

Далее с использованием программного обеспечения MATLAB мы можем преобразовать данные сигналы через ПИД-регулятор с параметрами  $K_p = C_1$ ,  $K_i = C_2$  и  $K_d = C_3$ .

На выходе мы получаем передаточную характеристику ПИД-регулятора:

$$W_p(s) = -0,3405 - 0,1714 \frac{1}{s} - 0,4354s.$$

Рассчитаем ПИД-регулятор с аperiodическим звеном.

В качестве исходных данных принимаем:

$$T_p = 7 \text{ с}; K_p = -59,035; K_i = 0,721; K_d = -2,487; T_j = 5 \text{ с}.$$

Определяем коэффициент пропорциональности  $K_p$ :

$$K_p = (T_m + T_3) / (T_j K_{дв}) = (1,4 + 0,14) / (T_j K_{дв});$$

$$T_m = t_p / 5 = 7 / 5 = 1,4;$$

$$T_3 = T_m / 10 = 0,14.$$

Тогда коэффициент усиления двигателя будет равен:

$$K_{дв} = (T_m + T_3) / (T_j K_p) = 1,54 / (-59,035 \cdot 5) = -0,0052;$$

$$K_i = 1 / (T_j K_{дв}) = 1 / (-59,035 \cdot 5) = -0,026;$$

$$K_d = T_m \cdot T_3 / (T_j K_{дв}) = 1,4 \cdot 0,14 / (5 \cdot (-0,0052)) = -7,538;$$

$$K_p = (1,4 + 0,14) / (5 \cdot (-0,0052)) = -59,23.$$

Передаточная характеристика ПИД-регулятора будет определяться по уравнению

$$W_p(s) = -59,23 - 0,026 \frac{1}{s} - 7,538s.$$

Получено 11.05.2016

## Вывод

Проведенные численные эксперименты на созданной имитационной модели позволили определить передаточную характеристику ПИД-регулятора, который может быть использован для управления электрическим двигателем при наведении ствола артиллерийского орудия на цель.

## Библиографические ссылки

1. Дьяконов В. П. Simulink 4 : Спец. справочник. – СПб. : Питер, 2002. – 528 с.
2. Морозов В. К. Моделирование информационных и динамических систем : учеб. пособие. – М. : Академия, 2011. – 384 с.
3. Советов Б. Я. Моделирование систем : учебник для бакалавров. – М. : Юрайт, 2012. – 343 с.
4. Рыкин О. Р., Чечурин Л. С. Теория автоматического управления. Основы анализа и синтеза линейных динамических систем : Лабораторный практикум в среде Матлаб 6.5. – СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2004. – 78 с.
5. Егунов Н. Д. Методы классической и современной теории автоматического управления : учебник для вузов : в 3 т. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000.
6. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
7. Колесов Ю. Б. Моделирование систем. Динамические и гибридные системы. – СПб. : БХВ-Петербург, 2006. – 224 с.
8. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа. – М. : Наука, 1976. – 544 с.
9. Красовский А. А. Справочник по теории автоматического управления. – М. : Наука, 1981. – 277 с.
10. Бенькович Е. С. Практическое моделирование динамических систем. – СПб. : БХВ-Петербург, 2002. – 464 с.

УДК 629.7.023:620.178.3

Р. В. Мормуль, НПО «Искра», Пермь

А. Н. Павлов, кандидат технических наук, доцент, Пермский военный институт внутренних войск МВД России

А. Н. Гладков, кандидат технических наук, Пермский военный институт внутренних войск МВД России

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВНУТРИБАЛЛИСТИЧЕСКИХ И ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ВЫХОДНОГО БЛОКА РДТТ С УЧЕТОМ СПЕЦИФИКИ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМАХ

Решение систем дифференциальных уравнений встречается во многих инженерных и научных задачах. В большинстве случаев алгоритмы решения подобных задач можно эффективно распараллелить для обработки на кластерном компьютере. В качестве примеров можно упомянуть такие задачи, как молекулярные модели сплошных сред в статистической физике, инженерные расчеты по распределению нагрузок в сложных конструкциях, (например, расчеты движения летательных аппара-

ратов, рабочие процессы в ракетных и авиационных двигателях), газодинамика сплошных сред (особенно если исследуется многокомпонентная среда), электродинамика и др. [1].

Однако следует учитывать, что параллельность задачи определяется не только ее физическим смыслом, но и выбранным численным алгоритмом. Например, всем известный метод прогонки практически не поддается распараллеливанию. Если единственный или предпочтительный метод решения

вашей задачи – метод прогонки, то затраты на распараллеливание алгоритма скорее всего превысят ожидаемый результат. С другой стороны, метод Монте-Карло идеально подходит для кластерного компьютера. Причем чем больше процессоров будет в кластере, тем эффективнее будет решаться задача. Практически все варианты явных разностных схем решения дифференциальных уравнений успешно распараллеливаются.

Исходя из всего вышесказанного можно утверждать, что использование кластера для решения задач механики деформируемого тела позволяет оптимизировать процесс расчета моделей сложных рабочих процессов при разработке перспективных конструкций ракетных двигателей твердого топлива (РДТТ).

Термоупругость является важным разделом механики деформируемого твердого тела, в котором обобщается теория упругости для неизотермической деформации. Она получила в последнее время значительное развитие в связи с важными задачами, возникающими при разработке перспективных конструкций ракетных двигателей твердого топлива (РДТТ). Объясняется это тем, что вопросы напряженно-деформируемого состояния, вызываемого неравномерным нагревом, имеют большое значение для анализа прочности и оптимального проектирования толщин углерод-углеродных композиционных материалов (УУКМ) тепловой защиты соплового блока РДТТ. Длительное высокотемпературное нагружение может вызвать появление трещин в элементах конструкции двигателя, уменьшение ее жестких характеристик, возникновение и развитие пластических деформаций.

Для адекватной оценки результатов дефектации ТЗП после огневых стендовых испытаний возникает необходимость «восстановления» глубины термической деструкции покрытия, соответствующей окончанию работы РДТТ. Одним из основных требований, предъявляемых к теплозащитным покрытиям, является уменьшение значений коэффициента температуропроводности, повышение эрозионной стойкости, увеличение запасов прочности несущих деталей энергетической установки.

Целью настоящей работы является разработка автоматизированного вычислительного алгоритма, позволяющего адекватно моделировать термоупруго-пластическое поведение выходного блока РДТТ при нестационарном, газодинамическом и высокотемпературном нагружении с учетом специфики вычислений на многопроцессорных системах.

Задача определения напряженно-деформированного состояния (НДС) элементов конструкции РДТТ от действия нестационарного температурного поля и давления является связанной. На первом этапе решается задача внутренней баллистики и распределения поля температуры с учетом уноса композиционных материалов при заданных граничных условиях, на втором – задача определения параметров НДС.

### Математическая постановка задачи внутренней баллистики

Полная система нестационарных дифференциальных уравнений газовой динамики для трехмерного трехфазного гомогенно-гетерогенного потока включает:

– уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{W}_1) = G_{gw} + G_{gb};$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{W}_2) = G_{pw};$$

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_3 \mathbf{W}_3) = G_{pb};$$

$$\frac{\partial(\rho_1 \varphi)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \varphi \mathbf{W}_1) = \varphi_w G_{gw} + \varphi_b G_{gb};$$

$$\varphi = k, c_p, \mu, \lambda, \alpha;$$

– закон сохранения импульса по осям координат:

$$\frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 v_1 \mathbf{W}_1) + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial r} =$$

$$= -\tau_r^{12} - \tau_r^{13} + W_{rw} G_{gw} + W_{rb} G_{gb};$$

$$\frac{\partial(\rho_1 w_1)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 w_1 \mathbf{W}_1) + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial z} =$$

$$= -\tau_z^{12} - \tau_z^{13} + W_{zw} G_{gw} + W_{zb} G_{gb};$$

$$\frac{\partial(\rho_2 v_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 v_2 \mathbf{W}_2) + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial r} = \tau_r^{12} + W_{rw} G_{pw};$$

$$\frac{\partial(\rho_2 w_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 w_2 \mathbf{W}_2) + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial z} = \tau_z^{12} + W_{zw} G_{pw};$$

$$\frac{\partial(\rho_3 v_3)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_3 v_3 \mathbf{W}_3) + \alpha_3 \frac{\partial p}{\partial r} = \tau_r^{13} + W_{rb} G_{pb};$$

$$\frac{\partial(\rho_3 w_3)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_3 w_3 \mathbf{W}_3) + \alpha_3 \frac{\partial p}{\partial z} = \tau_z^{13} + W_{zb} G_{pb};$$

– полной удельной энергии:

$$\frac{\partial(\rho_2 J_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 J_2 \mathbf{W}_2) = q_k^{12} + q_l^{12} + J_{p2} G_{pw};$$

$$\frac{\partial(\rho_3 J_3)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_3 J_3 \mathbf{W}_3) = q_k^{13} + q_l^{13} + J_{p3} G_{pb}.$$

График изменения относительного давления в камере сгорания РДТТ приведен на рис. 1.

Рассмотрим математическую модель решения задачи термоупругости с использованием метода конечных элементов (МКЭ) в объемной постановке.

При проведении теплового расчета используется уравнение нестационарной теплопроводности [2, 3]

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_{\text{эф}} \Delta T, \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $\rho$  – плотность материала тепловой защиты;  $T$  – поле температуры;  $\lambda_{\text{эф}}$  – эффективный

коэффициент температуропроводности;  $C$  – теплоемкость;  $\Delta = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}$  – оператор Лапласа в цилиндрической системе координат.

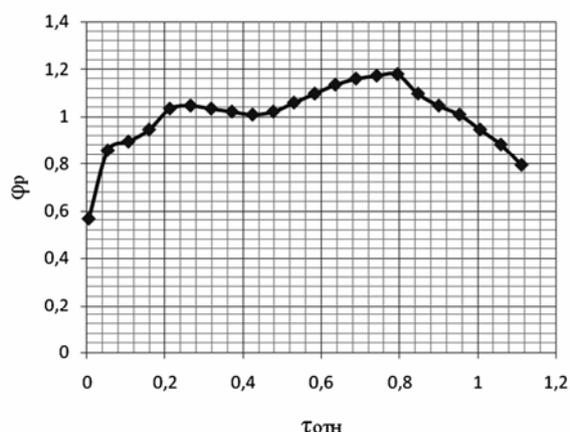


Рис. 1. График изменения относительного давления в КС от относительного времени  $\varphi_p(\tau_{отн})$

Начальным условием уравнения (1) служит равномерное распределение температуры по толщине многослойной стенки:

$$T(0, r, z) = T_H. \quad (2)$$

Граничным условием является баланс энергии на перемещающейся вследствие уноса стенке:

$$-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_w} = \frac{\alpha}{C_p} (I_e - I_w) + \xi_{эф} \sigma_{SB} (T_\infty^4 - T_w^4) + Q\dot{m}, \quad (3)$$

где  $\alpha$  – коэффициент конвективного теплообмена;  $C_p$  – удельная теплоемкость;  $\dot{m}$  – массовая скорость химического уноса;  $I_e, I_w$  – энтальпия продуктов сгорания при температурах восстановления и стенки;  $T_\infty$  – термодинамическая температура газового потока;  $T_w$  – температура газа у стенки;  $\xi_{эф}$  – эффективный коэффициент степени черноты;  $\sigma_{SB}$  – показатель Стефана – Больцмана;  $Q$  – тепловой эффект реакции горения твердого топлива.

На стыках слоев выполняются условия сопряжения:

$$T_{i+0} = T_{i-0}; \quad -\lambda_{i-0} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{i-0} = -\lambda_{i+0} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{i+0}. \quad (4)$$

Граничным условием на наружной поверхности последнего слоя является условие теплообмена с окружающей средой:

$$-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_k} = \alpha_H (T_H - T_{wH}) + \xi_{эф.н} \sigma_{SB0} (T_{\infty H}^4 - T_{wH}^4). \quad (5)$$

Расчет прогрева материалов выходного блока выполнен с помощью МКЭ для безразмерных моментов

времени  $\tau = \frac{t}{t_{max}} = 0,025; 0,23; 0,69; 1,00$  ( $t$  – текущее

время,  $t_{max}$  – время окончания работы РДТТ) представлен на рис. 1.

Решение задачи (1)–(5) получено МКЭ с использованием тетрагональных восьми узловых конечных элементов.

На рис. 2 представлено распределение поля температуры несущих деталей конструкции.

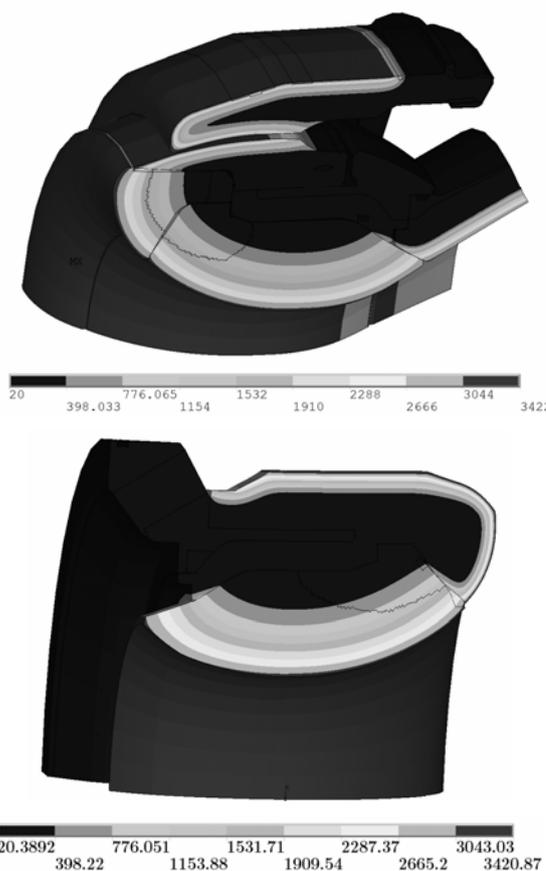


Рис. 2. Распределение поля температуры несущих деталей конструкции, °C

Для решения упругопластической граничной задачи также использовался МКЭ на базе вариационного подхода [4].

Упругие деформации и напряжения вычисляются с помощью известных соотношений теории упругости [5, 6]:

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \\ \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \epsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \end{cases} \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{E}{(1+\mu_r)(1-2\mu_r)} \left( (1-\mu)\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_z \right), \\ \sigma_\theta = \frac{E}{(1-\mu)(1-2\mu)} \left( (1-\mu)\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_z \right), \\ \sigma_z = \frac{E}{(1-\mu)(1-2\mu)} \left( (1-\mu)\varepsilon_z + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta \right), \\ \sigma_{rz} = \frac{E}{2(1-\mu)} \varepsilon_{rz}, \end{array} \right. \quad (7)$$

где  $E$  – модуль упругости;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}$  – соответственно, радиальные, окружные, осевые и сдвиговые деформации;  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{rz}$  – соответственно, радиальные, окружные, осевые и касательные напряжения.

Уравнение равновесия системы конечных элементов имеет вид

$$[K]\{\delta\} = \{R\}, \quad (8)$$

где  $[K]$  – матрица жесткости конструкции;  $\{\delta\}$  – вектор неизвестных;  $\{R\}$  – вектор нагрузки.

Матрицы жесткости конечного элемента определяются с использованием следующего соотношения:

$$[k]^e = 2\pi \int_S [B]^T [D][B] r dS, \quad (9)$$

где  $[B]$  – геометрическая матрица, используемая для связи деформаций и перемещений в конечном элементе, зависящая от типа конечного элемента;  $[D]$  – матрица упругости, зависящая от вида напряженного состояния.

Учитывая свойства анизотропии материалов и свойство симметрии матрицы  $[D]$ , получим:

$$[D] = \begin{vmatrix} \frac{E_r}{\nu} \left( 1 - \mu_r^2 \frac{E_z}{E_\theta} \right) & \frac{E_r}{\nu} \mu_r (1 + \mu_r) & \frac{E_r}{\nu} \mu_r \left( 1 + \mu_r \frac{E_z}{E_\theta} \right) & 0 \\ \frac{E_r}{\nu} \mu_r (1 + \mu) & \frac{E_\theta}{\nu} \left( 1 - \mu_\theta^2 \frac{E_r}{E_z} \right) & \frac{E_r}{\nu} \mu_z \left( 1 + \mu_z \frac{E_z}{E_\theta} \right) & 0 \\ \frac{E_r}{\nu} \mu_r \left( 1 + \mu_r \frac{E_z}{E_\theta} \right) & \frac{E_r}{\nu} \mu_r \left( 1 + \mu_r \frac{E_r}{E_z} \right) & \frac{E_z}{\nu} \left( 1 - \mu_z^2 \frac{E_r}{E_\theta} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{rz} \end{vmatrix}, \quad (10)$$

где  $E_r, E_\theta, E_z, \mu_r, \mu_\theta, \mu_z$  – модули упругости и коэффициенты Пуассона в радиальном, кольцевом и осевом направлениях соответственно;  $G_{rz}$  – модуль сдвига;  $\nu = 1 - \mu_r^2 \left( \frac{E_r}{E_z} + \frac{E_z}{E_\theta} \right) - \mu_r^2 \frac{E_r}{E_\theta} (1 + 2\mu_r)$ .

Температурные напряжения и деформированная форма конструкции при неравномерном нагреве рассчитаны с помощью МКЭ [6]. Матрицы жесткости элементов в термоупругих задачах имеют тот же вид, что и при силовом воздействии на систему, но необходимо учитывать дополнительные температурные деформации, возникающие при действии тепловых нагрузок [7].

Вектор температурных деформаций определяется следующим образом:

$$\{\varepsilon_0\} = \{\alpha_T\} T, \quad (11)$$

где  $\{\alpha_T\} = \{\alpha_r, \alpha_\theta, \alpha_z\}^T$  – вектор линейного теплового расширения.

Тензоры полных деформаций и напряжений определяются соотношением

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^e + \tilde{\varepsilon}^p + \tilde{\varepsilon}^T, \\ \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^e + \tilde{\sigma}^p + \tilde{\sigma}^T, \end{array} \right. \quad (12)$$

где  $\tilde{\varepsilon}^e, \tilde{\varepsilon}^p, \tilde{\varepsilon}^T$  – тензоры упругих, пластических и тепловых деформаций;  $\tilde{\sigma}^e, \tilde{\sigma}^p, \tilde{\sigma}^T$  – тензоры упругих, пластических и тепловых напряжений соответственно.

Критерий прочности несущих деталей конструкции определяется соотношением

$$\eta_{\min} = \frac{\sigma_B(T)}{\sigma_{\max}} > 1, \quad (13)$$

где  $\eta_{\min}$  – минимальный коэффициент запаса прочности;  $\sigma_B(T)$  – предел прочности материалов конструкции в зависимости от температуры нагрева;  $\sigma_{\max} = \max\{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_i\}$  – максимум среди расчетных напряжений.

При реализации численного кода использовалась методика распараллеливания алгоритма на 8 ядер. На рис. 3 визуализирована хронология загрузки центрального процессора (ЦП) и использования физической памяти.

#### Вывод

В заключение следует отметить, что разработанный автоматизированный вычислительный алгоритм позволяет корректно исследовать динамику термоупругопластического поведения выходного блока РДТТ. Использование данной методики численного моделирования с применением процедуры распараллеливания кода в рамках решения связанной задачи термоупругопластичности на этапе эскизного и конструкторского проектирования позволит приблизительно в 5-8 раз сократить время выполнения расчета прочности.

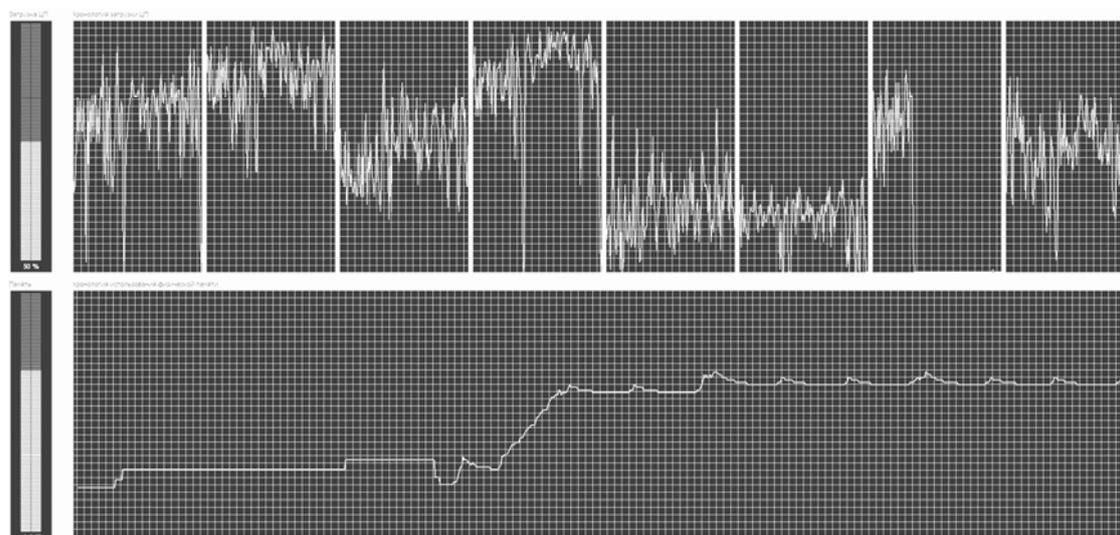


Рис. 3. Хронология загрузки центрального процессора и использования физической памяти

**Библиографические ссылки**

1. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
2. Газодинамические и теплофизические процессы в ракетных двигателях твердого топлива / А. М. Губертов, В. В. Миронов, Д. М. Борисов, В. Н. Баскаков ; под ред. акад. А. С. Коротеева. – М. : Машиностроение, 2004.
3. Композиционные материалы : справочник / под ред. акад. В. В. Васильева. – М. : Машиностроение, 1990.

4. Суменков Н. Г., Еришова Н. Н. Программа расчета теплозащиты осесимметричных каналов сложной формы с учетом дополнительного мгновенного внутреннего тепловыделения и внешних потоков различной природы. Шифр программы ПТ065 / ОАО «НПО "ИСКРА"». – Пермь, 2003.
5. Сегерлинд Л. Указ. соч.
6. Лурье А. И. Теория упругости. – М. : Наука, 1970. – 940 с.
7. Коваленко А. Д. Термоупругость. – Киев : Вища шк., 1975. – 215 с.

Получено 11.05.2016

УДК 621.735.3:621.983.31

**П. М. Винник**, кандидат физико-математических наук, доцент, Балтийский государственный технический университет «Военмех» имени Д. Ф. Устинова, Санкт-Петербург  
**К. М. Иванов**, доктор технических наук, профессор, Балтийский государственный технический университет «Военмех» имени Д. Ф. Устинова, Санкт-Петербург  
**Г. А. Данилин**, доктор технических наук, профессор, Балтийский государственный технический университет «Военмех» имени Д. Ф. Устинова, Санкт-Петербург

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
 ФОРМИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ДЕТАЛЕЙ,  
 ИЗГОТОВЛЕННЫХ ВЫТЯЖКОЙ С УТОНЧЕНИЕМ СТЕНКИ**

Современные задачи технологической подготовки предъявляют более жесткие требования к математическому аппарату моделирования процессов штамповки. Математические модели, используемые в современных системах технологической подготовки производства, должны быть комплексными и прогнозировать параметры качества изделия с заданной достоверностью.

С позиций разработанной в БГТУ «Военмех» информационно-системной идеологии [1] цели технологической подготовки производства задаются как области допустимых значений (ОДЗ) параметров

$KX_{ij}$ , контролируемых в производстве, принадлежность которым соответствует достижению цели, и ущербов  $E_v(KX_{ij})$  (определяются с учетом назначения детали) для всех  $v$  различных возможностей непопадания вектора параметров в область  $\left\{ KX_{ij} \in [KX_{ij}]_{\gamma_{ij}} \mid i = 1, n; j = 1, m \right\}$  ( $n$  – число параметров;  $m$  – число этапов технологического процесса;  $[KX_{ij}]_{\gamma_{ij}}$  – границы допустимых значений  $KX_{ij}$ ,