

Например, при использовании в передаче гибкого элемента (ПВР-1) закон движения точек плунжера можно описать уравнениями

$$\begin{cases} x_p(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi_K, \\ y_p(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi_K, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\varphi_K = (0,5\pi - \varphi)/i_{3K}^C$  – угол, на который поворачивается зубчатое колесо за время контакта с плунжером;  $r(\varphi) = e_0 \cos 2\varphi$  – закон движения точек плунжера в неподвижных осях зубчатого колеса.

Результат решения (2) для ПВР-1 представлен на рис. 2. Решение (1) дает  $\alpha_{cp} = 0,647$  рад. =  $37,07^\circ$ .

Коэффициенты смещения инструмента при изготовлении плунжеров определяются из выражения [3]

$$x_1 = 0,5Z_{\Pi K}K(\cos \alpha / \cos \alpha_{cp} - 1), \quad (5)$$

а при изготовлении колеса – из зависимости

$$x_2 = x_1 - (k_2 m - e_0) / k_2 m. \quad (6)$$

Например, решение (5) и (6) для ПВР-1 с  $k_2 = 2$ ,  $e_0 = 7,0$  мм и  $Z_{\Pi K} = 54$  дает  $x_1 = 2,3$ ;  $x_2 = 2,18$ .

#### Библиографические ссылки

1. Иванов М. Н. Волновые зубчатые передачи. – М. : Высш. шк., 1981. – 192 с.
2. Там же.
3. Там же.

Получено 19.11.2014

УДК 621.73.01

**И. Б. Покрас**, доктор технических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

**Э. Р. Ахмедзянов**, кандидат технических наук, доцент, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

## АДАПТАЦИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ, РАЗРАБОТАННЫХ В САПР, К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЗАДАЧ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

**Н**аиболее важной предварительной задачей, решаемой при моделировании физических процессов методами конечных и граничных элементов, является дискретизация области моделирования – представление ее совокупностью геометрических симплексов. Для реализации метода граничных элементов (МГЭ) в пространственном случае необходимо разбить внешнюю поверхность области на треугольники или элементы другой формы таким образом, чтобы полученная дискретизация наилучшим образом соответствовала специфике решаемой задачи. Необходимость дискретизации поверхности трехмерного объекта возникает и при моделировании методом конечных элементов (МКЭ) в ходе пространственной триангуляции с использованием методов исчерпывания. В задачах моделирования пластического формоизменения дискретизации поверхности может применяться как к заготовке на разных этапах деформации, так и к штамповочному инструменту.

Источником пространственной геометрии, как правило, выступают широко распространенные системы автоматизированного проектирования (AutoCAD, SolidWorks, КОМПАС-3D и др.), экспортирующие ее напрямую в прикладные библиотеки или в файлы распространенных форматов, например, в формат STL (STereo Litography). Качество полу-

чаемой таким путем поверхностной триангуляции не соответствует требованиям имитационного моделирования, так как она ориентирована только на визуализацию и содержит большое количество узких или достаточно крупных треугольников, что видно по модели поковки на рис. 1. Для стабильности расчетов форма элементов должна стремиться к правильной (равносторонний треугольник), а размеры должны быть относительно небольшими и согласовываться с заданным пользователем шагом триангуляции  $h$  (средняя длина ребра элемента сетки – длина стороны треугольника).

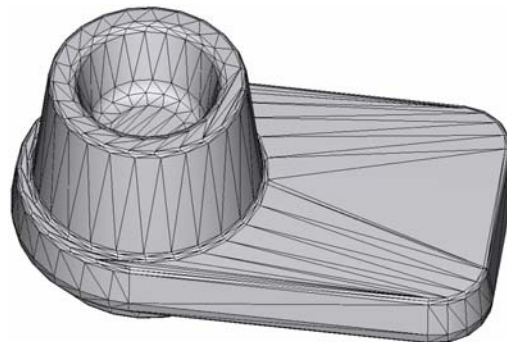


Рис. 1. Поверхностная триангуляция, импортированная из КОМПАС-3D

В данной работе предлагается способ улучшения поверхностной триангуляции, предназначенной для использования в целях моделирования пластического формоизменения методами граничных и конечных элементов. При этом считается, что плоскости, образующие исходную триангуляцию, не должны модифицироваться и их преобразование с целью сглаживания (как, например, Butterfly scheme [1]) не требуется.

Исходная триангуляция поверхности после импорта представляет собой неструктурированную совокупность треугольников  $T = \bigcup_{i=1}^{n_T} t_i$ , каждый из которых описывается вершинами и нормальными к поверхности в них:  $t_i = (V_i, N_i)$ , где  $V_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3})$  – вершины треугольника;  $N_i = (\bar{n}_{i1}, \bar{n}_{i2}, \bar{n}_{i3})$  – нормали поверхности в них. Множество совпадающих вершин треугольников в терминах триангуляции принято называть узлом сетки. Для успешного построения адаптированной к моделированию триангуляции первоначально необходимо проверить условие целостности образованной треугольниками полигональной поверхности: в каждом узле исходной сетки отрезки, являющиеся сторонами треугольников, содержащих данный узел, встречаются ровно два раза. Если указанное условие не выполняется в отдельных узлах, производится «сшивание» поверхности путем совмещения с ближайшим аналогичным узлом.

Далее для каждого из треугольников  $t_i$  исходной триангуляции (рис. 2, а) на основе координат узлов производится определение уравнения плоскости вида  $A_i \cdot x + B_i \cdot y + C_i \cdot z + 1 = 0$ . Треугольники, имеющие одинаковые с точностью до  $\varepsilon = 10^{-5}$  коэффициенты в уравнении, объединяются в полигоны – плоские многоугольники (рис. 2, б). Границами полигонов являются стороны треугольников, встречающиеся в пределах такой плоскости однократно в отличие от сторон треугольников, лежащих внутри полигона, которые встречаются дважды.

Для триангуляции плоских областей может применяться широкий круг методов, общая классификация которых приведена в работе [2], но в случае областей сложной формы с ограничениями наиболее часто используются методы на основе критерия Делоне и методы исчерпывания (англ. “advancing front”). Авторами для двумерной триангуляции используется алгоритм, изложенный в работах [3, 4], основанный на методах исчерпывания. При этом до построения элементов необходимо выполнить ряд предварительных преобразований. Каждый отрезок, являющийся частью границы полигона, необходимо разбить на ряд более мелких отрезков, соединяющихся в узлах новой сетки, – таким образом подготавливается исходный фронт для применения метода двумерной триангуляции. Количество узлов у совпадающих отрезков границ, относящихся к разным полигонам, должно быть одинаковым. С этой целью производится двухэтапное определение делителя каждого отрезка. На первом этапе делитель  $k_i$ , задающий шаг узлов  $m_i = l_i/k_i$  на некотором отрезке  $i$ , рассчитывается только исходя из геометрии полигона. При этом учитываются длина отрезка  $l_i$  и шаг триангуляции  $h$ : делитель определяется как округленное до целого числа отношение его длины к шагу триангуляции:  $k_i = \lceil l_i/h \rceil$ . В случае коротких отрезков с длиной менее двух шагов триангуляции,  $l_i < 2h$ , выбирается минимальный делитель  $k_i = 2$ . На втором этапе согласуются делители совпадающих в пространстве отрезков разных полигонов, выбирается наибольший из них. На рис. 2, в показаны узлы сформированного исходного фронта плоской триангуляции того же полигона.

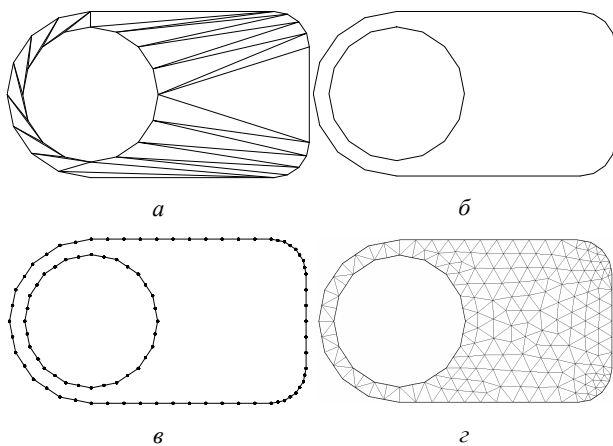


Рис. 2. Последовательность улучшения триангуляции полигона

Найденные границы полигонов объединяются в замкнутые контуры, служащие в дальнейшем в качестве границ областей плоской триангуляции (рис. 3). Полученные полигоны могут иметь достаточно сложную форму (как показано на рис. 2), но присутствуют и простейшие полигоны (треугольники или четырехугольники), которые невозможно объединить с другими ввиду сильно отличающегося уравнения плоскости.

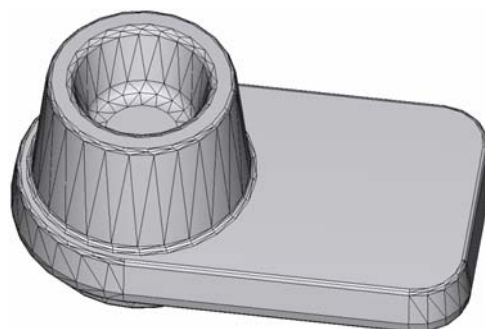


Рис. 3. Поверхностная триангуляция после объединения в полигоны

После разбиения отрезков границ в соответствии с найденным делителем следует непосредственно

триангуляция каждого из полигонов объекта. Поскольку проводить ее на плоскости в двумерной системе координат значительно проще, чем в пространстве, то целесообразно выполнить поворот полигона таким образом, чтобы он стал параллелен координатной плоскости  $XOY$ , и дальнейшие преобразования выполнять как в случае двумерной триангуляции. Для этого каждый узел  $P$  ломаной линии, образующей границу полигона, поворачивается вокруг осей  $X$  и  $Y$  путем умножения вектора его координат на матрицу поворота:  $P_h = MP$ . При расчете матрицы поворота полигона  $M$  используется нормаль (перпендикуляр к плоскости), определяемая как  $n = (n_x, n_y, n_z) = (A, B, C)$ , где  $A, B, C$  – коэффициенты уравнения плоскости полигона. Итоговая матрица поворота является произведением матриц поворота вокруг оси  $X$  на угол  $\alpha$  (рис. 4, а) и оси  $Y$  на угол  $\beta$  (рис. 4, б):

$$M = M_y M_x,$$

$$M_y = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

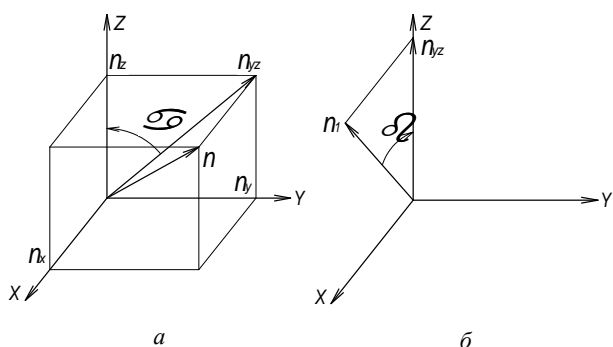


Рис. 4. Схема поворота плоскости с использованием нормали

Угол поворота вокруг оси  $X$  рассчитывается по формуле  $\alpha = -\arctg \frac{n_y}{n_z}$ , а угол поворота вокруг оси  $Y$  –

как  $\beta = \arctg \frac{n_{1x}}{n_{1z}}$ , где  $n_1 = M_x n$ .

Полученный в результате поворота в пространстве полигон поддается традиционным методам двумерной триангуляции с условием неизменности координаты  $Z$  его узлов. Пример выполнения триангуляции полигона приведен на рис. 2, з. Необходимо отметить, что производить полноценную двумерную триангуляцию полигонов необходимо только в случае областей сложной формы, а также если на каждом отрезке границы присутствует несколько узлов сетки. Если же форма полигона элементарна, например, вытянутый треугольник или четырехугольник с короткой стороной, содержащей 1-2 промежуточных узла, то более рационально проводить разбиение

по шаблону. Примеры двух шаблонов разбиения простейших полигонов показаны на рис. 5.

После триангуляции полигона на плоскости полученную сетку следует поместить на ее место в пространстве, для чего все найденные узлы новой сетки должны быть подвергнуты преобразованию путем умножения вектора координат на матрицу обратного поворота  $P' = M'P_h$ , где

$$M' = M'_x M'_y,$$

$$M'_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad M'_y = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

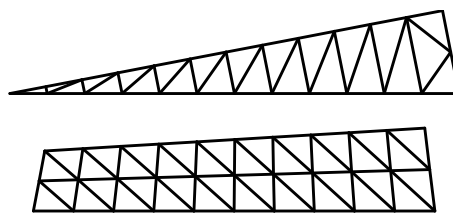


Рис. 5. Примеры разбиения простейших полигонов по шаблону

Полученная в итоге поверхностная триангуляция (пример приведен на рис. 6) в значительно большей степени, чем исходная (см. рис. 1), соответствует требованиям моделирования методом граничных элементов, поскольку размер элементов не превосходит шага триангуляции и их форма ближе к правильной.

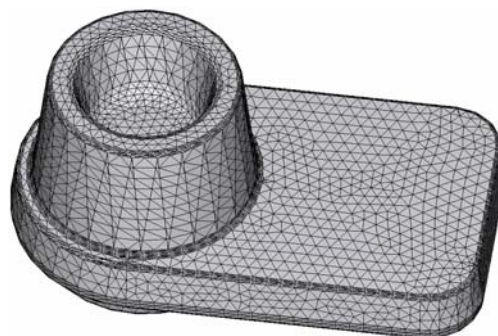


Рис. 6. Окончательная поверхностная триангуляция

Также полученная триангуляция поверхности может применяться как исходный фронт трехмерной дискретизации пространства методами исчерпывания для имитационного моделирования методом конечных элементов.

#### Библиографические ссылки

1. Zorin D., Schroder P., Sweldens W. Interpolating subdivision for meshes of arbitrary topology. – URL: [mrl.nyu.edu/~dzorin/papers/zorin1996ism.pdf](http://mrl.nyu.edu/~dzorin/papers/zorin1996ism.pdf) (дата обращения: 19.10.2014).
2. Галанин М. П., Щеглов И. А. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы. – URL:

[http://www.keldysh.ru/papers/2006/rep10/rep2006\\_10.html](http://www.keldysh.ru/papers/2006/rep10/rep2006_10.html)  
(дата обращения: 19.10.2014).

3. Покрас И. Б., Ахмедзянов Э. Р. Алгоритм формирования двумерной сетки конечных элементов в задачах моделирования пластического формоизменения // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 9 (ч. 1). – С. 29–35.

Получено 24.11.14

4. Покрас И. Б., Ахмедзянов Э. Р. Двумерная триангуляция с ограничениями применительно к задачам моделирования пластического формоизменения // Теоретические и прикладные аспекты современной науки : сборник науч. тр. по материалам III Междунар. науч.-практ. конф. 30 сентября 2014 г. : в 5 ч. / под общ. ред. М. Г. Петровой. – Белгород : Петрова М. Г., 2014. – Ч. I. – С. 152–161.

УДК 621.833.6

**Ф. И. Плеханов**, доктор технических наук, профессор, Глазовский инженерно-экономический институт (филиал) ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

**И. В. Кузнецов**, аспирант, Глазовский инженерно-экономический институт (филиал) ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

## УСЛОВИЯ РАВНОПРОЧНОСТИ ЗУБЬЕВ КОЛЕС И МЕХАНИЗМА СНЯТИЯ ДВИЖЕНИЯ С САТЕЛЛИТОВ ПЛАНЕТАРНОЙ ПЕРЕДАЧИ ТИПА *K-H-V*

**В** широко используемых на практике планетарных механизмах с внутренними зацеплениями колес (передачи типов *K-H-V* и *2K-H*) приведенные радиусы кривизны зубьев имеют большое значение, поэтому прочность зацепления лимитируется, как правило, напряжениями изгиба зубьев. Нагрузочная способность роликового механизма снятия движения с сателлитов передачи типа *K-H-V*

определяется контактной прочностью сопряжения ролик-сателлит (при длине площадки контакта ролика с двумя дисками, принимаемой равной длине площадки его контакта с сателлитом) [1].

С учетом этого установим условия равнопрочности этих элементов зубчато-роликовой передачи типа *K-H-V*, являющейся наиболее эффективной из указанных планетарных передач (рис. 1).

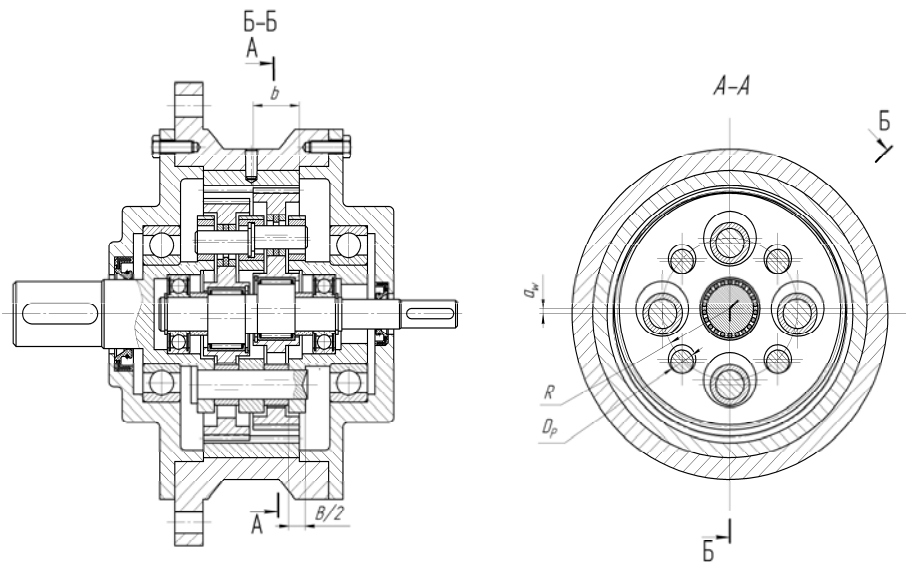


Рис. 1. Зубчато-роликовая планетарная передача типа *K-H-V*

Расчет зубьев колес на изгибную прочность осуществляется по известной зависимости [2]

$$\sigma_F = \frac{F_t Y_F K_F \Psi}{b m} \leq \frac{\sigma_{F \lim}}{S_F} K_{FL} K_{\Sigma F}. \quad (1)$$

Здесь  $b$  – ширина венца одного сателлита;  $m$  – модуль зацепления;  $Y_F$  – коэффициент формы зуба;  $K_F$  –

коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки по сателлитам и длине их зубьев, динамику передачи, уменьшение высоты зубьев для предотвращения явления интерференции их профилей;  $\Psi$  – коэффициент многопарности зацепления, показывающий, какая доля нагрузки приходится на наиболее нагруженный зуб;  $K_{FL}$  – коэффициент долговечности;  $S_F$  – коэффициент запаса проч-