

УДК 004.92

А. И. Мурынов, доктор технических наук, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова
Л. Н. Левицкая, кандидат технических наук, Ижевский государственный технический университет
 имени М. Т. Калашникова
О. Н. Кошель, магистрант, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕТРОИДНОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СЕТИ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

Описана формализация понятия тетроида как ячейки тетроидной регулярной сети и определена полная номенклатура всех возможных типов, видов и разновидностей тетроидов, что имеет существенное значение для анализа геометрико-топологической структуры моделируемых трехмерных пространственных объектов.

Ключевые слова: модель тетроидной регулярной сети, трехмерные пространственные объекты, геометрико-топологическая структура моделируемых объектов, тетроид.

Как установлено в работах [1–3], использование модели тетроидной регулярной сети (модели TRN; Tetroid Regular Network) для представления трехмерных пространственных объектов и сцен дает значительные преимущества по сравнению с обычно используемой моделью триангуляционной нерегулярной сети (модель TIN; Triangulated Irregular Network). Это обусловлено существенно меньшей ресурсоемкостью модели TRN в плане потребляемых объемов памяти, более высокой производительностью процессов обработки информации и дополнительными возможностями анализа геометрико-топологической структуры моделируемых объектов и сцен, обеспеченными достаточно простыми процедурами обработки данных. Для обеспечения полноты теоретической проработки модели TRN ниже производится формализация понятия тетроида как ячейки тетроидной регулярной сети и устанавливается полная номенклатура всех возможных типов, видов и разновидностей тетроидов, что имеет существенное значение для анализа геометрико-топологической структуры моделируемых объектов.

В дальнейшем приняты следующие обозначения:

L – прямая в пространстве R^3 ($L \subset R^3$);
 $L(p_1, p_2)$ – прямая, проходящая через точки p_1, p_2 .

P – плоскость в пространстве R^3 ($P \subset R^3$).

$L^*(p_1, p_2)$ – отрезок с концевыми точками p_1, p_2 ; $L^*(p_1, p_2) \subset L(p_1, p_2)$.

$L^*(p_1, p_2, \dots, p_n) = \bigcup_{i=1}^{n-1} L^*(p_i, p_{i+1})$ – ломаная – объе-

динение последовательности $n-1$ отрезков (звеньев), в которой начальная концевая точка каждого последующего $i+1$ -го отрезка совпадает с конечной концевой точкой предыдущего i -го отрезка; ломаная называется замкнутой, если $p_n = p_1$; ломаная называется планарной, если существует такая плоскость P , что $L^*(p_1, p_2, \dots, p_n) \subset P$.

Определение 1. Совокупность точек плоскости P , ограниченная n -звенной замкнутой планарной ломаной $L^*(p_1, p_2, \dots, p_n, p_1) \subset P$, называется полигоном (обозначается $P[p_1, p_2, \dots, p_n]$) порядка n (n -угольником); точки p_1, p_2, \dots, p_n называются вершинами полигона, ломаная $L^*(p_1, p_2, \dots, p_n, p_1)$ – его контуром, составляющие контур отрезки $L^*(p_1, p_2), L^*(p_2, p_3), \dots, L^*(p_n, p_1)$ – его сторонами.

Следует заметить, что циклические сдвиги последовательности точек p_1, p_2, \dots, p_n в записи $P[p_1, p_2, \dots, p_n]$ сохраняют пространственные конфигурации вершин, сторон и контуров полигонов, что означает их тождественность.

Очевидно, что порядок полигона в общем случае удовлетворяет условию $n \geq 2$; при $n=2$ полигон вырождается в отрезок, при $n=3$ полигон представляет собой треугольник (тригон, обозначается $\Delta[p_1, p_2, p_3]$), при $n=4$ – четырехугольник (тетрагон, обозначается $\Theta[p_1, p_2, p_3, p_4]$), при $n=5$ – пятиугольник (пентагон), при $n=6$ – шестиугольник (гексагон) и т. д.

Определение 2. Выпуклая оболочка множества $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ называется тетраэдром (обозначается $\tau[p_1, p_2, p_3, p_4]$), если все точки p_1, p_2, p_3, p_4 пространства R^3 различны, не лежат в одной плоскости и никакие три точки из них не лежат на одной прямой; точки p_1, p_2, p_3, p_4 называются вершинами тетраэдра, отрезки $L^*(p_1, p_2), L^*(p_1, p_3), L^*(p_1, p_4), L^*(p_2, p_3), L^*(p_2, p_4), L^*(p_3, p_4)$ – его ребрами, треугольники $\Delta[p_1, p_2, p_3], \Delta[p_1, p_3, p_4], \Delta[p_1, p_2, p_4], \Delta[p_2, p_3, p_4]$ – его гранями.

Определение 3. Упорядоченная четверка $\langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle$ точек пространства R^3 называется

тетроидом (обозначается $T(p_1, p_2, p_3, p_4)$), точки p_1, p_2, p_3, p_4 называются вершинами тетроида, четырехзвенная замкнутая ломаная $L^*(p_1, p_2, p_3, p_4, p_1)$ – его контуром, составляющие контур отрезки $L^*(p_1, p_2), L^*(p_2, p_3), L^*(p_3, p_4), L^*(p_4, p_1)$ – его ребрами, отрезки $L^*(p_1, p_3), L^*(p_2, p_4)$ – его диагоналями.

Следует заметить, что циклические сдвиги точек p_1, p_2, p_3, p_4 в записи $T(p_1, p_2, p_3, p_4)$ сохраняют пространственные конфигурации вершин, ребер, диагоналей и контуров тетроидов, что не означает их тождественности.

В зависимости от собственной размерности в пространстве R^3 тетроиды подразделяются на следующие типы:

- нульмерные (точечные) – все вершины тетроида совпадают;
- одномерные (линейные) – тетроид не является точечным и существует такая прямая, что все его вершины лежат на ней;
- двумерные (планарные) – тетроид не является точечным или линейным и существует такая плоскость, что все его вершины лежат в ней;
- трехмерные (объемные) – тетроид не является точечным, линейным или планарным.

Тетроид называется вырожденным, если хотя бы две его вершины совпадают; в противном случае тетроид называется невырожденным. Возможны следующие виды вырождения тетроидов (в обозначениях d означает вырождение, а индексы – количество совпадающих вершин):

- d_4 – все четыре вершины тетроида совпадают;
- d_3 – три вершины тетроида совпадают, а четвертая вершина не совпадает с ними;
- $d_{2,2}$ – две вершины тетроида совпадают, а третья и четвертая вершины не совпадают с ними, но совпадают друг с другом;
- d_2 – две вершины тетроида совпадают, а третья и четвертая вершины не совпадают с ними и друг с другом.

Имеют место следующие очевидные утверждения.

Утверждение 1. Всякий тетроид вида d_4 является точечным.

Утверждение 2. Всякий тетроид вида d_3 или $d_{2,2}$ является линейным.

Утверждение 3. Всякий тетроид вида d_2 может быть только линейным (обозначается d_2L) или планарным (обозначается d_2P).

Утверждение 4. Всякий невырожденный тетроид может быть только линейным (обозначается L), планарным (обозначается P) или объемным (обозначается V).

В дальнейшем совпадение вершин тетроидов в обозначениях дается перечислением их индексов в круглых скобках.

Планарный невырожденный тетроид называется линейно вырожденным, если три его вершины лежат на одной прямой (обозначается l_3); в противном случае тетроид называется линейно невырожденным.

В дальнейшем принадлежность вершин тетроидов одной прямой в обозначениях дается перечислением их индексов в квадратных скобках в порядке их следования на этой прямой (прямой и обратный порядок перечисления считаются тождественными).

Различные виды тетроидов могут также подразделяться на подвиды за счет различий соответствующих тетроидам пространственных образов (П-образов), определяемых пространственными конфигурациями их вершин и ребер.

Простейший точечный тетроид вида d_4 имеет единственную разновидность (1, 2, 3, 4) (см. рис. 1). Совпадение вершин тетроида можно представить как отношение их совмещения (на рис. 1, *a* выделено серым цветом). При этом имеет место транзитивность отношения совмещения (на рис. 1, *a* показана пунктиром): если совмещены вершины p_1 и p_2 и совмещены вершины p_2 и p_3 , то совмещены и вершины p_1 и p_3 . П-образ тетроида вырождается в точку $p = p_1 = p_2 = p_3 = p_4$.

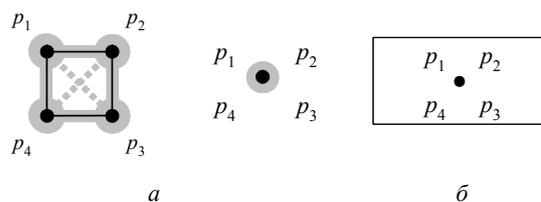


Рис. 1. Точечный тетроид вида d_4 : *a* – совмещение вершин (1, 2, 3, 4); *b* – П-образ (точка)

Линейные тетроиды вида d_3 имеют четыре разновидности, каждая из которых определяется тройкой совмещенных вершин (рис. 2). Их П-образы вырождаются в отрезки (для тетроида (1, 2, 3) – отрезок $L^*((p_1, p_2, p_3), p_4)$ и т. д.).

Линейные тетроиды вида $d_{2,2}$ имеют три разновидности, каждая из которых определяется двумя парами совмещенных вершин (см. рис. 3). Их П-образы вырождаются в отрезки (для тетроида (1,2)(3,4) – отрезок $L^*((p_1, p_2), (p_3, p_4))$ и т. д.).

Линейные тетроиды вида d_2L имеют восемнадцать разновидностей, каждая из которых определяется парой совмещенных вершин и порядком следования вершин, лежащих на одной прямой (рис. 4). Их П-образы вырождаются в отрезки (для тетроида [(1, 2), 3, 4] – отрезок $L^*((p_1, p_2), p_4)$ и т. д.).

Планарные тетроиды вида d_2P имеют шесть разновидностей, каждая из которых определяется парой совмещенных вершин (рис. 5). Их П-образы вырождаются в фигуры двух типов – тригоны (рис. 5, *a*; четыре разновидности; для тетроида (1, 2) – тригон $\Delta[(p_1, p_2), p_3, p_4]$ и т. д.) и двузвенные ломаные

(Д-ломанные, рис. 5, б; две разновидности; для тетроида (1, 3) – Д-ломаная $L^*(p_2, (p_1, p_3), p_4)$ и т. д.).

Линейные тетроиды вида L имеют двенадцать разновидностей, каждая из которых определяется порядком следования вершин, лежащих на одной прямой (рис. 6). Их П-образы тетроидов вырождаются в отрезки (для тетроида [1, 2, 3, 4] – отрезок $L^*(p_1, p_4)$ и т. д.).

Планарные тетроиды вида l_3 имеют двенадцать разновидностей, каждая из которых определяется по-

рядком следования трех вершин, лежащих на одной прямой (рис. 7). Их П-образы вырождаются в фигуры двух подвидов – тригоны (рис. 7, а; четыре разновидности; для тетроида [1, 2, 3] – тригон $\Delta[p_1, p_3, p_4]$ и т. д.) и квазитетрагоны (К-тетрагоны) – тетрагоны, одна из вершин которых лежит внутри одного из ребер (К-тетрагоны имеют «флагообразный» вид, рис. 7, б; восемь разновидностей; для тетроида [1, 3, 2] – К-тетрагон $\Theta[[p_1, p_2], (p_3), p_4]$, вершина p_3 которого лежит внутри ребра $L^*(p_1, p_2)$, и т. д.).

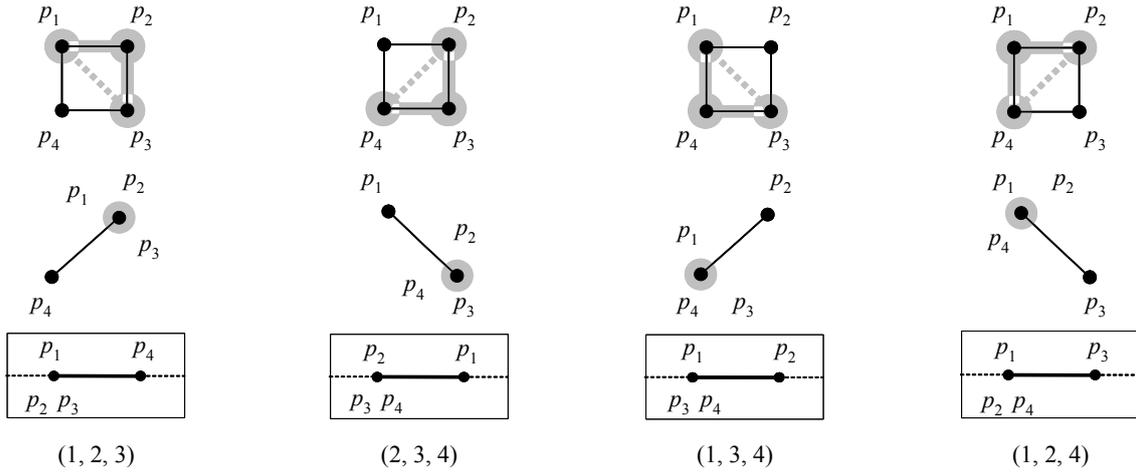


Рис. 2. Совмещение вершин, П-образы (отрезки) и разновидности линейных тетроидов вида d_3

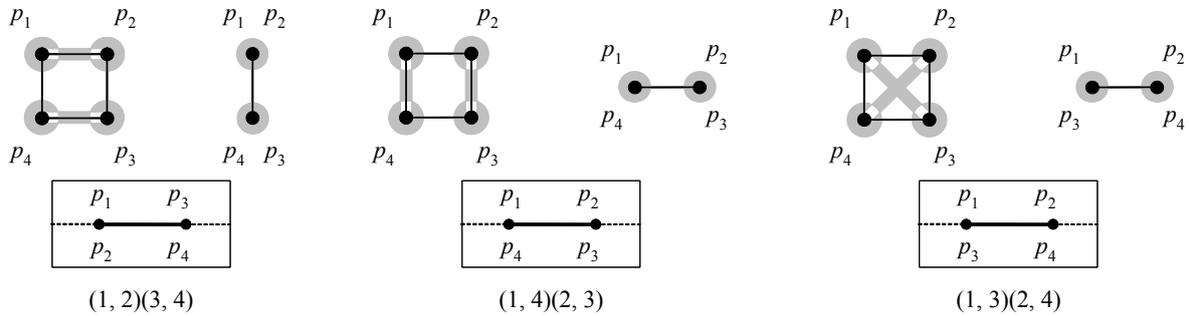


Рис. 3. Совмещение вершин, П-образы (отрезки) и разновидности линейных тетроидов вида $d_{2,2}$

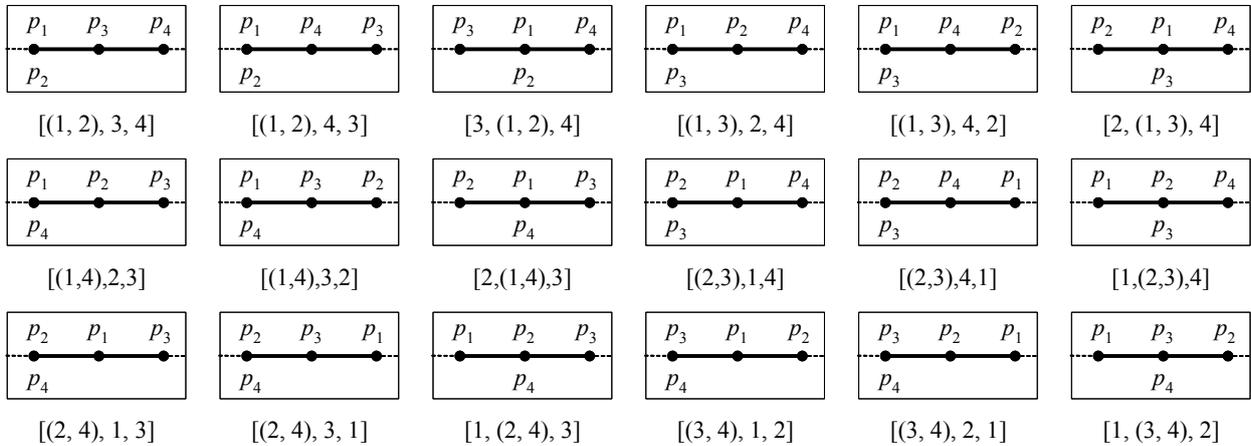


Рис. 4. П-образы (отрезки) и разновидности линейных тетроидов вида d_2L

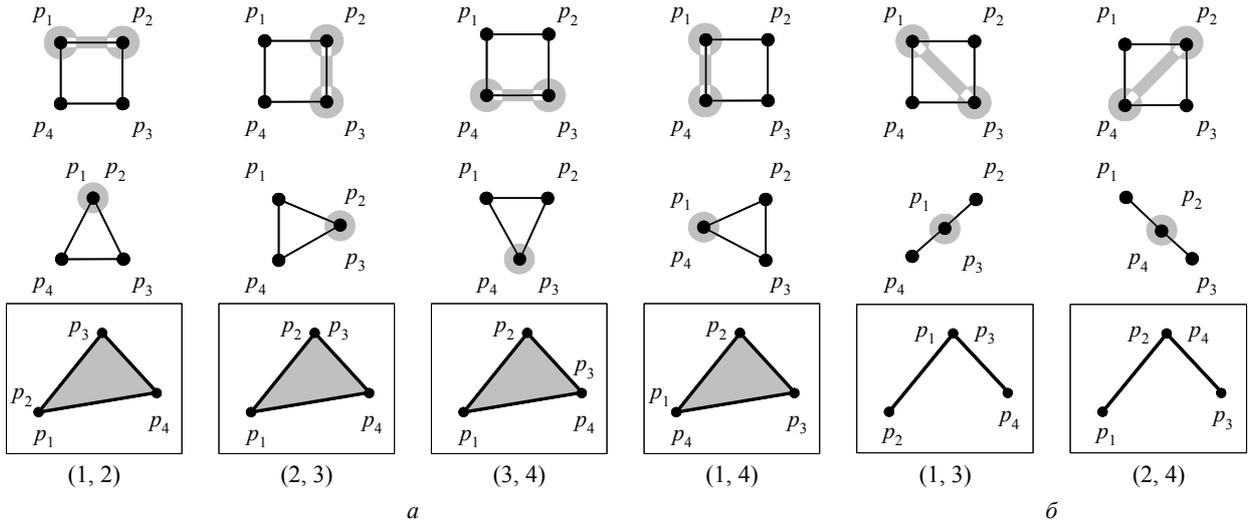


Рис. 5. Совмещение вершин, Π -образы и разновидности планарных тетраэдров вида d_2P : а – тригоны; б – Д-ломаные

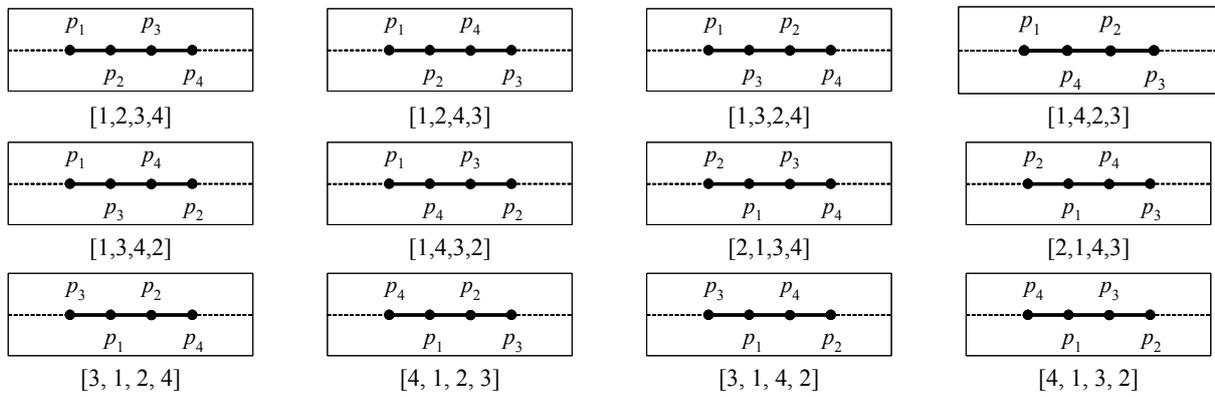


Рис. 6. Π -образы (отрезки) и разновидности линейных тетраэдров вида L

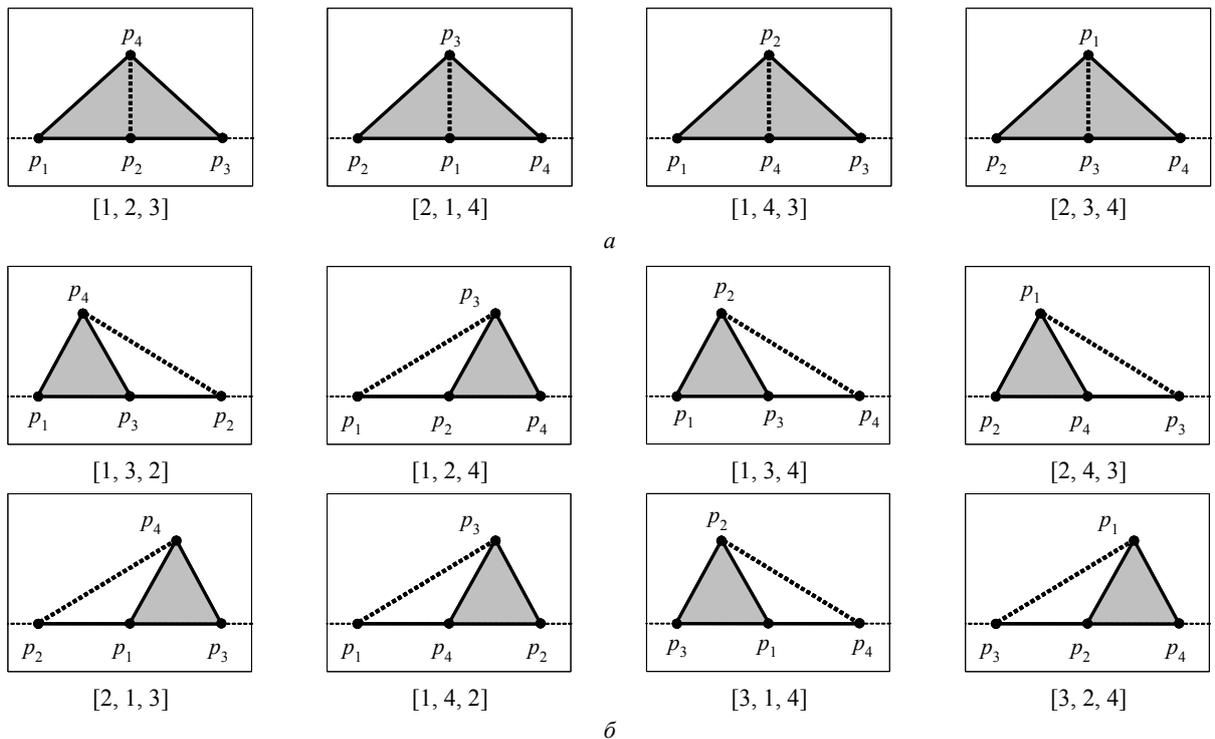


Рис. 7. Π -образы и разновидности планарных тетраэдров вида l_3 : а – тригоны; б – К-тетрагоны

П-образом планарного линейно невырожденно-тетроида $T(p_1, p_2, p_3, p_4)$ вида P является тетрагон $\Theta[p_1, p_2, p_3, p_4]$, а вершины, ребра, диагонали и контур тетроида являются, соответственно, вершинами, сторонами, диагоналями и контуром этого тетрагона.

Для определения различных подвидов таких тетроидов целесообразно рассмотреть варианты расположения одной из вершин соответствующих тетрагонов (на рис. 8 в качестве такой вершины выбрана точка p_4) относительно трех других вершин (p_1, p_2, p_3). Всего существует семь вариантов положения точки p_4 – внутри одной из областей $G_1, G_2, G_3, G_1^*, G_2^*, G_3^*, G_0$ (рис. 8). Соответственно, возможны семь разновидностей тетроидов.

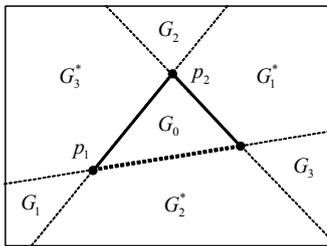


Рис. 8. Области положений вершины p_4

Тетроиды первых двух разновидностей (первый подвид) являются самопересекающимися (рис. 9). Их П-образами являются самопересекающиеся тетрагоны (С-тетрагоны), которые имеют «восьмеркообразный» вид, а их внутренность не совпа-

дает с внутренностью их выпуклой оболочки. Диагонали $L^*(p_1, p_3)$ и $L^*(p_2, p_4)$ этих тетрагонов не пересекаются, а сами подвиды различаются парами пересекающихся сторон; для разновидности 1, $2 \times 3, 4$ ($p_4 \in G_3^*$) пересекаются стороны $L^*(p_1, p_2)$ и $L^*(p_3, p_4)$, а для разновидности 1, $4 \times 2, 3$ ($p_4 \in G_1^*$) – стороны $L^*(p_1, p_4)$ и $L^*(p_2, p_3)$.

Тетроиды четырех других разновидностей (второй подвид) являются невыпуклыми (см. рис. 10). Их П-образами являются невыпуклые тетрагоны (Н-тетрагоны), имеющие форму невыпуклого четырехугольника с внутренностью, не совпадающей с внутренностью их выпуклой оболочки, которая имеет форму треугольника. Диагонали $L^*(p_1, p_3)$ и $L^*(p_2, p_4)$ этих тетрагонов также не пересекаются, а сами подвиды различаются вершинами, определяющими невыпуклость тетрагонов; для разновидностей $n(1), n(2), n(3), n(4)$ ($p_4 \in G_1, p_4 \in G_2, p_4 \in G_3, p_4 \in G_0$ соответственно) – вершины p_1, p_2, p_3, p_4 соответственно.

Тетроиды седьмой разновидности (третий подвид, $p_4 \in G_2^*$) являются выпуклыми (рис. 11; обозначаются С). Их П-образами являются выпуклые тетрагоны (В-тетрагоны), имеющие форму выпуклого четырехугольника с внутренностью, совпадающей с внутренностью его выпуклой оболочки, также имеющей форму выпуклого четырехугольника, а их диагонали $L^*(p_1, p_3)$ и $L^*(p_2, p_4)$ пересекаются.

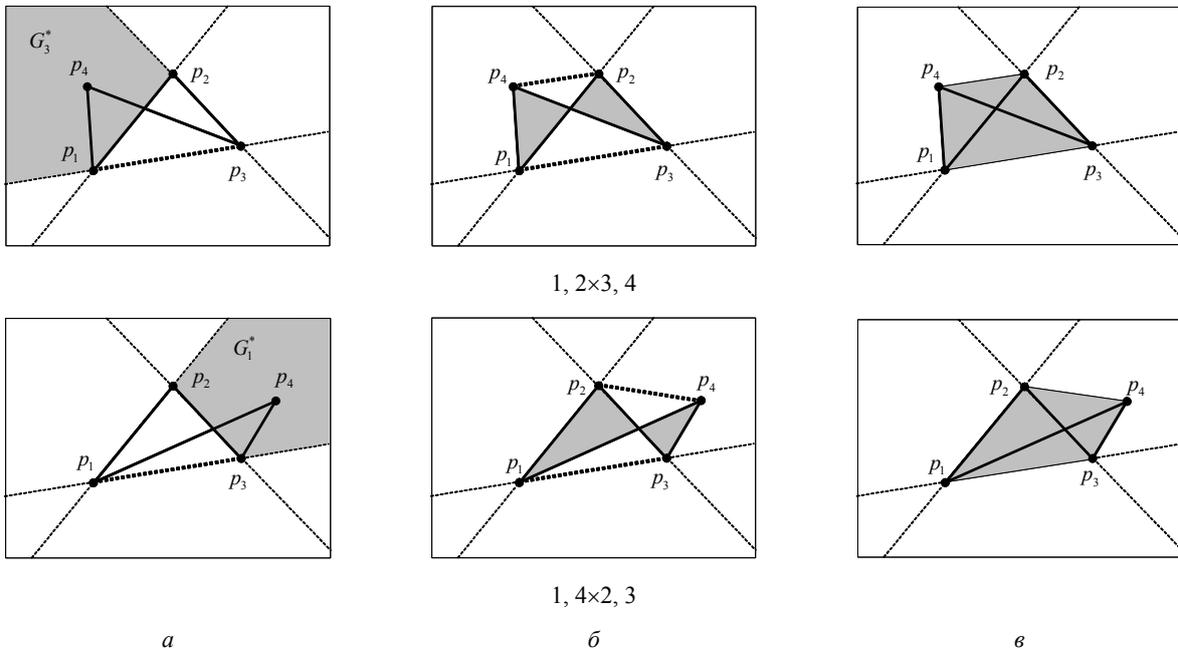


Рис. 9. П-образы (С-тетрагоны) и разновидности планарных самопересекающихся тетроидов вида P : а – область положений точки p_4 ; б – внутренность тетрагонов; в – выпуклая оболочка тетрагонов

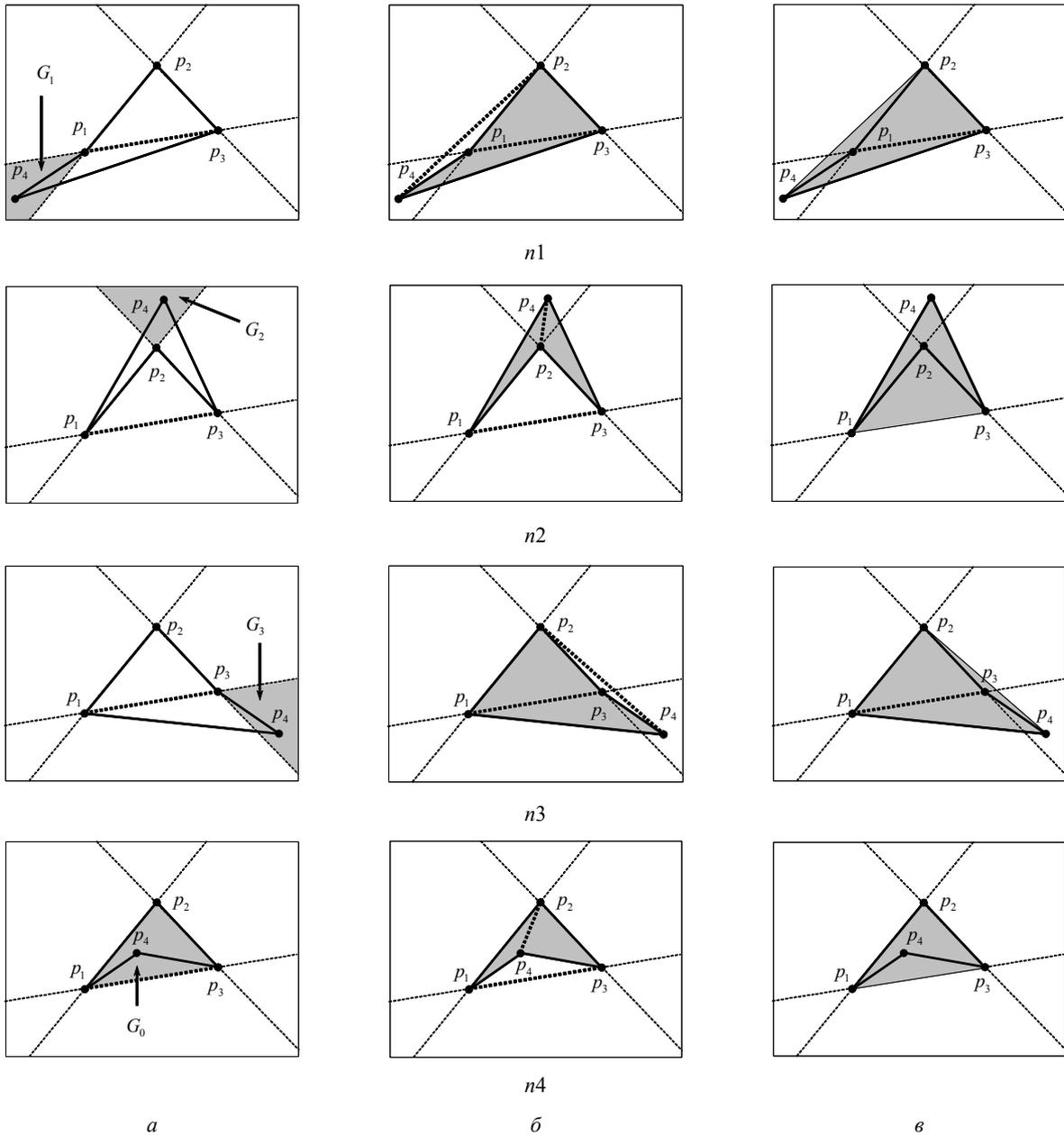


Рис. 10. П-образы (Н-тетрагоны) и разновидности планарных невыпуклых тетраидов вида P :
 а – область положений точки p_4 ; б – внутренность тетрагонов; в – выпуклая оболочка тетрагонов

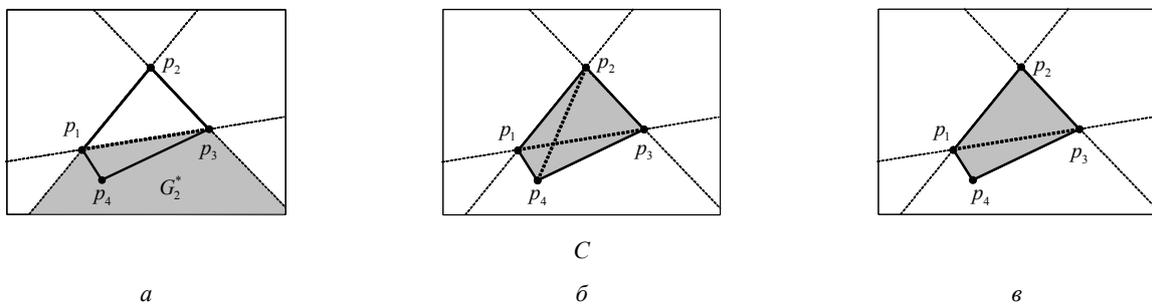


Рис. 11. П-образ (В-тетрагон) планарного выпуклого тетроида вида P :
 а – область положений точки p_4 ; б – внутренность тетрагона; в – выпуклая оболочка тетрагона

П-образом объемного тетроида $T(p_1, p_2, p_3, p_4)$ вида V является тетраэдр $\tau[p_1, p_2, p_3, p_4]$, вершины

которого совпадают с вершинами, а ребра – с ребрами и диагоналями тетроида. В отличие от планарных

тетроидов вида P , диагонали которых $L^*(p_1, p_3)$ и $L^*(p_2, p_4)$ лежат в одной плоскости и, следовательно, прямые $L(p_1, p_3)$ и $L(p_2, p_4)$ пересекаются, для объемных тетроидов эти прямые в пространстве R^3 являются скрещивающимися (если эти прямые параллельны, то объемный тетроид вырождается в планарный). Поэтому существуют две параллельные опорные плоскости $P_{1,3}$ и $P_{2,4}$, такие что $L(p_1, p_3) \subset P_{1,3}$ и $L(p_2, p_4) \subset P_{2,4}$.

Определение 4. Расстояние между опорными плоскостями $P_{1,3}$ и $P_{2,4}$ называется высотой объемного тетроида $T(p_1, p_2, p_3, p_4)$ (обозначается h).

Очевидно, что для объемных тетроидов $h > 0$, а для планарных тетроидов $h = 0$.

Определение 5. Планарный тетроид $T_{PS}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4)$, вершины которого $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4$ являются ортогональными проекциями, соответственно, вершин p_1, p_2, p_3, p_4 объемного тетроида $T(p_1, p_2, p_3, p_4)$ на плоскость P , параллельную опорным плоскостям $P_{1,3}$ и $P_{2,4}$, называется тенью этого тетроида.

Очевидно, что П-образ тени объемного тетроида в общем случае представляет собой соответствующий тетрагон $\Theta(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4)$. Поэтому виды, подвиды и разновидности объемных тетроидов, а также количество этих видов, подвидов и разновидностей,

определяются видами, подвидами и разновидностями их теней – планарных тетроидов (за исключением подвида Д-ломаных, которые не могут являться тенью объемных тетроидов).

Используются следующие названия и обозначения видов и подвидов объемных тетроидов (в обозначениях разновидностей объемных тетроидов используются обозначения разновидностей их теней, заключенные в скобки):

- тетроиды вида $V(d_2)$, П-образом которых является условно тригональный тетраэдр (УТ-тетраэдр), с тенью вида d_2P , П-образом которой является тригон;

- тетроиды вида $V(l_3)$, П-образами которых являются УТ-тетраэдры и условно квазитетрагональные тетраэдры (УК-тетраэдры), с тенью вида l_3 , П-образами которой являются, соответственно, тригоны и К-тетрагоны;

- тетроиды вида V , П-образами которых являются условно самопересекающиеся тетраэдры (УС-тетраэдры), условно невыпуклые тетраэдры (УН-тетраэдры) и условно выпуклые тетраэдры (УВ-тетраэдры), с тенью вида P , П-образами которой являются, соответственно, С-тетрагоны, Н-тетрагоны и В-тетрагоны.

На рис. 12 показаны образцы разновидностей различных видов и подвидов объемных тетроидов.

Полная номенклатура тетроидов, приведенная в таблице, содержит 4 типа, 11 видов, 18 подвидов и 86 разновидностей тетроидов.

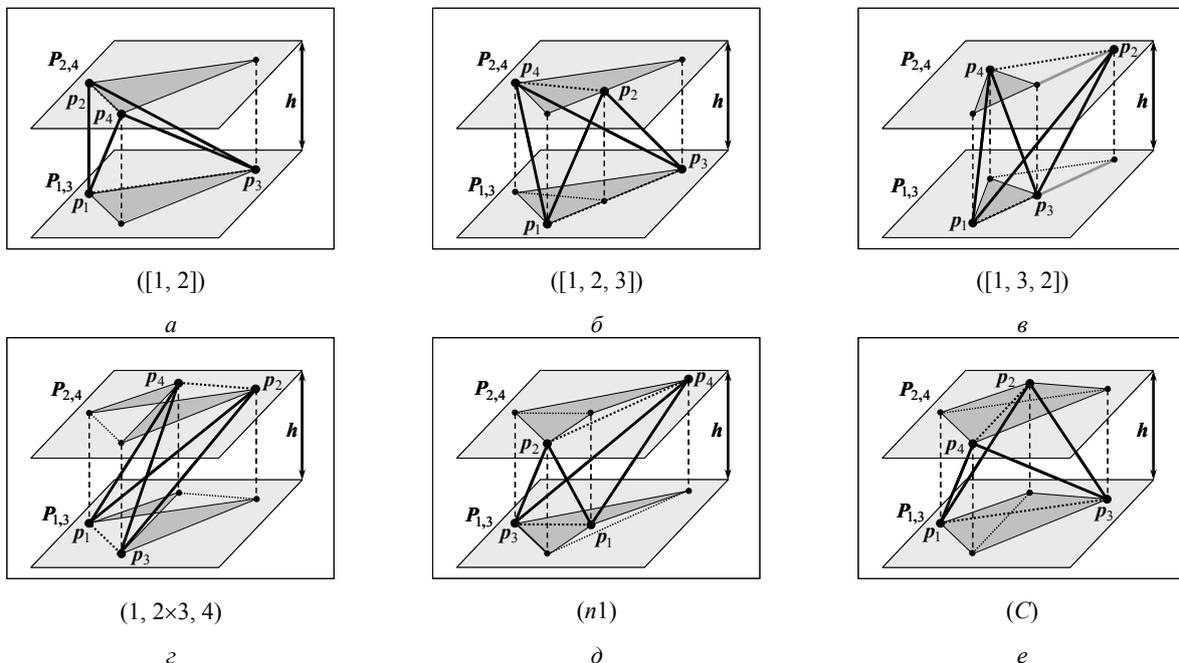


Рис. 12. П-образы (тетраэдры) объемных тетроидов и их тени на опорных плоскостях: а – УТ-тетраэдр вида $V(d_2)$; б – УТ-тетраэдр вида $V(l_3)$; в – УК-тетраэдр вида $V(l_3)$; з – УС-тетраэдр вида V ; д – УН-тетраэдр вида V ; е – УВ-тетраэдр вида V

Типы, виды и разновидности тетраэдов

		Характеристики тетраэдов		Кол-во
Типы	Виды	Разновидности	П-образы	
Точечные	d_4	(1,2,3,4)	точки	1
Общее количество разновидностей точечных тетраэдов				1
Линейные	d_3	(1,2,3), (2,3,4), (1,3,4), (1,2,4)	отрезки	4
	$d_{2,2}$	(1,2)(3,4), (1,4)(2,3), (1,3)(2,4)	отрезки	3
	d_2L	[(1,2),3,4], [(1,2),4,3], [3,(1,2),4], [(1,3),2,4], [(1,3),4,2], [2,(1,3),4], [(1,4),2,3], [(1,4),3,2], [2,(1,4),3], [(2,3),1,4], [(2,3),4,1], [1,(2,3),4], [(2,4),1,3], [(2,4),3,1], [1,(2,4),3], [(3,4),1,2], [(3,4),2,1], [1,(3,4),2]	отрезки	18
	L	[1,2,3,4], [1,2,4,3], [1,3,2,4], [1,4,2,3], [1,3,4,2], [1,4,3,2], [2,1,3,4], [2,1,4,3], [3,1,2,4], [4,1,2,3], [3,1,4,2], [4,1,3,2]	отрезки	12
Общее количество разновидностей линейных тетраэдов				37
Планарные	d_2P	(1,2), (2,3), (3,4), (1,4)	тригоны	4
		(1,3), (2,4)	Д-ломаные	2
	l_3	[1,2,3], [2,1,4], [1,4,3], [2,3,4]	тригоны	4
		[1,3,2], [1,2,4], [1,3,4], [2,4,3], [2,1,3], [1,4,2], [3,1,4], [3,2,4]	К-тетрагоны	8
	P	1,2×3,4, 2,3×1,4	С-тетрагоны	2
$n1, n2, n3, n4$		Н-тетрагоны	4	
	C	В-тетрагоны	1	
Общее количество разновидностей планарных тетраэдов				25
Объемные	$V(d_2)$	([1,2]), ([2,3]), ([3,4]), ([1,4])	УТ-тетраэды	4
		([1,2,3]), ([2,1,4]), ([1,4,3]), ([2,3,4])	УТ-тетраэды	4
	$V(l_3)$	([1,3,2]), ([1,2,4]), ([1,3,4]), ([2,4,3]), ([2,1,3]), ([1,4,2]), ([3,1,4]), ([3,2,4])	УК-тетраэды	8
		(1,2×3,4), (2,3×1,4)	УС-тетраэды	2
	V	($n1$), ($n2$), ($n3$), ($n1$)}	УН-тетраэды	4
C		УВ-тетраэды	1	
Общее количество разновидностей объемных тетраэдов				23
Общее количество разновидностей тетраэдов				86

Библиографические ссылки

1. Елкин С. Л., Мурынов А. И. Представление процессов формообразования, проецирования и анимации тел посредством TRN-модели // Изв. Тульск. гос. ун-та. Серия «Математика. Механика. Информатика». – Тула : Изд-во ТГУ, 2004. – Выпуск 10. – № 3. – С. 41–43.
 2. Елкин С. Л., Мурынов А. И. Процессы формообразования, проецирования и анимации объектов в интерактивных динамических трехмерных моделях // Проблемы тех-

ники и технологии телекоммуникаций : Материалы Пятой Междунар. науч.-техн. конф. – Самара : Изд-во ПГАТИ, 2004. – С. 75–77.
 3. Елкин С. Л., Мурынов А. И. Тетрагональная регулярная пространственная сеть как модель описания геометрико-топологических пространственных объектов размерности 3 // Информационные технологии в науке, социологии, экономике и бизнесе : Материалы 31-й Междунар. конф. – Украина ; Крым ; Ялта ; Гурзуф // Прилож. к журн. «Открытое образование». – 2004. – С. 84–86.

A. I. Murynov, DSc in Engineering, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
 L. N. Levitsky, PhD in Engineering, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
 O. N. Koshel, Master’s Degree Student, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Analysis of Elements of Tetrad Regular Networks for Forming Three-Dimensional Models of Spatial Objects

The paper describes the formalization of the tetrad concept as a cell of a tetrad regular network. The complete nomenclature of all possible types, kinds and versions of tetrads is defined that has the essential importance when analyzing the geometry and topology structure of modeled three-dimensional spatial objects.

Key words: model of a tetrad regular network, three-dimensional spatial objects, geometry and topology structure of modeled objects, tetrad.