Библиографические ссылки

1. Вибрации в технике : справочник : в 6 т. / ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). Т. 1. Колебания линейных систем / под ред. В. В. Болотина. – М. : Машиностроение, 1978. – 352 с.
2. Вибрации в технике : справочник : в 6 т. / ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). Т. 3. Колебания машин, конструкций и их элементов / под ред. Ф. М. Диментберга и К. С. Колесникова. – М. : Машиностроение, 1980. – 544 с.
3. Вибрации в технике : справочник : в 6 т. / ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). Т. 6. Защита от вибрации и ударов / под ред. К. В. Фролова. – М. : Машиностроение, 1981. – 456 с.
4. *Хаар Д.* Основы гамильтовой механики / Дтер Хаар. – М. : Наука, 1974. – 225 с.
5. *Галиуллин А. С.* Аналитическая динамика : учеб. пособие. – М. : Высш. шк., 1989. – 264 с.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики – М. : 1977 – 736 с.
7. *Свешников А. Г.* Лекции по математической физике / А. Г. Свешников [и др.]. – М. : Наука, 2004. – 416 с.

***

V. E. Lyalin, Doctor of Technical Sciences, Professor, Izhevsk State Technical University

V. P. Taranukha, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Izhevsk State Technical University

Mathematical Modelling of Radial Fluctuations of Disks in Storage Devices

The mathematical model of radial fluctuations of information storage disks is considered. The analytical method of the task solution is offered. Full and resultant expressions of radial fluctuations of disks for any law of change of the basic shaft angular speed of the data storage devices are received.

Keywords: data storage devices, disk fluctuation

Получено: 02.11.11

УДК 519.615.5

Е. И. Попова, аспирант
Ижевский государственный технический университет

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ГИБРИДНЫМИ ГЕНЕТИЧЕСКИМИ АЛГОРИТМАМИ

Рассмотрен метод решения систем нелинейных уравнений на основе гибридного генетического алгоритма с применением дополнительных градиентных методов. Проведено сравнительное численное исследование скорости сходимости для различных вариантов дополнительных методов. Показана высокая эффективность метода на тестовых системах большой размерности.

Ключевые слова: генетический алгоритм, система нелинейных алгебраических уравнений, градиентный метод

С системами нелинейных уравнений при решении физических задач приходится встречаться не менее часто, чем с одним нелинейным алгебраическим уравнением. Подобные системы уравнений могут возникать, например, при численном моделировании нелинейных физических систем на этапе поиска их стационарных состояний. В ряде случаев системы получаются опосредованно, в процессе решения некоторой другой вычислительной задачи.

Пусть требуется решить систему нелинейных алгебраических уравнений

$$f_i(\mathbf{X}) = 0,\ i = \overline{1,n}, \quad \mathbf{X} \in R^n, \tag{1}$$

где $f_1, f_2, ..., f_n$ – заданные нелинейные функции n вещественных переменных $\mathbf{X} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)^T$.

Для решения нелинейных систем широко применяется итерационный метод Ньютона в различных модификациях.

Пусть $\mathbf{A}^k$ – некоторая последовательность невырожденных вещественных $n{\times}n$-матриц. Тогда последовательность задач

$$\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{A}^k \mathbf{f}(\mathbf{X}), \quad k = 0,1,2,... \tag{2}$$

имеет те же решения, что и исходное уравнение (1), и для приближенного нахождения этих решений можно записать итерационный процесс

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k - \mathbf{A}^k \mathbf{f}(\mathbf{X}^k), \quad k = 0,1,2,... \tag{3}$$

Положим $\mathbf{A}^k = \left[\mathbf{f}'(\mathbf{X}^k)\right]^{-1}$, где $\mathbf{f}\neq(\mathbf{X})$ – матрица Якоби вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{X})$. Подставив $\mathbf{A}^k$ в (3), получаем явную формулу метода Ньютона:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k - \left[\mathbf{f}'(\mathbf{X}^k)\right]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{X}^k). \tag{4}$$

При достаточной гладкости $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ и достаточно хорошем начальном приближении $\mathbf{X}^0$ сходимость порождаемой методом Ньютона последовательности ($\mathbf{X}^k$) к решению $\mathbf{X}^*$ будет квадратичной. При этом возникает необходимость решения n-мерных линейных задач на каждой итерации (обращения матриц), вычислительные затраты на которые растут с ростом n. Поэтому при больших размерностях системы эта задача становится очень трудоемкой.

Если матрицу Якоби вычислить и обратить лишь один раз – в начальной точке $\mathbf{X}^0$, то от метода Ньютона (4) можно перейти к модифицированному методу Ньютона

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k - \left[\mathbf{f}'(\mathbf{X}^0)\right]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{X}^k). \tag{5}$$

Этот метод требует значительно меньших вычислительных затрат на один итерационный шаг, но итераций при этом может потребоваться значительно больше для достижения заданной точности по сравнению с основным методом Ньютона.

Применяются также другие модификации метода Ньютона – квазиньютоновские методы, итерационно вычисляющие матрицу $\mathbf{B}^k = \left(\mathbf{A}^k\right)^{-1}$, например метод Мак-Кормика:

$$\mathbf{B}^{k+1} = \mathbf{B}^k + \frac{\left(\Delta\mathbf{X}^k - \mathbf{B}^k \Delta\mathbf{f}^k\right)\Delta\mathbf{X}^{Tk}}{\left(\Delta\mathbf{f}^k, \Delta\mathbf{X}^k\right)}. \tag{6}$$

Метод, в котором задача обращения матриц Якоби на каждом k-м шаге решается не точно, а приближенно, называется аппроксимационным аналогом метода Ньютона [1]:

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k - \mathbf{A}^k \mathbf{f}(\mathbf{X}^k), \\ \mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k \left[2\mathbf{E} - \mathbf{f}'(\mathbf{X}^{k+1}) \mathbf{A}^k \right]. \end{cases} \tag{7}$$

Задачу (1) для нахождения решений данной нелинейной системы можно переформулировать как оптимизационную или экстремальную задачу. Из функций f_i системы (1) образуют новую функцию

$$F(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(\mathbf{X}) \to \min, \ \mathbf{X} \in R^n \ . \tag{8}$$

Один из методов решения задачи (8) – метод Девидона – Флетчера – Пауэлла. Этот метод относится к классу градиентных методов оптимизации, к квазиньютоновским методам. В основе квазиньютоновских методов лежит идея восстановления матрицы вторых производных функции по ее градиентам.

Ниже приведена схема метода Девидона – Флетчера – Пауэлла:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \lambda_k \mathbf{s}^k, \quad \mathbf{s}^k = -\mathbf{D}^k \nabla F^k; \tag{9}$$

$$\lambda_k = \arg\min_{\lambda \ge 0} F(\mathbf{X}^k + \lambda_k \mathbf{s}^k); \tag{10}$$

$$\Delta \mathbf{g}^k = \nabla F(\mathbf{X}^{k+1}) - \nabla F(\mathbf{X}^k); \tag{11}$$

$$\mathbf{D}^{k+1} = \mathbf{D}^k + \frac{\Delta \mathbf{X}^k (\Delta \mathbf{X}^k)^T}{(\Delta \mathbf{X}^k)^T \Delta \mathbf{g}^k} - \frac{(\mathbf{D}^k \Delta \mathbf{g}^k)(\mathbf{D}^k \Delta \mathbf{g}^k)^T}{(\mathbf{D}^k \Delta \mathbf{g}^k)^T \Delta \mathbf{g}^k}. \tag{12}$$

В качестве начального приближения $\mathbf{D}^0 = \mathbf{E}$ берется единичная матрица. Первая итерация фактически осуществляется методом наискорейшего спуска.

В процессе вычислений матрица $\mathbf{D}$ может вырождаться, это связано с малыми значениями знаменателя в формуле (12). В случае вырождения матрица $\mathbf{D}$ снова полагается единичной.

Также для решения задачи (8) можно рассмотреть алгоритм Левенберга – Марквардта, который хорошо минимизирует функции вида

$$F(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(\mathbf{X}) \, .$$

Алгоритм удачно сочетает в себе метод наискорейшего спуска (минимизации вдоль градиента) и метод Ньютона (использование квадратичной модели для ускорения поиска минимума функции). От метода наискорейшего спуска алгоритм позаимствовал стабильность работы, от метода Ньютона – ускоренную сходимость в окрестностях минимума.

Правило вычисления параметра для метода Левенберга – Марквардта:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k - \left(\mathbf{H} + \lambda \mathbf{E} \right)^{-1} \nabla F\left(\mathbf{X}^k \right), \tag{13}$$

где $\mathbf{H}$ – матрица Гессе, вычисленная в точке $\mathbf{X}^k$.

Данное правило используется следующим образом: если на очередной итерации невязка сокращается, это значит, что предположение о квадратичности $F(\mathbf{X})$ работает; чтобы понизить влияние градиентного спуска, уменьшают λ (обычно в 10 раз). С другой стороны, если невязка увеличивается, необходимо следовать направлению градиента, λ увеличивают (во столько же раз).

Таким образом, алгоритм Левенберга представляется в виде следующей последовательности действий:

1. Вычислить параметр на очередной итерации по правилу (13).
2. Оценить невязку в новом векторе параметров.
3. Если в результате вычисления параметра невязка увеличилась, вернуться на шаг назад (т. е. восстановить прежние значения весов) и увеличить λ в 10 раз. Затем повторить выполнение начиная с шага 1.
4. Если в результате вычисления параметра невязка уменьшилась, принять текущий шаг (т. е. оставить новые значения весов) и уменьшить λ в 10 раз.

Недостатком данного алгоритма является то, что, если значение λ велико, вычисленная матрица Гессе никак не используется. Однако можно извлечь некоторую выгоду из второй производной даже в этом случае, масштабируя каждый компонент градиента согласно кривизне. Это должно привести к увеличению шага вдоль направлений, где градиент мал, так что классическая проблема впадины больше не возникнет. Этот ключевой момент был замечен Марквардтом. Он заменил единичную матрицу в формуле (13) на диагональ гессиана, получив таким образом следующее правило:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^{k} - \left(\mathbf{H} + \lambda diag\left[\mathbf{H}\right]\right)^{-1} \nabla F\left(\mathbf{X}^{k}\right). \qquad (14)$$

Поскольку гессиан пропорционален кривизне F, правило (14) приведет к большим шагам при малой кривизне и к малым шагам при большой кривизне.

Недостаток данного метода заключается в необходимости обращения матрицы на каждом шаге, что требует значительных временных затрат.

Основными проблемами при решении задачи (1) рассмотренными методами являются выбор начального приближения и достижение глобального экстремума. Значительный прогресс решения таких задач связан с применением генетических алгоритмов [2].

В работе [3] было показано, что эффективность генетических алгоритмов можно существенно повысить за счет применения дополнительного улучшения самой лучшей в популяции особи с помощью какого-либо градиентного метода. Лучшие характеристики имел гибридный алгоритм с применением метода Девидона – Флетчера – Пауэлла (RGAVM). Гибридный алгоритм основан на параллельной работе генетических операторов и градиентного метода. В популяции, созданной генетическим алгоритмом, выбирается лучшая особь – лидер. Этот лидер обучается отдельно по градиентному методу. Если его качественный показатель при этом лучше, чем у всех остальных особей в популяции, то он вводится в популяцию и участвует в воспроизводстве потомков. Если же появляется особь в популяции, полученная в результате эволюции, с лучшим показателем, то лидером становится она.

В данной работе реализованы гибридные генетические алгоритмы, основанные на параллельной работе генетического алгоритма и одного из предложенных выше методов (метод Ньютона и его модификации, метод Левенберга – Марквардта).

В качестве тестовой системы нелинейных алгебраических уравнений рассматривалась система уравнений, составленная как комбинация функции Розенброка, построенной по трем точкам:

$$\begin{cases} 100\cdot(x_{i+1}-x_i^2)^2+(1-x_i)^2+100\cdot(x_{i+2}-x_{i+1}^2)^2+(1-x_{i+1})^2=0, \quad i=\overline{1,(n-2)}, \\ 100\cdot(x_n-x_{n-1}^2)^2+(1-x_{n-1})^2+100\cdot(x_{n-2}-x_n^2)^2+(1-x_n)^2=0, \\ 100\cdot(x_{n-2}-x_n^2)^2+(1-x_n)^2+100\cdot(x_{n-1}-x_{n-2}^2)^2+(1-x_{n-2})^2=0. \end{cases} \tag{15}$$

Оптимальное решение $x_i^{opt}=1, i=\overline{1,n}, \quad F(\mathbf{X}^{opt})=0.$

Решение системы (15) при n > 10 не может быть найдено методом Ньютона и его модификациями. На рис. 1 показан процесс достижения глобального минимума функции F(**X**), эквивалентной системе (15), при n = 100 генетическим алгоритмом. Приведены результаты расчетов при нескольких последовательных запусках.

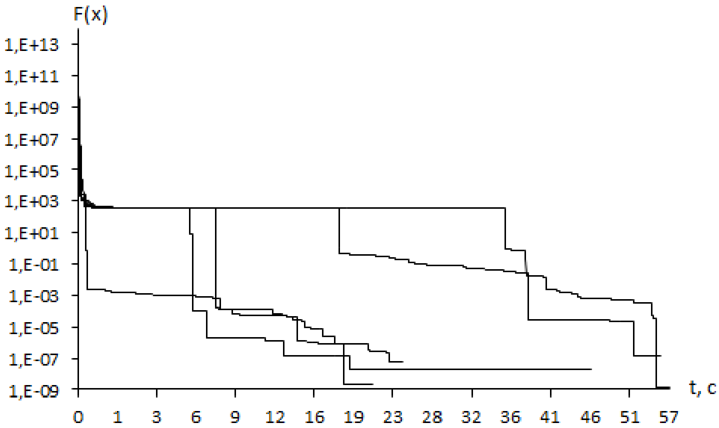

Рис. 1. Минимизация функции F(**X**) генетическим алгоритмом

Функция имеет «ловушку» в окрестности $x_i \approx 0$. Генетический алгоритм до попадания в «ловушку» показывает высокую скорость сходимости, но выходит на глобальный экстремум не всегда.

В данном случае целесообразно применять гибридные генетические алгоритмы. Было проведено тестирование алгоритмов, где в качестве дополнительных к генетическому алгоритму были использованы следующие методы: метод Ньютона (GAN); модифицированный метод Ньютона (GAN0); метод Мак-Кормика (GAMK) и аппроксимационный аналог метода Ньютона (GANA). Также были проведены тесты гибридного генетического алгоритма, использующего метод Девидона – Флетчера – Пауэлла (RGAVM) и метод Левенберга – Марквардта (GALM).

Применение метода Левенберга – Марквардта уменьшает количество итераций, за которое генетический алгоритм находит решение, но при этом происходит увеличение времени выполнения программы, среднее время выполнения 65 с. Возникновение такой ситуации объясняется необходимостью вычисления на каждом шаге алгоритма матрицы Гессе и ее обращении.

Применение остальных дополнительных методов увеличивает скорость сходимости алгоритма. Построены гистограммы временных затрат для каждого метода (рис. 2), где ν – частота, количество запусков алгоритма m = 100. Точность по значению целевой функции бралась равной 10^{-6}.

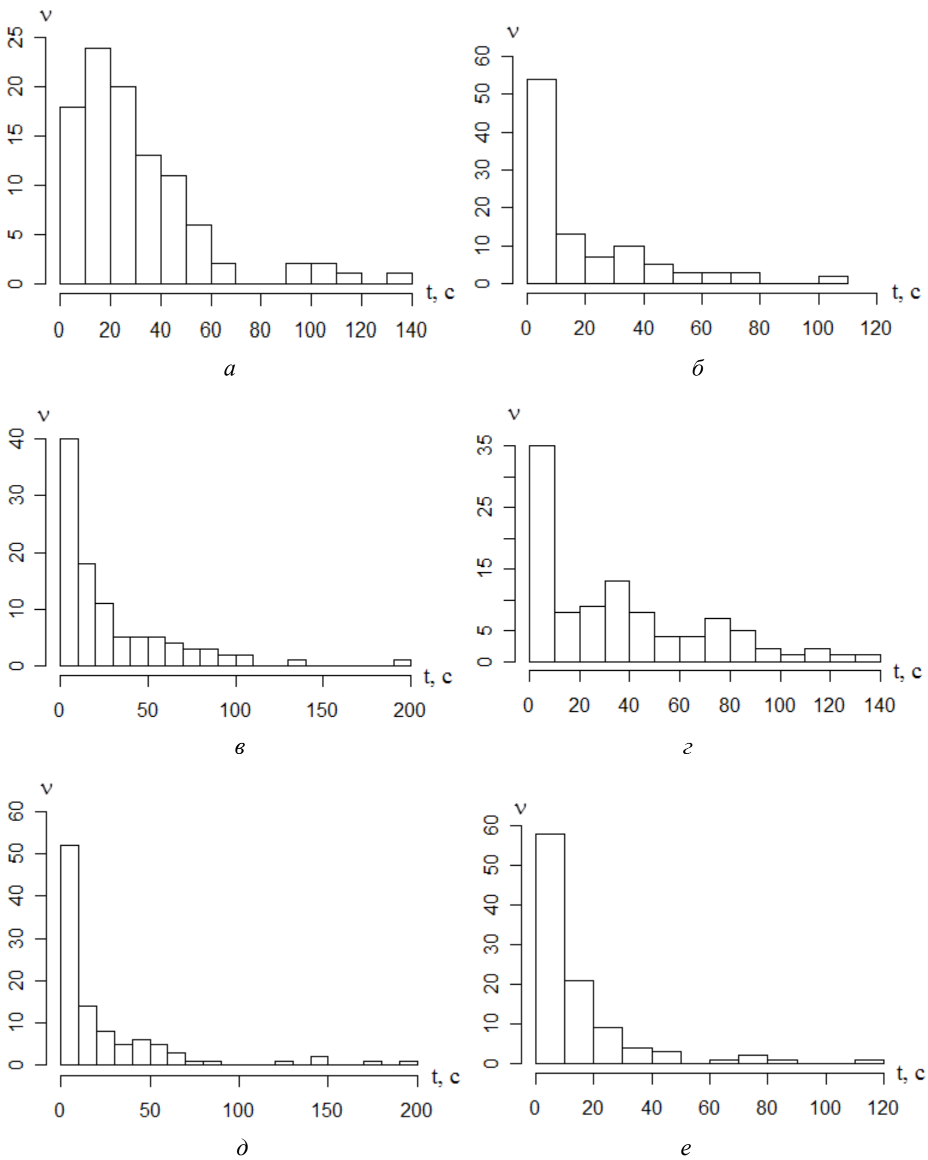

Рис. 2. Гистограммы затрат времени для решения задачи (15): *а* – генетический алгоритм; *б* – метод Ньютона; *в* – модифицированный метод Ньютона; *г* – аппроксимационный аналог метода Ньютона; *д* – метод Мак-Кормика; *е* – метод Девидона – Флетчера – Пауэлла

В табл. 1 приведено среднее время работы программы для соответствующих дополнительных методов. В табл. 1 и далее используются следующие обозначения: $\overline{t}$ – среднее время выполнения алгоритма, с; ν – частота (процент запусков алгоритма со временем выполнения меньше 10 с).

Таблица 1. **Результаты тестирования алгоритмов**

Метод	$\overline{t}$	ν
GA	29,98	18
GAN	18,62	54
GAN0	27,97	39
GANA	33,87	35
GAMK	24,01	52
RGAVM	14,25	58

Гибридный генетический алгоритм с применением метода Девидона – Флетчера – Пауэлла сходится быстрее всех остальных методов. Также хорошие результаты показал метод Ньютона.

Более высокую скорость сходимости гибридных генетических алгоритмов можно объяснить тем, что генетический алгоритм эффективно исследует пространство поиска и придает хорошее начальное приближение градиентному методу, который быстро находит решение.

Таким образом, решается проблема выбора начального приближения, характерная для всех градиентных методов.

В качестве тестовой также была рассмотрена система уравнений (16) из набора тестовых систем нелинейных уравнений [4]:

$$\begin{gathered} f_i = (3 - 2x_i)x_i + 1 - x_{i-1} - 2x_{i+1}, \quad i = \overline{1,n}, \\ x_0 = x_{n+1} = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Результаты численного решения данной системы представлены в табл. 2, где ν – процент запусков алгоритма со временем выполнения меньше 5 с. Точность по значению целевой функции бралась равной 10^{-6}, количество запусков алгоритма $m = 100$.

Таблица 2. **Результаты решения системы**

Метод	$\overline{t}$	ν
GAN	7,60	81
GAN0	5,31	89
GANA	7,13	85
GAMK	6,20	86
RGAVM	15,85	56

Наилучшие результаты показал модифицированный метод Ньютона и метод Мак-Кормика. Несмотря на то что данные методы имеют худшую, сравнительно с методом Ньютона, теоретическую сходимость, они требуют при своей реализации меньшее количество машинных действий.

Подводя итог, отметим, что результаты проведенных численных исследований показывают следующее: гибридные генетические алгоритмы лучше справляются с поставленной задачей. Это объясняется тем, что классические методы решения систем нелинейных уравнений имеют локальную сходимость, т. е. сходимость при хорошем начальном приближении. Для получения этого приближения во время решения систем нелинейных уравнений их комбинируют с методами, которые не зависят от начального приближения. В качестве такого метода может выступать генетический алгоритм.

Библиографические ссылки

1. *Вержбицкий В. М.* Основы численных методов : учебник для вузов. – М. : Высш. шк., 2002. – 840 с.
2. *Тененев В. А.* Применение генетических алгоритмов с вещественным кроссовером для минимизации функции большой размерности // Интеллектуальные системы в производстве. – 2006. – № 1. – С. 93–107.
3. *Паклин Н. Б., Сенилов М. А., Тененев В. А.* Интеллектуальные модели на основе гибридного генетического алгоритма с градиентным обучением лидера // Искусственный интеллект. – 2004. – № 4. – С. 159–168.
4. *Роосе А.* Набор тестовых систем нелинейных уравнений. – Таллинн : Валгус, 1989. – 90 с.

***

E. I. Popova, Postgraduate Student, Izhevsk State Technical University

Solution of Nonlinear Algebraic Equations Systems by Hybrid Genetic Algorithms

The method of solution of nonlinear algebraic equations systems by hybrid genetic algorithms using additional gradient methods is considered. The comparative analysis of the convergence rate for different complementary techniques is made. The high efficiency of the method is demonstrated by an example of high dimension test systems.

Keywords: genetic algorithm, system of nonlinear algebraic equations, gradient method

Получено: 10.11.11

УДК 539.3+534.1

В. П. Тарануха, кандидат технических наук, доцент
В. Е. Лялин, доктор технических наук, профессор
Ижевский государственный технический университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ДИСКА УСТРОЙСТВА ХРАНЕНИЯ ДАННЫХ В ПЛОСКОСТИ ЕГО ВРАЩЕНИЯ

Предложена методика расчета плоских упругих колебаний диска устройства хранения данных. Эта методика применена для исследования вынужденных колебаний диска, возбуждаемых крутильными и радиальными колебаниями приводного вала устройства, с учетом диссипативных свойств материала, которые, в свою очередь, определены экспериментально.

Ключевые слова: устройства хранения данных, колебания диска

Эффективность механики устройств хранения данных (УХД) в телекоммуникационных системах, в том числе и дисковых, применяемых для хранения информации, можно оценить по таким параметрам, как величина и постоянство зазора между рабочей поверхностью носителя информации и магнитной головкой, точность