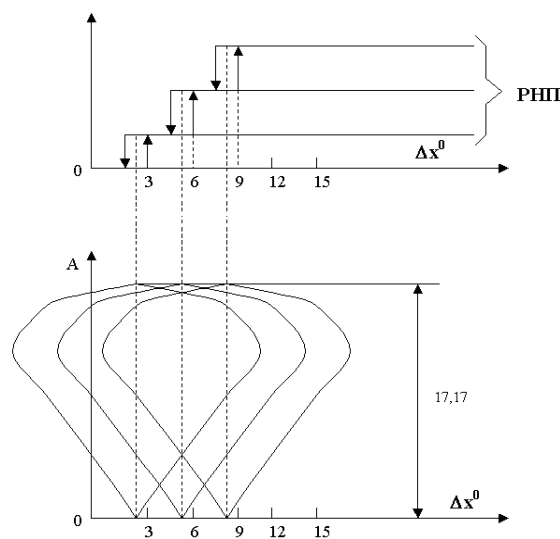


Рис. 3. К расчету амплитуды автоколебаний в релейной САР первого класса с МРЭ ($m_i=0,5$)

Строя с помощью шаблонов зависимости $A_i=f(x_{1i}^0, x_{2i}^0)$ для каждого уровня МРЭ, определяем огибающую этих графиков или девиацию амплитуды автоколебаний в САР с МРЭ по мере изменения Δx . Автоколебания релейной системы носят непрерывный и устойчивый характер. Амплитуду автоколебаний можно уменьшить за счет уменьшения петли гистерезиса i -уровня МРЭ ε_i или за счет уменьшения уровня переключения B_i , или за счет изменения коэффициента передачи РО. Частота автоколебаний при $\varepsilon=0$ зависит только от постоянных времени регулируемого объекта. При $\varepsilon \neq 0$ частота автоколебаний зависит как от постоянной времени РО, так и от ширины петли гистерезиса ε_i .

Сравнительный анализ численных значений частоты, максимальной амплитуды и девиации автоколебаний, полученный в расчетах для МРЭ с $m = 1$ и $m = 0,5$ приведен в табл. 2.

Таблица 2. Данные расчета

m	$\omega_{\text{авт}}$	$A_{\text{авт}}$	Девиация
1,0	2,13	5,74	5 %
0,5	1,23	17,17	1 %

Чем меньше параметр m , тем меньше частота и девиация амплитуды автоколебаний и больше амплитуда автоколебаний в релейной САР с МРЭ.

Рассмотренный модифицированный МГЛ расчета амплитуды и частоты автоколебаний релейной системы с МРЭ позволяет рассмотреть процесс зарождения автоколебаний (девиацию), а также амплитуду и частоту автоколебаний при переходе от одного уровня к другому уровню РНП и пригоден для РО третьего и выше порядков.

Заключение

1. Рассмотренный модифицированный метод гармонической линеаризации расчета амплитуды и частоты автоколебаний релейной системы с многоуровневым релейным элементом позволяет рассмотреть процесс зарождения автоколебаний (девиацию) при переходе от одного уровня к другому уровню регулируемого неполного притока.

2. Представлены рабочие соотношения для определения амплитуды и частоты автоколебаний в системе автоматического регулирования с многоуровневым релейным элементом и регулируемым неполным притоком.

3. Предложен алгоритм расчета параметров автоколебаний в релейной САР с многоуровневым релейным элементом.

Список литературы

1. Цыпкин Я. З. Релейные автоматические системы. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 576 с.
2. Кампе-Немм А. А. Динамика двухпозиционного регулирования. – М. : Госэнергоиздат, 1955. – 235 с.
3. Кампе-Немм А. А. Автоматическое двухпозиционное регулирование. – М. : Наука, 1967. – 160 с.
4. Хижняков Ю. Н. Теория многопозиционного релейного регулирования и ее приложение / Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 1999. – 99 с.
5. Бесекецкий В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического управления : учеб. для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – СПб. : Профессия, 2003. – 750 с.

* * *

Yu. N. Khizhnyakov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Perm State Technical University

A Modified Method of Harmonic Linearization

A modified method of harmonic linearization of self-oscillation relay system calculation with a multilevel switching element is considered. The method allows finding deviation, amplitude and frequency of self-oscillation at transition of the controlled flow from one level to another.

Keywords: multilevel switching element, harmonic linearization coefficients, amplitude, frequency, self-oscillation shift

Получено 27.04.10