МАТЕМАТИКА

УДК 62-504

С. П. Зубова, доктор физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет
Д. А. Литвинов, аспирант, Воронежский государственный университет; Воронежский государственный университет инженерных технологий

ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ И ЧАСТИЧНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Для динамической системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Du(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, A и B – постоянные матрицы соответствующих размеров, $t \in [0, T]$, ставится задача построения управляющей вектор-функции $u(t)$ и функции состояния системы $x(t)$, удовлетворяющих уравнению (1) и следующим условиям:

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T, \tag{2}$$

$$u(0) = 0, \quad u(T) = 0 \tag{3}$$

с некоторыми x_0, x_T из R^n. Кроме того, требуется найти такое d, что при выполнении неравенств

$$\|x_0\| \le d, \quad \|x_T\| \le d \tag{4}$$

выполняется ограничение для l-й компоненты функции $u(t)$

$$|u_l(t)| \le c \tag{5}$$

с некоторым заданным c. Здесь $\|x\| = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$.

Динамическая система предполагается полностью управляемой, то есть существует управление $u(t)$, под воздействием которого состояние $x(t)$ системы переводится из произвольной начальной точки $x(0) = x_0$ в произвольную конечную точку $x(T) = x_T$ за время $t \in [0, T]$.

Поставленное в задаче ограничение (5) актуально в связи с тем, что в реальных условиях функция управления должна удовлетворять определенным ограничениям. Например, угол отклонения элеронов самолета, отвечающий за управление движением, является ограниченным. Однако при произвольных $x(0)$, $x(T)$ ограничение (5) может быть недостижимым. Поэтому задача, решаемая в данной статье, состоит в том, чтобы найти ограничения (4) на начальное и конечное состояния, гарантирующие выполнение условия (5).

Решением задач управления с различными ограничениями на функцию управления занимались многие ученые. Значительные результаты были достигнуты разными методами академиком Черноусько Ф. Л. [1], профессорами Каменецким В. А. [2], Коробовым В. И. [3], их учениками и др.

В данной работе, в отличие от большинства работ, посвященных решению задач управления с условиями для функции управления, эти функции управления ищутся не как функции обратной связи. Они строятся непрерывными, достаточно гладкими. Для решения поставленной задачи, используется метод каскадной декомпозиции, разработанный в [4].

Рассматривается, какие ограничения на краевые условия являются достаточными для решения поставленной задачи.

Нахождение ограничений на краевые значения функции состояния системы

Выясним, при каких краевых условиях (2) выполняется ограничение (5). Решая задачу (1)–(3) методом каскадной декомпозиции, описанным в [4], получаем функцию $u_l(t)$ в виде

$$u_l(t) = \varphi_1(t)x_1^0 + \ldots + \varphi_n(t)x_n^0 + \varphi_{n+1}(t)x_1^T + \ldots + \varphi_{2n}(t)x_n^T, \tag{6}$$

где $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, 2n}$, – некоторые функции, принадлежащие классу линейно независимых достаточно гладких функций, производные которых принадлежат этому же классу; x_i^0 – компоненты в R^n вектора x_0; x_i^T – компоненты вектора x_T.

Функцию $u_l(t)$ в виде (6) можно получить следующим образом. Из равенства (6) следует, что $\varphi_1(t) = u_l(t)$ при $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 0$, $x_n^0 = 0$, $x_1^T = 0$, …, $x_2^T = 0$, …, $x_n^T = 0$. Поэтому $\varphi_1(t)$ является решением задачи управления с написанными выше условиями. Наличие большого количества нулей в краевых условиях значительно упрощает решение такой задачи методом каскадной декомпозиции.

Аналогично, $\varphi_2(t)$ является решением задачи управления при $x_1^0=0,\ x_2^0=1,\ \ldots,\ x_n^0=0,\ x_1^T=0,$ $x_2^T=0,\ \ldots,\ x_n^T=0$. Действуя таким образом далее, находим все функции $\varphi_i(t)$, $i=\overline{1,2n}$, и определяем функцию $u_l(t)$ в виде (6). Краевые условия на функцию управления нулевые и поэтому не представлены в равенстве (6).

Сделаем следующую оценку:

$$\begin{gathered}|u_l(t)|=\\ =\left|\varphi_1(t)x_1^0+\ldots+\varphi_n(t)x_n^0+\varphi_{n+1}(t)x_1^T+\ldots+\varphi_{2n}(t)x_n^T\right|\le\\ \le|\varphi_1(t)||x_1^0|+\ldots+|\varphi_n(t)||x_n^0|+|\varphi_{n+1}(t)||x_1^T|+\ldots+|\varphi_{2n}(t)||x_n^T|\le\\ \le(|\varphi_1(t)|+\ldots+|\varphi_n(t)|)\|x_0\|+(|\varphi_{n+1}(t)|+\ldots+|\varphi_{2n}(t)|)\|x_T\|\le\\ \le(|\varphi_1(t)|+\ldots+|\varphi_n(t)|+|\varphi_{n+1}(t)|+\ldots+|\varphi_{2n}(t)|)\times\\ \times\max(\|x_0\|,\|x_T\|)\le\\ \le\max_{t\in[0,T]}(|\varphi_1(t)|+\ldots+|\varphi_n(t)|+|\varphi_{n+1}(t)|+\ldots+|\varphi_{2n}(t)|)\times\\ \times\max(\|x_0\|,\|x_T\|).\end{gathered}$$

Для того чтобы выполнялась оценка (5), достаточно выполнения следующего неравенства:

$$\max_{t\in[0,T]}\left(\sum_{i=1}^{2n}|\varphi_i(t)|\right)\max(\|x_0\|,\|x_T\|)\le c. \tag{7}$$

Обозначим

$$M=\max_{t\in[0,T]}\left(\sum_{i=1}^{2n}|\varphi_i(t)|\right). \tag{8}$$

Для выполнения неравенства (7) достаточно, с учетом (8), выполнения следующего неравенства:

$$\max(\|x_0\|,\|x_T\|)\le\frac{c}{M},$$

или

$$\|x_0\|\le\frac{c}{M}\ \text{и}\ \|x_T\|\le\frac{c}{M}.$$

С учетом представленной выше нормы элементов для выполнения оценки (5) достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\left|x_i^0\right|\le\frac{c}{M},\quad\left|x_i^T\right|\le\frac{c}{M},\ 1\le i\le n, \tag{9}$$

то есть $d=\dfrac{c}{M}$.

Однако существует и второй вариант оценки, который в некоторых случаях дает лучший результат. Известна лемма Абеля [5], доказанная для постоянных чисел a_i и b_i. Распространим данную лемму на случай, где роль a_i, $i=\overline{1,2n}$, играют компоненты краевых значений $x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ x_1^T,\ x_2^T,\ \ldots,\ x_n^T$, расставленные в порядке возрастания. Обозначим их теперь x_i^*, $i=\overline{1,2n}$. В качестве b_i выступают функции $\varphi_i(t)$ из (6), взятые в том же порядке, что и соответствующие им компоненты краевых значений. Обозначим их $\varphi_i^*(t)$.

Пусть B таково, что

$$\left|\sum_{i=1}^{s}\varphi_i^*(t)\right|\le B,\ \forall(t\in[0,T]),\ \forall(s:1\le s\le 2n).$$

Тогда справедливо неравенство

$$|u_l(t)|=\left|\sum_{i=1}^{2n}\varphi_i^*(t)x_i^*\right|\le B(|p|+2|q|),$$

где $p(q)$ – наименьшее (наибольшее) из $x_i^0,\ x_i^T,\ i=\overline{1,2n}$.

Заменим последнее неравенство следующим:

$$|u_l(t)|\le B\left(3\max_{1\le i\le n}\left(\left|x_i^0\right|,\left|x_i^T\right|\right)\right)=c,$$

откуда

$$\max_{1\le i\le n}\left(\left|x_i^0\right|,\left|x_i^T\right|\right)=\frac{c}{3B},$$

или $d=\dfrac{c}{3B}$.

То есть для получения оценки (5) достаточно следующих ограничений:

$$\left|x_i^0\right|\le\frac{c}{3B},\ |\left|x_i^0\right|\le\frac{c}{3B},\ 1\le i\le n. \tag{10}$$

Для каждой конкретной задачи нужно выбирать, какое из двух ограничений, (9) или (10), будет менее обременительно.

В работе [4] функции управления и состояния строятся с использованием шаблонов вида $\sum\limits_{k=1}^{s}a_k\varphi_k(t)\in\Lambda$, то есть $u(t)=\sum\limits_{k=1}^{s}b_k\varphi_k(t)$, $x(t)=\sum\limits_{k=1}^{s}d_k\varphi_k(t)$, с векторными коэффициентами a_k, b_k и d_k, где Λ – множество скалярных функций специального вида, являющееся линейным многообразием, а сами функции обладают следующим свойством:

$$f(t)\in\Lambda\Rightarrow\frac{d}{dt}f(t)\in\Lambda.$$

При подборе подходящего шаблона для компонентов $x_i(t)$, $u_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, использовались шаблоны

$$\sum_{k=1}^{s}\frac{c_k}{(2T-t)^k},\quad\sum_{k=1}^{s}c_ke^{-kt},\quad\sum_{k=1}^{s/2}(c_k\sin kt+d_k\cos kt)$$

со скалярными коэффициентами c_k, d_k. При помощи тестирования на компьютере был выбран третий шаблон, так как на основании решения задач с разными шаблонами был сделан вывод, что числа M и B, фигурирующие в (9) и (10), получаются наименьшими при решении поставленной задачи методом каскадной декомпозиции именно с помощью использования тригонометрических функций, и ограничения (9) и (10) получаются менее жесткими, что расширяет круг решаемых задач.

Условия (9) и (10), однако, являются всего лишь достаточными условиями ограниченности функции управления. Взяв какие-либо краевые условия, удовлетворяющие неравенству (9) или (10), и решив задачу методом каскадной декомпозиции, можно заметить, что нужный компонент функции управления $u_l(t)$ на отрезке $[0, T]$ по модулю значительно меньше, чем требуется, т. е. поставлены слишком жесткие ограничения на краевые условия для функции состояния системы. Поэтому условия (9) или (10) в таком случае можно смягчить.

Улучшение оценки для краевых значений состояния системы

Если для компоненты $u_l(t)$, построенной для задачи с краевыми условиями, удовлетворяющими оценке (9) или (10), получено неравенство $\left|u_l(t)\right| \le \dfrac{c}{\alpha}$, $t \in [0, T]$, где $\alpha > 1$, то соответствующие ограничения можно смягчить, взяв вместо условий (2) условия

$$x(0) = \alpha x_0, \quad x(T) = \alpha x_T. \qquad (11)$$

Действительно, если $w_l(t)$ есть l-я компонента управляющей функции $u(t)$, удовлетворяющая условиям (11), то

$$\begin{aligned}
&\left|w_l(t)\right| = \\
&= \left|\varphi_1(t)\alpha x_1^0 + \ldots + \varphi_n(t)\alpha x_n^0 + \varphi_{n+1}(t)\alpha x_1^T + \ldots + \varphi_{2n}(t)\alpha x_n^T\right| \le \\
&\le \alpha\left|\varphi_1(t) x_1^0 + \ldots + \varphi_n(t) x_n^0 + \varphi_{n+1}(t) x_1^T + \ldots + \varphi_{2n}(t) x_n^T\right| = \\
&= \alpha\left|u_l(t)\right| \le \alpha\frac{c}{\alpha} = c.
\end{aligned}$$

Таким образом, показано, как можно найти условия, достаточные для того, чтобы сделать нужный компонент функции управления линейной стационарной динамической системой ограниченным по модулю. Более того, показана возможность корректировки краевых значений функции состояния системы, а также поиска оптимального шаблона. Таким образом можно решать достаточно широкий класс задач техники, экономики и других сфер деятельности. При этом функции управления находятся, в отличие от результатов других авторов, в непрерывном виде, что исключает наличие точек переключения.

Получено 14.03.2016

Библиографические ссылки

1. *Черноусько Ф. Л.* Управление системой с одной степенью свободы при сложных ограничениях // Прикладная математика и механика. – 1999 . – Т. 63, Вып. 5. – С. 707–715.

2. *Каменецкий В. А.* Синтез ограниченного управления для *n*-кратного интегратора // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 6. – С. 33–40.

3. *Коробов В. И.* Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Матем. сб. – 1979. – Т. 109(151), № 4(10). – С. 582–606.

4. *Зубова С. П.* О критериях полной управляемости дескрипторной системы. Полиномиальное решение задачи управления при наличии контрольных точек // Автомат. и телемех. – 2011. – № 1. – С. 27–41.

5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. – Физматлит, 2003. – Т. 2. – 335 с.

УДК 51.77

М. А. Сполохова, аспирант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова
С. Б. Пономарев, доктор медицинских наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова
М. Е. Вострокнутов, аспирант, Ижевская государственная медицинская академия
И. А. Саркисян, магистрант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПРОГНОЗА РАЗВИТИЯ СПИДа У ВИЧ-ИНФИЦИРОВАННЫХ ПАЦИЕНТОВ

Известно, что вопросы прогнозирования развития финальной стадии ВИЧ-инфекции – синдрома приобретенного иммунодефицита (СПИД) – на сегодня разработаны явно недостаточно [1, 2] в связи с наличием большого числа параметров, влияющих на течение ВИЧ-инфекции [3, 4, 5, 6]. Особенно актуально это для мест лишения свободы, где имеется немало специфических факторов, которые могут ускорить время развития СПИДа [7].

Целью исследования явилась разработка метода прогноза развития СПИДа у ВИЧ-инфицированных пациентов посредством математической зависимости.