

$$R(x, y) = Q_1(x) \& Q_1(y) \vee \bar{Q}_1(y) \& \bar{Q}_2(x) \vee \\ \vee Q_1(x) \& \bar{Q}_2(x) \vee Q_1(x) \& \bar{Q}_1(y).$$

**Вывод**

В отличие от булевых функций для минимизации представления предикатных форм в конечных моделях используются предикатные функции, причем аргументные места этих функций могут заменять одноименные предикаты, только с различными переменными.

**Библиографические ссылки**

1. Поспелов Д. А. Логические методы анализа и синтеза схем. – М. : Энергия, 1968. – 228 с.
2. Эдельман С. Л. Математическая логика. – М. : Высш. шк., 1975. – 176 с.
3. Еришов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. – М. : Наука, 1980. – 460 с.
4. Белоусов В. А., Калядин Н. И. Конечные модели и их применение к построению классификатора отношений последовательно-параллельного действия // Дискретные системы обработки информации : межвуз. сб. – Ижевск : Изд-во ИМИ, 1983. – Вып. 5. – С. 83–88.
5. Калядин Н. И. Конструктивизация моделей классификации конечных объектов // Известия института математики и информатики УдГУ. – Ижевск : Изд-во УдГУ, 2007. – Вып. 1(38). – С. 3–231.

*N. I. Kalyadin*, Candidate of Technical Sciences, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

**Minimizing the Presentation of Predicate Forms in Finite Models**

*Methods for minimizing predicate forms in the finite models for the classical basis (negation, conjunction, disjunction) are proposed.*

**Key words:** minimization, rank, predicate form, implicant, minimum coverage.

УДК 519.712:510.25

**Н. И. Калядин**, кандидат технических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

**Д. Н. Сандалов**, аспирант, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

**ВЫЧИСЛЕНИЕ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ СИНТЕЗИРОВАННОГО СПЕКТРА СТРУКТУРНЫХ СВЯЗЕЙ**

*Предложен алгоритм вычисления мультифрактальной размерности синтезированного спектра структурных связей между логическими операторами в формульном представлении булевых функций.*

**Ключевые слова:** спектр структурных связей, мультифрактальная размерность.

**В**ычисление мультифрактальных размерностей при построении спектров структурных связей между логическими операторами в формульном представлении булевых функций представляет интерес для исследований [1, 2]. Понятие спектра структурных связей вводится в работе [3, с. 97].

**Постановка задачи**

При решении задач классификации возникает вопрос о выборе некоторых количественных оценок, характеризующих морфологию спектра и позволяющих сравнивать (идентифицировать) между собой получившиеся спектры. С этой целью в первую очередь необходимо предложить и исследовать алгоритм вычисления мультифрактальной размерности.

**Решение**

1. На шкале сравнений можно использовать инструментарий, связанный с понятием «спектр мультифрактальных размерностей» [4] (далее по тексту – набор мультифрактальных размерностей).

Для того чтобы находить мультифрактальные размерности для рассматриваемого спектра, необходимо определиться с тем, какими фигурами описывать участки спектра и как находить соотношения величин этих фигур на разных этапах рекурсии [2]: 1) первоначально производится синтез спектров по закону, заданному двумя порождающими спектрами, названными генератором и модулятором, на основе понятия фрактальности [5]; 2) затем синтезированный спектр берется в качестве генератора. На втором шаге явно обнаруживается фрактальность, дальнейшие шаги рекурсии будут ее только подтверждать.

Ввиду дискретности спектра и определенности характера расположения неэффективно вписывать участок в окружность или прямоугольник, поэтому принимаем за величину участка приращение площади, как показано на рис. 1.

На рис. 1 видно, что участки *a*, *b* и *e* состоят из одинаковых приращений, однако это не означает некорректность данного разбиения, так как участок

$\epsilon$  при синтезе нового спектра имеет вдвое больший прирост количества точек, чем участки  $a$  и  $b$ . Также следует отметить, что постоянный участок  $\epsilon$  имеет нулевое приращение между соседними точками.

При вычислении фрактальной размерности постоянные участки влияют только на значение разбиения  $\epsilon$  – расстояние между двумя соседними точками спектра.

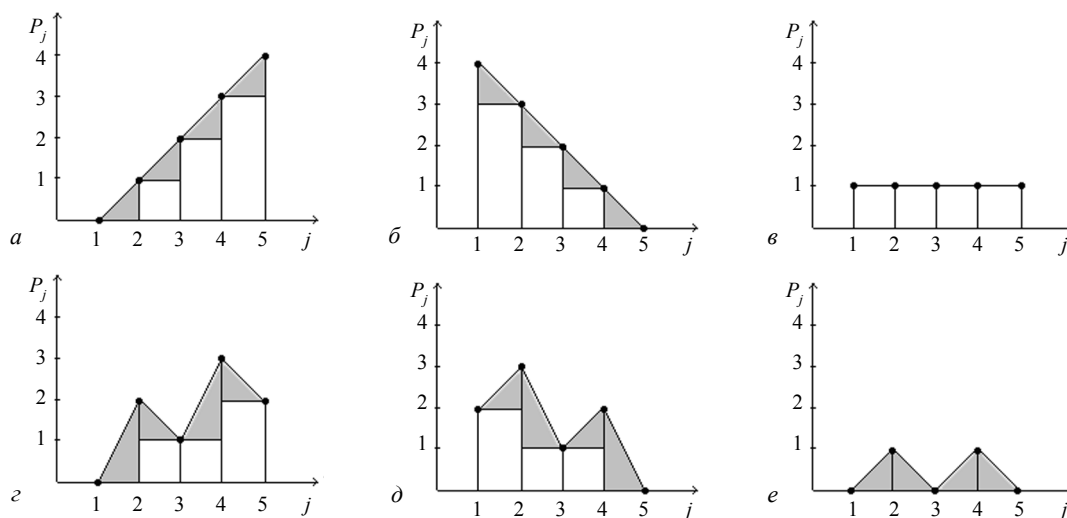


Рис. 1. Нахождение приращения площади для разных типов базовых участков спектра:  $a$  – монотонно возрастающий спектр;  $б$  – монотонно убывающий спектр;  $в$  – постоянный спектр;  $z$  – монотонно возрастающий осциллирующий спектр;  $д$  – монотонно убывающий осциллирующий спектр;  $e$  – осциллирующий спектр

Размер  $i$ -го участка  $p_i(\epsilon) = \frac{S_i}{S}$ , где  $S_i$  – площадь приращения между двумя соседними точками спектра (закрашенные участки на рис. 1);  $S = \sum_{k=1}^{N(\epsilon)} S_k$  – суммарная площадь всех приращений (площадь всех закрашенных участков рис. 1);  $N(\epsilon)$  – количество всех единичных участков.

Введем [4, с. 87] обобщенную статистическую сумму  $Z(q, \epsilon)$ , характеризуемую показателем степени  $q$ , при  $-\infty \leq q \leq \infty$ :

$$Z(q, \epsilon) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q(\epsilon). \quad (1)$$

Тогда набор обобщенных фрактальных размерностей  $D_q$ , характеризующих данное распределение площадей приращений в спектре, определяется с помощью соотношения

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}, \quad (2)$$

где функция  $\tau(q)$  имеет вид

$$\tau(q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \epsilon)}{\ln \epsilon}. \quad (3)$$

При  $q=0$   $D_q$  совпадает с размерностью Хаусдорфа  $D$ , именно поэтому величины  $D_q$  называют обобщенными размерностями [4, с. 87]. Если  $D_q = D = \text{const}$ , то множество точек представляет

собой обычный, регулярный фрактал, который характеризуется всего лишь одной величиной – фрактальной размерностью  $D$ .

Напротив, если функция  $D_q$  как-то меняется с  $q$ , то рассматриваемое множество точек является мультифракталом.

Таким образом, мультифрактал в общем случае характеризуется некоторой нелинейной функцией  $\tau(q)$ , определяющей поведение статистической суммы  $Z(q, \epsilon)$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ , а величина  $q$  позволяет оценить влияние на эту сумму отдельных участков определенного размера. При  $q \rightarrow \infty$  основной вклад в обобщенную статистическую сумму (1) вносят участки наибольшего размера, а при  $q \rightarrow -\infty$  наоборот – большее влияние имеют участки малого размера.

Будем использовать наименьшее возможное разбиение  $\epsilon$ . Примем длину спектра за 1, тогда получим  $\epsilon = \frac{1}{L-1}$ , где  $L$  – количество точек спектра. Такое разбиение избавляет от предела в формуле (3). После подстановки  $\tau(q)$  в формулу (2)  $D_q$  будет иметь следующий вид:

$$D_q = \begin{cases} \frac{\ln \left( \sum_{k=1}^{N(\epsilon)} p_k^q(\epsilon) \right)}{(1-q) \ln \left( \frac{1}{\epsilon} \right)} & \text{при } q \neq 1, \\ \frac{\ln \left( \sum_{k=1}^{N(\epsilon)} p_k(\epsilon) \cdot \ln(p_k(\epsilon)) \right)}{\ln \left( \frac{1}{\epsilon} \right)} & \text{при } q = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Из анализа выражения (4) можно выделить несколько закономерностей поведения мультифрактальных размерностей в зависимости от спектра генератора [2, с. 141].

**Следствие 1.** Если в спектре генератора не будет участков возрастающей (рис. 1, з) или убывающей (рис. 1, д) осцилляции, то все  $D_q$  будут равны, и в данном случае имеем дело с регулярным фракталом (исключением являются случаи, когда на некотором шаге рекурсии появляются участки осцилляции, наличие которых не было заложено в генераторе).

**Следствие 2.** Если в спектре генератора не будет постоянных участков, то  $D_0 = \text{const} = 1$  для любых спектров на всех шагах рекурсии.

**Следствие 3.** Если спектр генератора состоит только из участков монотонного возрастания (рис. 1, а) и убывания (рис. 1, б), то его размерность будет равна  $D_q = \text{const} = 1$ , а при наличии постоянных участков (рис. 1, в) будет меньше 1, причем чем больше доля постоянных участков, тем меньше  $D_q$ .

2. Была составлена компьютерная программа для расчета мультифрактальных размерностей, в которой реализован алгоритм нахождения  $D_q$  при  $-20 \leq q \leq 20$  (брать больший диапазон нецелесооб-

разно, так как при дополнительных вычислительных затратах будем получать значения очень близкие к уже подсчитанным). Это дает возможность наблюдать зависимость мультифрактальных размерностей синтезированного спектра от вида порождающих его пары «генератор – модулятор» [2, с. 141].

Выясним зависимость мультифрактальных размерностей от порядка следования базовых участков спектра генератора. Для наблюдения в качестве генератора и модулятора берутся одинаковые спектры, состоящие из 7 точек (минимальная величина спектра при наличии трех разных базовых участков). Обозначим числами 1 – возрастающий, 2 – осциллирующий и 3 – постоянный участки спектра. Будем сокращенно обозначать спектр генератора как набор этих цифр, стоящих в том же порядке, что и соответствующие им участки в спектре. Для каждого из 6 возможных сочетаний находим  $D_q$  при  $-20 \leq q \leq 20$  (рис. 2, а –  $D_q$  для первого шага рекурсии, рис. 2, б – для второго).

Из полученных результатов (рис. 2) видно, что для первого шага рекурсии имеем значительную разницу в размерностях, на втором шаге эти различия уже значительно меньше. Если не считать сдвиг, то линии  $D_q$  практически идентичны для каждого шага рекурсии.

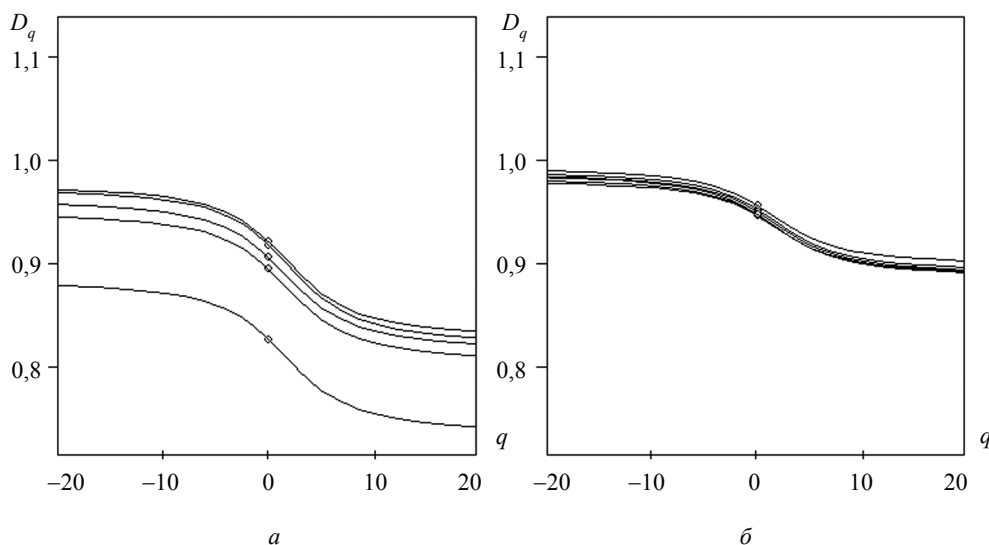


Рис. 2. Наборы мультифрактальных размерностей при чередовании участков спектра генератора: а – первый шаг рекурсии; б – второй шаг рекурсии

Далее выясним, имеет ли влияние на размерность спектр модулятора. Возьмем в качестве генератора монотонно возрастающий осциллирующий спектр из 5 точек (если взять меньше, то на пересечении участков могут образоваться другие участки, изначально не заданные в генераторе), а в качестве модулятора постоянные спектры разной длины, что уменьшает влияние вида генератора.

Из получившихся графиков (рис. 3) видно, что хотя генератор и оставался неизменным, вариация одной лишь длины модулятора меняет саму кривую  $D_q$  без сдвига.

Для удобства сравнения значения  $D_{-20}$ ,  $D_0$  и  $D_{20}$  приведены в таблице.

**Оценки величин  $D_{-20}$  и  $D_{20}$**

1. Максимальное значение  $D_{-20}$  у спектра, составленного из участков возрастающей (рис. 1, з) или убывающей (рис. 1, д) осцилляции. В этом случае можно выразить  $Z(q, \epsilon)$  через  $\epsilon$ :

$$\sum_{k=1}^{N(\epsilon)} P_k^q(\epsilon) = \frac{1}{2\epsilon} \left(\frac{2\epsilon}{3}\right)^q + \frac{1}{2\epsilon} \left(\frac{4\epsilon}{3}\right)^q. \tag{5}$$

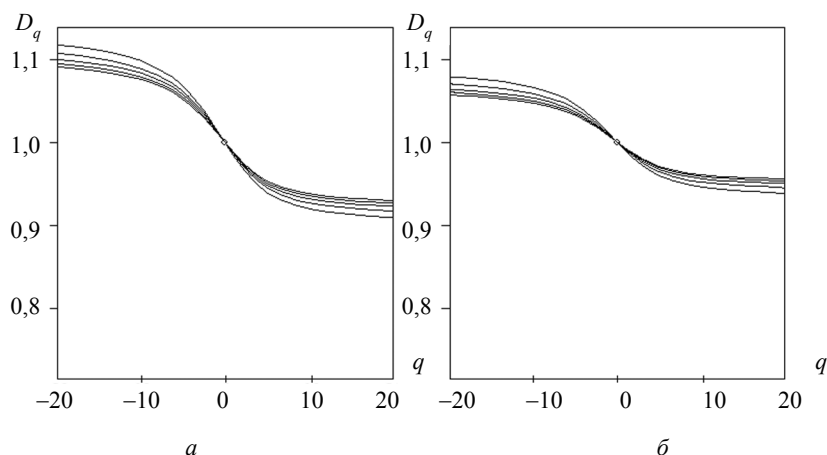


Рис. 3. Наборы мультифрактальных размерностей для разных длин спектра модулятора: а – первый шаг рекурсии; б – второй шаг рекурсии

**Значения мультифрактальных размерностей**

генератор	Первый шаг рекурсии			Второй шаг рекурсии		
	$D_{-20}$	$D_0$	$D_{20}$	$D_{-20}$	$D_0$	$D_{20}$
123	0,880546	0,826836	0,739897	0,978613	0,946149	0,890329
132	0,958661	0,906157	0,820184	0,980888	0,946402	0,891709
213	0,946841	0,894560	0,808373	0,990776	0,955887	0,901431
231	0,973225	0,921420	0,831906	0,987143	0,951917	0,894834
312	0,973225	0,921420	0,831906	0,985067	0,949916	0,892698
321	0,970342	0,918026	0,825692	0,984113	0,947755	0,889773
модулятор	$D_{-20}$	$D_0$	$D_{20}$	$D_{-20}$	$D_0$	$D_{20}$
3 точки	1,122181	1	0,907852	1,082576	1	0,937722
4 точки	1,111121	1	0,916193	1,072784	1	0,945107
5 точек	1,103831	1	0,921691	1,066653	1	0,949730
6 точек	1,098548	1	0,925675	1,062361	1	0,952967
7 точек	1,094484	1	0,928741	1,059141	1	0,955396

При подстановке выражения (5) в формулу (4) получим оценку сверху для  $D_q$  при  $q = -20$ :

$$D_{-20} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{2\varepsilon}{3}\right)^{-20} + \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{4\varepsilon}{3}\right)^{-20}\right)}{21 \cdot \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{2\varepsilon}{3}\right)^{-20} + \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{4\varepsilon}{3}\right)^{-20}\right)}{21 \cdot \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{3}{2\varepsilon}\right)^{20} - \ln(\varepsilon)}{21 \cdot \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)};$$

$$D_{-20} \leq \frac{20 \cdot \ln\left(\frac{3}{2\varepsilon}\right)}{21 \cdot \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} + \frac{1}{21}. \tag{6}$$

Так как генератор будет иметь хотя бы два ненулевых приращения, а модулятор состоит не менее чем из трех точек, то  $\varepsilon$  не может превышать величину  $\frac{1}{2 \cdot 3}$ , которую и подставляем в выражение (6):

$$D_{-20} \leq \frac{20 \cdot \ln(9)}{21 \cdot \ln(6)} + \frac{1}{21} = 1,215518...$$

2. Так как возможно взять сколько угодно длинный спектр, почти полностью состоящий из постоянных участков, то оценкой снизу величины  $D_{20}$  будет 0.

**Заключение**

Построенные количественные оценки набора мультифрактальных размерностей позволяют предложить шкалу сравнений (идентификаций) спектров структурных связей между логическими операторами в формульном представлении булевых функций.

**Библиографические ссылки**

1. Калядин Н. И., Сандалов Д. Н. Фрактальность в спектрах структурных связей // Тр. Первой междунар. конф. «Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Кластерные технологии моделирования». – Т. 3. – Ижевск : Изд-во УдГУ, 2009. – С. 41–45.
2. Калядин Н. И., Сандалов Д. Н. Компьютерное моделирование спектров структурных связей // Вестник ИжГТУ. – 2009. – Вып. 2(42). – С. 141–144.
3. Калядин Н. И. Конструктивизация моделей классификации конечных объектов // Известия института математики и информатики УдГУ. – 2007. – Вып. 1(38). – С. 3–231.
4. Божокин С. В., Паришин Д. А. Фракталы и мультифракталы. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.
5. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – Москва ; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 666 с.

*N. I. Kalyadin*, Candidate of Technical Sciences, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University  
*D. N. Sandalov*, Postgraduate, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

### Calculating of Multifractal Dimension in Synthesized Spectrum of Structural Relations

*The computational algorithm for multifractal dimension spectrum of the synthesized structural relationships between logical operators in the formula representation of Boolean functions is proposed.*

**Key words:** spectrum of structural relations, multifractal dimension.

УДК 517.988

**В. Ю. Митин**, аспирант, Пермский государственный национальный исследовательский университет

## ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ, В КОТОРОМ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДЕКСА ПУАНКАРЕ ОСОБОЙ ТОЧКИ ПЛОСКОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ ЕГО ЛИНЕЙНОЙ И КВАДРАТИЧНОЙ ЧАСТЯМИ

*Рассмотрен случай, при котором возможно сведение вычисления индекса нулевой изолированной особой точки плоского векторного поля с ненулевой вырожденной производной Фреше к аналогичной задаче для полиномиального векторного поля.*

**Ключевые слова:** индекс Пуанкаре, вращение, плоское векторное поле.

### Постановка задачи

**П**усть  $\Phi$  – векторное поле, удовлетворяющее требованиям  $(T_1 - T_5)$ :

$T_1$ . Векторное поле  $\Phi$  плоское, причем  $\Phi(\theta) = \theta$ , где  $\theta$  – нулевой вектор.

$T_2$ . Векторное поле  $\Phi$  представимо в виде

$$\Phi(z) = \Phi(\theta) + \Phi'(\theta)z + \frac{\Phi''(\theta)z^2}{2!} + \omega_2(z),$$

где  $\omega_2(z) = o(\|z\|^2)$ . Для выполнения этого требования достаточно, чтобы вторая производная Фреше  $\Phi''(z)$  была равномерно непрерывна в некоторой окрестности точки  $\theta$  [1, с. 491].

$T_3$ .  $\theta$  – изолированная особая точка векторных полей  $\Phi$  и  $\Phi_2$ , где  $\Phi_2(z) = \Phi(\theta) + \Phi'(\theta)z + \frac{\Phi''(\theta)z^2}{2}$ .

$T_4$ . Первой производной Фреше векторного поля  $\Phi$  соответствует ненулевая вырожденная матрица  $A$  (т. е.  $A$  – матрица ранга 1).

$T_5$ . Имеет место «неколлинеарный» случай (см. [2]), т. е. векторы  $Kz^* = K(-z^*)$  и  $Lz$  неколлинеарны при  $z \notin \{z^*, -z^*\}$ , где  $z^*$  и  $-z^*$  – нули оператора  $L$  на границе любого замкнутого круга  $\overline{B_{\theta,r}}$  с центром в нуле и достаточно малого радиуса  $r$ , при котором  $\theta$  – единственная особая точка поля  $\Phi$  в  $\overline{B_{\theta,r}}$ . Из условия  $T_4$  следует, что  $\dim(\text{Ker}L) = 1$ , т. е. множество нулей векторного поля  $L$  образует прямую, проходящую (согласно требованию  $T_1$ ) через точку  $\theta$ . Эта прямая пересекает все рассматриваемые круги  $\overline{B_{\theta,r}}$  в двух диаметрально противоположных точках  $z^*$  и  $-z^*$ .

Покажем, что при совместном выполнении требований  $(T_1 - T_5)$  индекс Пуанкаре нулевой особой точки определяется только линейной ( $L$ ) и квадратичной ( $K$ ) частями векторного поля  $\Phi$  и не зависит от остатка  $\omega_2$ . Определение индекса, его свойства, методы вычисления в ряде частных случаев, а также разнообразные приложения данной теории изложены, например, в работах [3, 4].

### Доказательство теорем

**Теорема 1.** Если выполнены условия  $(T_1 - T_5)$ , то на окружностях достаточно малых радиусов справедлива оценка нормы вида

$$\|\Phi_2 z\| \geq \alpha \|z\|^2,$$

где  $\alpha > 0$ .

*Доказательство.* Пусть векторы  $Lz$  и  $Kz^*$  неколлинеарны при  $z \notin \{z^*, -z^*\}$ . Тогда

$$|\cos(Lz, Kz^*)| \neq 1 \Leftrightarrow (\exists \varepsilon \in (0, 1)) : |\cos(Lz, Kz^*)| \leq 1 - 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$(\exists \varepsilon \in (0, 1)) : \frac{Lz \cdot Kz^*}{\|Lz\| \|Kz^*\|} \leq 1 - 2\varepsilon. \quad (1)$$

Заметим, что направления векторов  $Lz$  и  $Kz$  (а значит, и угол между ними) не зависят от радиуса окружности и принимают постоянное значение на каждом луче, выходящем из точки  $\theta$ , поэтому можно рассматривать любую окружность, не содержащую особых точек. Из непрерывности оператора  $K$  и того, что  $\|Kz^*\| > 0$  следует, что  $\|Kz\| > 0$  в некоторой окрестности  $U_{11}$  по углу наклона  $\varphi$  луча, соответствующего точке  $z^*$ . Из непрерывности функции в левой части неравенства (1) следует, что в некоторой