

УДК 521.396

Р. А. Файзрахманов, доктор экономических наук, профессор, Пермский государственный технический университет
И. Н. Липатов, кандидат технических наук, доцент, Пермский государственный технический университет

ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОРМИРУЮЩЕГО ФИЛЬТРА

Рассматривается задача построения формирующего фильтра (ФФ), предназначенного для цифрового моделирования случайного процесса. ФФ реализован на ЦВМ. Приводятся результаты моделирования случайного процесса. Оценивается погрешность моделирования случайного процесса (погрешность оценивания корреляционной функции случайного процесса).

Ключевые слова: случайный процесс, цифровое моделирование, формирующий фильтр, корреляционная функция.

В настоящее время наблюдается постоянный рост сложности разрабатываемой аппаратуры и средств автоматизации исследований, систем формирования и обработки первичной информации. Одновременно повышаются требования к эффективности систем управления, применяемых в различных отраслях машиностроения, к сокращению сроков исследования и разработки автоматизированных систем управления.

Все это определяет необходимость применения методов моделирования на всех этапах разработки и испытаний сложных технических систем. Проведение моделирования с использованием математических, полунатурных и имитационных моделей позволяет во многих случаях проводить комплексное исследование систем, невозможное при натурных испытаниях, решать задачи исключительной сложности, недоступные аналитическим методам.

Воспроизведение в моделях случайных факторов событий, величин, процессов, полей приводит к статистическому моделированию. Статистическое моделирование широко применяется для решения научных и прикладных задач в различных областях науки и техники. Известны работы, посвященные развитию математических основ и прикладных аспектов метода статистического моделирования [1, 2]. В работе рассматривается моделирование случайного процесса с типовой корреляционной функцией, что представляет научный и практический интерес при генерации и исследовании различных процессов.

Решается задача цифрового моделирования случайного процесса $x(t)$ с использованием ФФ. Корреляционная функция (КФ) процесса $x(t)$ определяется соотношением [3]

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha_x |\tau|} \left(1 + \alpha_x |\tau| - 2\alpha_x^2 \tau^2 + \frac{1}{3} \alpha_x^3 |\tau|^3 \right), \quad (1)$$

где σ_x^2, α_x – соответственно, дисперсия и коэффициент нерегулярности случайного процесса $x(t)$.

Двухсторонняя спектральная плотность $S_x^*(\omega)$ процесса $x(t)$ определяется формулой [4]

$$S_x^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (2)$$

где ω – круговая частота, рад/с.

Подставим (1) в (2). Имеем [3]:

$$S_x^*(\omega) = \frac{32\sigma_x^2 \alpha_x}{1} \frac{\omega^4}{(\omega^2 + \alpha_x^2)^4}. \quad (3)$$

Представим формулу (3) в виде

$$S_x^*(\omega) = \frac{\sqrt{q} \cdot (j\omega)^2 \cdot \sqrt{q} \cdot (-j\omega)^2}{(j\omega + \alpha_x)^4 (-j\omega + \alpha_x)^4} C_0, \quad (4)$$

где $q = 32\sigma_x^2 \alpha_x$.

Здесь C_0 – интенсивность белого шума; $C_0 = 1$.

Запишем формулу (4) в виде

$$S_x^*(\omega) = |H(j\omega)|^2 \cdot S_v^*(\omega), \quad (5)$$

где

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega) \cdot H(-j\omega). \quad (6)$$

Из соотношений (4), (5), (6) имеем:

$$H(j\omega) = \sqrt{q} \frac{(j\omega)^2}{(j\omega + \alpha_x)^4}; \quad (7)$$

$$S_v^*(\omega) = C_0 = 1.$$

Здесь $H(j\omega)$ – передаточная функция ФФ; $S_v^*(\omega)$ – двухсторонняя спектральная плотность случайного процесса $v(t)$ типа белого шума.

Из (7) имеем:

$$H(s) = \sqrt{q} \frac{s^2}{(s + \alpha_x)^4}. \quad (8)$$

На рис. 1 показана схема ФФ. Здесь $h(t)$ – весовая функция ФФ.

Представим $H(s)$ в виде

$$H(s) = \frac{A_1}{(s + \alpha_x)^4} + \frac{A_2}{(s + \alpha_x)^3} + \frac{A_3}{(s + \alpha_x)^2} + \frac{A_4}{s + \alpha_x}. \quad (9)$$

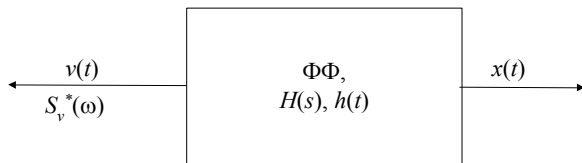


Рис. 1. Схема ФФ

Из (8), (9) получим систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов A_1, A_2, A_3, A_4 :

$$\left. \begin{aligned} A_4 &= 0, \\ A_3 + 3\alpha_x A_4 &= \sqrt{q}, \\ A_2 + 2\alpha_x A_3 + 3\alpha_x^2 A_4 &= 0, \\ A_1 + \alpha_x A_2 + \alpha_x^2 A_3 + \alpha_x^3 A_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Решив систему уравнений (10), получим:

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_x^2 \sqrt{q}; \\ A_2 &= -2\alpha_x \sqrt{q}; \\ A_3 &= \sqrt{q}; \\ A_4 &= 0. \end{aligned}$$

Из [5] имеем:

$$L^{-1} \left\{ \frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}} \right\} = t^n e^{-\alpha t}, \quad (11)$$

где $L^{-1}\{\dots\}$ – обратное преобразование Лапласа от выражения в фигурных скобках.

С учетом соотношения (11) получим:

$$L^{-1} \left\{ \frac{A_1}{(s + \alpha_x)^4} \right\} = A_1 \frac{t^3}{3!} e^{-\alpha_x t}; \quad (12)$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{A_2}{(s + \alpha_x)^3} \right\} = A_2 \frac{t^2}{2!} e^{-\alpha_x t}; \quad (13)$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{A_3}{(s + \alpha_x)^2} \right\} = A_3 \frac{t}{1!} e^{-\alpha_x t}. \quad (14)$$

Из (9) с учетом (12)–(14) определим весовую функцию ФФ:

$$h(t) = L^{-1} \{H(s)\} = \left(\frac{A_1}{6} t^3 + \frac{A_2}{2} t^2 + A_3 t \right) e^{-\alpha_x t}. \quad (15)$$

Из (15) получим:

$$\left. \begin{aligned} h[i] &= \left(\frac{A_1}{6} (i\Delta t)^3 + \frac{A_2}{2} (i\Delta t)^2 + A_3 (i\Delta t) \right) e^{-\alpha_x (i\Delta t)}, \\ & \quad i = 1, 2, \dots, \\ h_0 &= h[0] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где $h[i] = h(t_i)$; $t_i = i\Delta t$; Δt – интервал дискретности измерений случайного сигнала $v(t)$.

Сигнал $x[t]$ на выходе ФФ определяется формулой [6]

$$x(t) = \int_0^{\infty} h(\lambda) v(t - \lambda) d\lambda. \quad (17)$$

При реализации на ЦВМ формулы (17) выполним численное интегрирование по методу трапеций [7]:

$$x[i] = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{h[l]v[i-l] + h[l+1]v[i-l-1]}{2} \Delta t; \quad i = \overline{N+1, n_2}, \quad (18)$$

где N должно удовлетворять условию

$$|h[N]| \leq 0,01. \quad (19)$$

Здесь $h[l] = h(t_l)$; $t_l = l\Delta t$; $v[i-l] = v(t_{i-l})$; $t_{i-l} = (i-l)\Delta t$; $x[i] = x(t_i)$.

Случайная последовательность $v[i] = v(t_i)$, $i = \overline{1, n_2}$, есть дискретный белый шум с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_v^2 вида [1, 8]

$$\sigma_v^2 = \frac{C_0}{\Delta t}. \quad (20)$$

Таким образом, ФФ реализуется на ЦВМ с помощью формул (16), (18)–(20).

Для получения оценок $\hat{\sigma}_x^2, \hat{\alpha}_x$ параметров σ_x^2, α_x КФ вида (1) будем использовать оценку $\hat{K}_x(\tau)$ этой КФ, которая вычисляется по формулам [9]:

$$\hat{K}_x(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - \hat{m}_x][x(t + \tau) - \hat{m}_x] dt,$$

$$\hat{m}_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt,$$

где T – длина реализации сигнала $x(t)$; \hat{m}_x – оценка математического ожидания сигнала $x(t)$.

Формулы для оценки $\hat{K}_x(\tau_j) = \hat{K}_x(j\Delta t)$, $j = \overline{0, m}$, принимают вид [9]

$$\hat{K}_x(j) = \frac{1}{n_2 - m} \int_{i=1}^{n_2 - m} [x[i] - \hat{m}_x][x[i+j] - \hat{m}_x] dt,$$

$$\hat{m}_x = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} x[i],$$

где $\hat{K}_x[j] = \hat{K}_x(\tau_j)$, $\tau_j = j\Delta t$; $x[i+j] = x(t_{i+j})$; $x(t_{i+j}) = (i+j)\Delta t$.

Из формулы (1) имеем:

$$K_x[j] = \sigma_x^2 e^{-\alpha_x |j\Delta t|} \left(1 + \alpha_x |j\Delta t| - 2\alpha_x^2 |j\Delta t|^2 + \frac{1}{3} \alpha_x^3 |j\Delta t|^3 \right), \quad (21)$$

где $K_x[j] = K_x(\tau_j)$, $\tau_j = j\Delta t$, $j = \overline{0, m}$.

Определим оценку $\hat{\sigma}_x^2$ дисперсии σ_x^2 . Получим:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{K}_x[0].$$

Найдем оценку $\hat{\alpha}_x$ параметра α_x . Будем аппроксимировать $\hat{K}_x[j]$ выражением

$$\tilde{K}_x[j] = \hat{\sigma}_x^2 e^{-\hat{\alpha}_x(j\Delta t)} \times \left[1 + \hat{\alpha}_x(j\Delta t) - 2\hat{\alpha}_x^2(j\Delta t)^2 + \frac{1}{3}\hat{\alpha}_x^3(j\Delta t)^3 \right], \quad (22)$$

где $j = \overline{0, m}$; $\tilde{K}_x[j] = \tilde{K}_x(\tau_j)$, $\tau_j = j\Delta t$.

Введем обозначение

$$x_1[k_1] = \hat{\alpha}_x, \quad k_1 = 1, 2, \dots$$

Определим массив $\varepsilon_2[j]$ по формуле

$$\varepsilon[j] = \tilde{K}[j] - \hat{K}_x[j], \quad j = \overline{0, m}.$$

Определим величину d_1 :

$$d_1 = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \varepsilon_2^2[j].$$

Будем подбирать такое значение $\hat{\alpha}_x$, при котором $\sqrt{d_1}$ принимает минимальное значение. Введем массив $S_1[k_1] = \sqrt{d_1}$, $k_1 = 1, 2, \dots$. Следовательно, задача сводится к поиску минимального элемента в массиве $S_1[k_1]$, $k_1 = 1, 2, \dots$ и индекса $k_1 = k_1^*$ этого элемента. Предполагалось, что при $k_1 = 1$, $\hat{\alpha}_x = 0$. Осуществлялось синхронное изменение k_1 , $\hat{\alpha}_x$ и $x_1[k_1]$ по формулам:

$$k_1 = k_1 + 1; \quad \hat{\alpha}_x = \hat{\alpha}_x + 0,01; \quad x_1[k_1] = \hat{\alpha}_x,$$

т. е. k_1 , $\hat{\alpha}_x$ и $x_1[k_1]$ принимали значения

$$k_1 = 2; \quad \hat{\alpha}_x = 0,01; \quad x_1[2] = 0,01;$$

$$k_1 = 3; \quad \hat{\alpha}_x = 0,02; \quad x_1[3] = 0,02;$$

$$k_1 = 4; \quad \hat{\alpha}_x = 0,03; \quad x_1[4] = 0,03$$

и т. д. Изменение $\hat{\alpha}_x$ осуществлялось в диапазоне $0 \leq \hat{\alpha}_x \leq P_1$. При расчетах принималось $P_1 = 2\alpha_x$. В результате получены массивы $x_1[k_1]$, $S_1[k_1]$, $k_1 = \overline{1, k_6}$, где

$$k_6 = \frac{P_1}{0,01}.$$

При $P_1 = 1$, $k_1 = 100$.

Определение минимального элемента в массиве $S_1[k_1]$, $k_1 = \overline{1, k_6}$, и индекса этого элемента $k_1 = k_1^*$ позволяет из массива $x_1[k_1]$ при $k_1 = k_1^*$ извлечь то значение $\hat{\alpha}_x$, при котором обеспечивается наилучшая

аппроксимация $\hat{K}_x[j]$, $j = \overline{0, m}$, выражением (22). Таким образом, получена оценка $\hat{\alpha}_x$ параметра α_x .

Нормированная КФ $\rho_x[j]$, $j = \overline{0, m}$, соответствующая КФ $\hat{K}_x[j]$, определяется соотношением [9]

$$\rho_x[j] = \frac{K_x[j]}{K_x[0]} = \frac{K_x[j]}{\sigma_x^2}. \quad (23)$$

Функцию $\tilde{\rho}_x[j]$, $j = \overline{0, m}$, будем определять по формуле

$$\tilde{\rho}_x[j] = \frac{\tilde{K}_x[j]}{K_x[0]} = \frac{\tilde{K}_x[j]}{\sigma_x^2}. \quad (24)$$

Ошибка моделирования случайного процесса $x(t)$ определяется путем вычисления погрешности $\varepsilon[j]$, $j = \overline{0, m}$:

$$\varepsilon[j] = \tilde{\rho}_x[j] - \rho_x[j], \quad j = \overline{0, m},$$

где $\varepsilon[j]$ – расхождение между $\tilde{\rho}_x[j]$ и $\rho_x[j]$.

Оценка среднеквадратического значения $\hat{\sigma}_\varepsilon$ погрешности $\varepsilon[j]$, $j = \overline{0, m}$, определяется формулой

$$\hat{\sigma}_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m \varepsilon^2[i]}.$$

$$\text{Введем величину } r = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon}{\rho_x[0]} \cdot 100 \text{ \%}.$$

Коэффициент r означает, какой процент от $\rho_x[0]$ составляет оценка $\hat{\sigma}_\varepsilon$.

ФФ был реализован на ЦВМ. Предполагалось, что $\Delta t = 1$; $\sigma_x = 20$; $\alpha_x = 0,4$; $C_0 = 1$; $m = 30$; $n_2 = 900$. Было проведено 12 испытаний (опытов). В каждом испытании проводилось цифровое моделирование случайного процесса. Результаты этого моделирования приведены в таблице. Здесь i – номер испытания ($i = 1, 2, \dots, 11, 12$); $\hat{\sigma}_x^i$ – значение $\hat{\sigma}_x$ в i -м испытании; $\hat{\alpha}_x^i$ – значение $\hat{\alpha}_x$ в i -м испытании; $\hat{\sigma}_\varepsilon^i$ – значение $\hat{\sigma}_\varepsilon$ в i -м испытании.

Результаты цифрового моделирования случайного процесса

i	1	2	3	4	5	6
$\hat{\sigma}_x^i$	18,45	21,18	21,4	20,175	20,27	21,05
$\hat{\alpha}_x^i$	0,45	0,37	0,39	0,41	0,41	0,43
$\hat{\sigma}_\varepsilon^i$	0,058	0,053	0,042	0,008	0,009	0,031
$\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^i}{\rho_x[0]} \cdot 100 \text{ \%}$	5,8 %	5,3 %	4,2 %	0,8 %	0,9 %	3,1 %
i	7	8	9	10	11	12
$\hat{\sigma}_x^i$	19,75	20,314	19,345	20,19	19,945	20,52
$\hat{\alpha}_x^i$	0,4	0,41	0,35	0,37	0,42	0,38
$\hat{\sigma}_\varepsilon^i$	0,0066	0,0096	0,041	0,028	0,016	0,025
$\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^i}{\rho_x[0]} \cdot 100 \text{ \%}$	0,66 %	0,96 %	4,1 %	2,8 %	1,6 %	2,5 %

На рис. 2 показаны графики КФ $K_x[j]$, $\tilde{K}_x[j]$, $j = \overline{0, m}$, для испытания $i = 6$, рассчитанных по формулам (21), (22). На рис. 3 для испытания $i = 6$ приведены графики функций $\rho_x[j]$, $\tilde{\rho}_x[j]$, $j = \overline{0, m}$, вычисленные по формулам (23), (24).

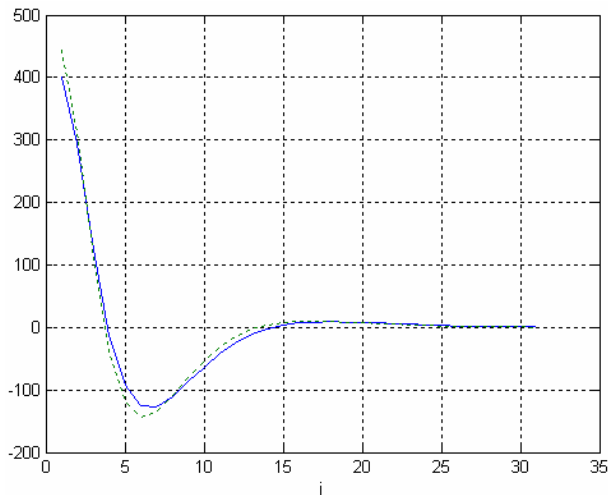


Рис. 2. Графики КФ: $K_x[j]$ – сплошная линия; $\tilde{K}_x(j)$ – пунктирная линия, $j = \overline{0, m}$

Таким образом, можно сделать следующий вывод: ФФ с достаточной точностью моделирует случайный процесс $x(t)$, описываемый КФ вида (1).

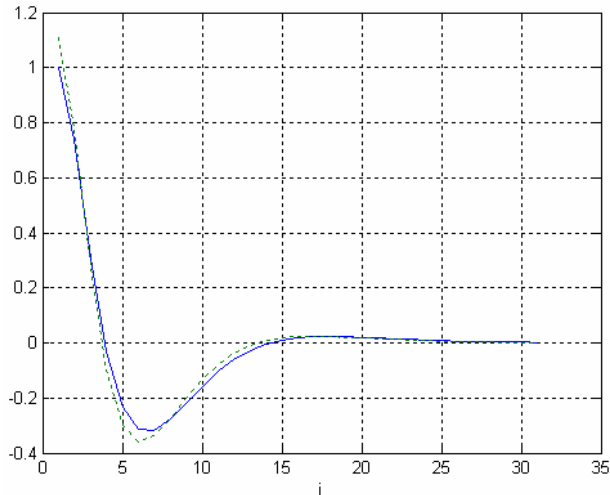


Рис. 3. Графики функций: $\rho_x[j]$ – сплошная линия; $\tilde{\rho}_x[j]$ – пунктирная линия, $j = \overline{0, m}$

Список литературы

1. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1971.
2. Шалыгин А. С., Палагин Ю. И. Прикладные методы статистического моделирования. – Л.: Машиностроение, 1986.
3. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1991.
4. Солодовников В. В. Статистическая динамика систем автоматического управления. – М.: Физматиз, 1960.
5. Математические основы теории автоматического управления: учеб. пособие. В 3 т. / В. А. Иванов [и др.] ;

под ред. Б. К. Чемоданова. – Т. 2. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008.

6. Бессонов А. А., Загайвили Ю. В., Маркелов А. С. Методы и средства идентификации динамических объектов. – М.: Энергоатомиздат, 1989.
7. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы: учеб. пособие. – М.: Наука, 1987.
8. Тихонов В. И., Харисов В. Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М.: Наука, 1991.
9. Росин М. Ф., Булыгин В. С. Статистическая динамика и теория эффективности систем управления. – М.: Машиностроение, 1981.

R. A. Fayzrakhmanov, Doctor of Economics, Professor, Perm State Technical University

I. N. Lipatov, Candidate of Technical Science, Associate Professor, Perm State Technical University

Digital Modelling of a Random Process Using Generating Filter

The problem of construction of shaping filters, realized on PC, for random process digital simulation is considered. The simulation results are given. The modeling error of a random process (correlation function) is estimated.

Key words: random process, digital modeling, shaping filter, correlation function.