ному в источнике [1], образуя с ним общий метод расчета индуцируемых боковых сил для степеней нерасчетности инжектируемой струи $n > 1$.

Список литературы

1. Органы управления вектором тяги ТТР: расчет, конструктивные особенности, эксперимент / Р. В. Антонов, В. И. Гребёнкин, Н. П. Кузнецов и др. ; под ред. Н. П. Кузнецова. – М. : Ижевск : Регуляр. и хаотич. динамика, 2006. – 552 с.

2. Исследование сверхзвуковых течений со срывными зонами // Обзор ОНТИ ЦАГИ. – 1974. – № 437. – 185 с.

3. *Сафонов В. П.* Исследование плоского сверхзвукового течения на пластине около щитка или вдуваемой струи // Труды ЦИАМ / Центр. ин-т авиац. моторостроения им. П. И. Баранова ; № 499. – М., 1971. – 12 с.

* * *

R. V. Antonov, Candidate of Technical Sciences, Senior Research Scientist, Izhevsk State Technical University

Subsonic Injection into Incoming Supersonic Flow

For the first time the method of calculation of parameters of interaction of a round subsonic stream of gas with a running turbulent supersonic flow is developed. The method is based on the joint solution of problems on pressure definition on forward and back borders of a lateral stream.

Keywords: supersonic stream, stream, injection

Получено 12.04.10

УДК 519.615

В. М. Вержбицкий, кандидат физико-математических наук, профессор;
И. Ф. Юманова, студентка
Ижевский государственный технический университет

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ МЕТОДА ВЕГСТЕЙНА УСКОРЕНИЯ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Пошаговой параметризацией метода простых итераций получен новый метод решения нелинейных скалярных уравнений. Найдены условия квадратичной сходимости предложенного метода. Приведены результаты численного сравнения с методами Вегстейна и Ньютона.

Ключевые слова: скалярное уравнение, неподвижная точка, аналог метода Вегстейна, квадратичная сходимость

Одним из фундаментальных и хорошо изученных итерационных методов решения уравнений разной природы является метод простых итераций, опирающийся на известный принцип сжатых (иначе сжимающих) отображений. Уравнение представляется в виде

$$x = \varphi(x), \tag{1}$$

где φ интерпретируется как некоторое отображение элементов x некоторого заданного пространства в элементы того же пространства. Решить данное уравнение – это значит найти такой элемент ξ заданного пространства, который при преобразовании посредством отображения φ остается неизменным:

$$\xi = \varphi(\xi). \quad (2)$$

Этот элемент ξ называют неподвижной точкой отображения φ, а уравнение вида (1) – задачей о неподвижной точке. Простейший процесс построения последовательности приближений к неподвижной точке определяется формулой

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \quad (3)$$

что и называют методом последовательных приближений или методом простых итераций (далее – МПИ). Имеется много утверждений, устанавливающих сходимость элементов итерационной последовательности (x_k) к искомому элементу ξ. Подобные утверждения носят как самый общий характер (для абстрактных операторов в абстрактных пространствах), так и весьма конкретный, позволяющий использовать их непосредственно в вычислительной практике. В любом случае

1) теоремы сходимости для МПИ (3), как правило, одновременно являются и теоремами существования и единственности;

2) условия, выставляемые в теоремах сходимости, являются только достаточными; необходимые требования к φ для сходимости МПИ известны только для линейных отображений;

3) оценки близости значений x_k к ξ квалифицируют МПИ (3) как линейно сходящийся процесс, причем величина знаменателя геометрической прогрессии, характеризующая быстроту сходимости в рамках методов первого порядка, существенно зависит от константы сжатия отображения φ.

Последнее наблюдение подсказывает направление поиска способа ускорения сходимости МПИ в таком преобразовании отображения φ, которое усиливало бы его сжимающие свойства. Согласно, например, [1], это можно сделать введением вещественного параметра $\lambda \in (0, 1]$, приводящего к итерационному процессу вида

$$x_{k+1} = \lambda\, \varphi(x_k) + (1-\lambda)\, x_k\,,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \quad (4)$$

частным случаем которого является МПИ (3) при $\lambda = 1$. Встает вопрос о выборе оптимального значения параметра λ, т. е. такого $\lambda_{\text{опт}}$, при котором определяемая процессом (4) последовательность сходилась бы к неподвижной точке ξ наиболее быстро (разумеется, в предположении ее существования). Способ получения значения, близкого к $\lambda_{\text{опт}}$, был описан в работе Дж. Вегстейна [2] для случая, когда φ – нелинейное дифференцируемое отображение из $\mathbb{R}_1$ в $\mathbb{R}_1$. В основу вывода этого способа ускорения МПИ были положены геометрические соображения (деление отрезка в заданном отношении, в том числе, возможно, и внешним образом). Применение при этом формулы конечных приращений Лагранжа и аппроксимация появляющейся здесь производной разностным отношением, подсчитываемым с помощью текущих и предыдущих членов итерационной последовательности, привело к двухшаговому итерационному процессу, называемому методом Вегстейна (см., в частности, [3], [4]) или усовершенствованным методом последовательных приближений (см. [5]). Основная расчетная формула метода Вегстейна может быть записана, например, в виде

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}\,\varphi(x_k) - x_k\,\varphi(x_{k-1})}{x_{k-1} + \varphi(x_k) - x_k - \varphi(x_{k-1})}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (5)$$

Практика вычислений по методу Вегстейна показывает его высокую вычислительную эффективность, причем он зачастую сходится в условиях, когда МПИ (3) оказывается расходящимся. К сожалению, геометрический вывод итерационного процесса (5) не дает прямой возможности обобщить его на многомерный случай.

Рассмотрим другой подход к выводу способа ускорения сходимости метода простых итераций, аналогичного способу Вегстейна, также принимая за основу структуру (4) вида итерационной формулы и считая параметр λ зависящим от номера итерации k.

Новую последовательность $(\tilde{x}_k)$ приближений к неподвижной точке ξ будем строить исходя из того, что: 1) очередной элемент $\tilde{x}_{k+1}$ должен получаться как линейная комбинация предыдущего элемента $\tilde{x}_k$ этой последовательности и результата применения к $\tilde{x}_k$ одного шага метода простых итераций и 2) коэффициенты этой линейной комбинации должны быть обратно пропорциональными невязкам значений $\tilde{x}_k$ и $x_{k+1} = \varphi(\tilde{x}_k)$. Таким образом, новый метод определяется совокупностью формул

$$\tilde{x}_{k+1} = \alpha_k \tilde{x}_k + \beta_k x_{k+1}, \quad x_{k+1} = \varphi(\tilde{x}_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\frac{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{x_{k+1} - \varphi(x_{k+1})}{\varphi(\tilde{x}_k) - \tilde{x}_k}, \quad \alpha_k + \beta_k = 1 .$$

Полагая $\alpha_k / \beta_k = \lambda_k$, после элементарных преобразований полученному аналогу метода Вегстейна придаем следующий вид:

$$\tilde{x}_{k+1} = \frac{\lambda_k}{1+\lambda_k}\tilde{x}_k + \frac{1}{1+\lambda_k}x_{k+1}, \quad x_{k+1} = \varphi(\tilde{x}_k), \qquad (6)$$

$$\lambda_k = \frac{x_{k+1} - \varphi(x_{k+1})}{x_{k+1} - \tilde{x}_k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (7)$$

Для выяснения условий и скорости сходимости последовательности $(\tilde{x}_k)$, порождаемой методом (6) – (7), к неподвижной точке ξ функции $\varphi(x)$ проанализируем поведение погрешности $\xi - \tilde{x}_k$ в предположении, что ξ и начальная точка $\tilde{x}_0$ принадлежат промежутку $\langle a, b \rangle$, на котором функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема.

Независимо от способа фиксирования параметра λ_k из равенств (6) имеем

$$\xi - \tilde{x}_{k+1} = \xi - \frac{\lambda_k}{1+\lambda_k}\tilde{x}_k - \frac{1}{1+\lambda_k}x_{k+1} = \frac{1}{1+\lambda_k}\left[\xi - x_{k+1} + \lambda_k(\xi - \tilde{x}_k)\right].$$

Далее, используя тождество (2) и привлекая формулу конечных приращений Лагранжа (в предположении, что точки $\tilde{x}_k$ и $x_{k+1} = \varphi(\tilde{x}_k)$ не покидают промежуток $\langle a, b \rangle$), получаем

$$\xi - \tilde{x}_{k+1} = \frac{1}{1+\lambda_k}\left[\varphi(\xi) - \varphi(\tilde{x}_k) + \lambda_k(\xi - \tilde{x}_k)\right] = \frac{\lambda_k + \varphi'(\theta_k)}{\lambda_k + 1}(\xi - \tilde{x}_k), \tag{8}$$

где θ_k – некоторая неизвестная точка между точками $\tilde{x}_k$ и ξ. Из представления ошибки $(k+1)$-го приближения в виде (8) следует, что необходимое для сходимости последовательности $(\tilde{x}_k)$ к ξ убывание абсолютных погрешностей будет выполнено, если будет иметь место неравенство

$$q_k := \left| \frac{\lambda_k + \varphi'(\theta_k)}{\lambda_k + 1} \right| < 1, \tag{9}$$

причем сходимость, очевидно, будет тем быстрее, чем меньше величина q_k.

Обращаясь к выражению λ_k, определяемому формулой (7), замечаем, что в соответствии с вышеупомянутой формулой Лагранжа между точками $\tilde{x}_k$ и x_{k+1} найдется такая точка ν_k, что

$$\lambda_k = \frac{\varphi(\tilde{x}_k) - \varphi(x_{k+1})}{x_{k+1} - \tilde{x}_k} = \frac{\varphi'(\nu_k)(\tilde{x}_k - x_{k+1})}{x_{k+1} - \tilde{x}_k} = -\varphi'(\nu_k). \tag{10}$$

Отсюда получаем, в первую очередь, необходимое требование к последовательности параметров λ_k.

Теорема 1. *Для сходимости генерируемой методом* (6) – (7) *последовательности* $(\tilde{x}_k)$ *к неподвижной точке* ξ *непрерывно дифференцируемой функции* $\varphi(x)$ *необходимо, чтобы последовательность параметров* λ_k *сходилась к значению* $-\varphi'(\xi)$.

Доказательство. Сходимость последовательности $(\tilde{x}_k)$ к ξ означает, что $\xi - \tilde{x}_k \to 0$. Следовательно, для фигурирующих в равенстве (8) точек θ_k, «зажатых» между точками $\tilde{x}_k$ и ξ, тоже имеет место $\xi - \theta_k \to 0$, т. е. $\theta_k \to \xi$. Тогда, в силу непрерывности производной, $\varphi'(\theta_k) \to \varphi'(\xi)$. С другой стороны, согласно (10), $\lambda_k = -\varphi'(\nu_k)$, где $\nu_k \to \xi$, поскольку в условиях теоремы и $\tilde{x}_k \to \xi$, и $x_{k+1} = \varphi(\tilde{x}_k) \to \xi$ (последнее в силу непрерывности самой функции $\varphi(x)$). Значит, $\varphi'(\nu_k) \to \varphi'(\xi)$, т. е. $\lambda_k \to -\varphi'(\xi)$. Теорема доказана.

Чтобы сформулировать достаточные условия сходимости итерационного процесса (6) – (7), предварительно докажем лемму об условиях, обеспечивающих выполнение ключевых для этого неравенств типа (9).

Лемма. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *определена и дифференцируема на промежутке* $\langle a, b\rangle$, *причем существуют*

$$\min_{x\in\langle a,b\rangle} \varphi'(x) = \delta, \quad \max_{x\in\langle a,b\rangle} \varphi'(x) = \gamma .$$

Тогда при любых значениях λ *таких, что*

$$\lambda > -\frac{1+\delta}{2}, \text{ если } \gamma < 1, \tag{11}$$

или

$$\lambda < -\frac{1+\gamma}{2}, \text{ если } \delta > 1, \tag{12}$$

на промежутке $\langle a, b\rangle$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\lambda+\varphi'(x)}{\lambda+1}\right| < 1. \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условиях (11) имеем:

$$2\lambda > -1-\delta > -1-\gamma > -1-1 \quad \Rightarrow \quad \lambda > -1 .$$

Значит, $\lambda+1>0$ и $|\lambda+1| = \lambda+1$. Из того же неравенства (11), переписанного в виде $1+\delta > -2\lambda$, получаем неравенство $\lambda+\delta > -\lambda-1$, откуда следует, что

$$\lambda+\varphi'(x) > -(\lambda+1) \quad \forall x \in \langle a, b\rangle . \tag{14}$$

Условие $\gamma < 1$ означает, что $\varphi'(x) < 1$ при любых $x \in \langle a, b\rangle$, следовательно,

$$\lambda+\varphi'(x) < \lambda+1 \quad \forall x \in \langle a, b\rangle . \tag{15}$$

Неравенства (14), (15) вместе дают неравенство

$$|\lambda+\varphi'(x)| < |\lambda+1| \quad \forall x \in \langle a, b\rangle ,$$

равносильное утверждаемому неравенству (13).

Теперь проведем аналогичный анализ условий (12). Имеем:

$$2\lambda < -1-\gamma < -1-\delta < -1-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda < -1 \Rightarrow \lambda+1<0 \Rightarrow |\lambda+1| = -(\lambda+1) .$$

С другой стороны,

$$-2\lambda > 1+\gamma \quad \Leftrightarrow \quad \lambda+\gamma < -\lambda-1 ,$$

значит,

$$\lambda+\varphi'(x) < -(\lambda+1) \quad \forall x \in \langle a, b\rangle .$$

Но из того, что неравенство $\delta > 1$ влечет неравенство $\varphi'(x) > 1$, следует

$$\lambda + \varphi'(x) > \lambda + 1 \quad \forall x \in \langle a, b \rangle .$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$|\lambda + \varphi'(x)| < -(\lambda + 1) = |\lambda + 1|,$$

которое и завершает доказательство леммы.

Теорема 2. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *определена и непрерывно дифференцируема на всей числовой оси и имеет неподвижную точку* ξ.

Тогда, если

$$\delta \le \varphi'(x) \le \gamma \quad \forall x \in (-\infty, +\infty) \tag{16}$$

и выполняется одно из следующих двух условий:

А) $\gamma < 1$ *и* $\delta > 2\gamma - 1$,

Б) $\delta > 1$ *и* $\gamma < 2\delta - 1$,

то итерационный процесс (6) – (7) *сходится к неподвижной точке* ξ *из любой начальной точки* $\tilde{x}_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В условиях А) с учетом (16) можно утверждать, что

$$\varphi'(x) < \frac{1+\delta}{2} \quad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

Но тогда при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$, согласно (10),

$$\lambda_k = -\varphi'(\nu_k) > -\frac{1+\delta}{2}.$$

Следовательно, выполнение условий А) теоремы влечет выполнение условий (11) леммы с λ_k в роли λ, $\varphi'(\nu_k)$ в роли $\varphi'(x)$, $(-\infty, +\infty)$ в роли промежутка $\langle a, b \rangle$.

Аналогично из Б) вместе с (16) следует неравенство

$$\varphi'(x) > \frac{1+\gamma}{2} \quad \forall x \in (-\infty, +\infty),$$

означающее, что

$$\lambda_k \left(= -\varphi'(\nu_k)\right) < -\frac{1+\gamma}{2},$$

а это можно интерпретировать как выполнение требования (12) леммы. Таким образом, в любом из случаев А) или Б) теоремы справедливо заключение леммы, которое в данном контексте равносильно выполнению неравенства (9) при любых значениях $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Переходя к модулям в равенстве (8), с учетом введенного в (9) обозначения, имеем

$$\left|\xi-\tilde{x}_{k+1}\right|=q_k\left|\xi-\tilde{x}_k\right|.$$

Применение рекурсии в этом равенстве дает:

$$\left|\xi-\tilde{x}_{k+1}\right|=q_k\,q_{k-1}\left|\xi-\tilde{x}_{k-1}\right|=\ldots=q_0\,q_1\ldots q_k\left|\xi-x_0\right|.$$

Так как $q:=\max\limits_{j\in\{\overline{0,k}\}} q_j<1$, в силу вышеустановленного, то справедлива оценка погрешности

$$\left|\xi-\tilde{x}_k\right|\leq q^k\cdot\left|\xi-\tilde{x}_0\right|,$$

из которой следует, что $\tilde{x}_k \underset{k\to\infty}{\to} \xi$ при любой фиксированной величине начальной погрешности $\left|\xi-\tilde{x}_0\right|$.

Теорема доказана.

Легко убедиться, что наложенные в теореме 2 условия А), Б) значительно расширяют границы применимости классического метода простых итераций (3). Однако в случае, когда промежуток $\langle a,b\rangle$, на котором применяется исследуемый метод, конечен, заключение о сходимости метода должно быть обусловлено дополнительными требованиями, поскольку в таком случае нужно обеспечивать попадание точек θ_k и ν_k в заданный интервал (изменяющийся в процессе итераций).

Усиливая требования к функции $\varphi(x)$ и накладывая ограничение на выбор начального приближения $\tilde{x}_0$, можно не только получить конструктивные условия сходимости метода (6) – (7) на конечном промежутке, но и показать его высокую скорость сходимости.

Как установлено выше, $\lambda_k=-\varphi'(\nu_k)$, и, значит, (см. (8)),

$$\xi-\tilde{x}_{k+1}=\frac{\varphi'(\theta_k)-\varphi'(\nu_k)}{1-\varphi'(\nu_k)}\left(\xi-\tilde{x}_k\right). \tag{17}$$

При условии двукратной дифференцируемости функции $\varphi(x)$ между точками θ_k и ν_k найдется точка τ_k такая, что равенство (17) примет вид

$$\xi-\tilde{x}_{k+1}=\frac{\varphi''(\tau_k)(\theta_k-\nu_k)}{1-\varphi'(\nu_k)}\left(\xi-\tilde{x}_k\right). \tag{18}$$

Можно указать условия, гарантирующие попадание точек θ_k и ν_k на промежуток между точками $\tilde{x}_k$ и ξ, что позволяет на основе равенства (18) получить неравенство

$$\left|\xi-\tilde{x}_{k+1}\right|\leq\frac{\left|\varphi''(\tau_k)\right|}{\left|1-\varphi'(\nu_k)\right|}\cdot\left|\xi-\tilde{x}_k\right|^2, \tag{19}$$

показывающее возможность квадратичной сходимости процесса (6) – (7).

Например, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi(x)$ *– дважды дифференцируемая на отрезке* $[a, b]$ *функция, причем существуют такие положительные постоянные* α *и* β*, что при любых* $x \in [a, b]$ *выполняется какое-либо из следующих условий А) или Б):*

$$\text{А)}\quad \alpha \in (0, 1), \quad 0 < \varphi'(x) \le 1 - \alpha, \quad |\varphi''(x)| \le \beta;$$
$$\text{Б)}\quad \alpha \in (1, 2), \quad -1 < \varphi'(x) \le 1 - \alpha, \quad 2|\varphi''(x)| \le \beta.$$

Тогда порождаемая методом (6) – (7) *последовательность* $(\tilde{x}_k)$ *квадратично сходится к неподвижной точке* $\xi \in [a, b]$ *функции* $\varphi(x)$ *из любой начальной точки* $\tilde{x}_0 \in [a, b]$, *удовлетворяющей неравенству*

$$\left|\xi - \tilde{x}_0\right| < \frac{\alpha}{\beta}. \tag{20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условии А), очевидно, гарантируются существование на отрезке $[a, b]$ неподвижной точки ξ и монотонная сходимость к ней МПИ (см. [3, 4]). В силу этого, точка $x_{k+1} = \varphi(\tilde{x}_k)$ будет находиться по одну сторону с точкой $\tilde{x}_k$ по отношению к неподвижной точке ξ (причем ближе, чем $\tilde{x}_k$). Следовательно, связь погрешностей (19), характеризующая исследуемый метод как метод второго порядка, имеет место. Привлекая предоставляемые условиями А) оценки, из неравенства (19) получаем неравенство

$$|\xi - \tilde{x}_{k+1}| \le \frac{\beta}{\alpha}|\xi - \tilde{x}_k|^2.$$

Последовательное итерирование этого неравенства дает:

$$|\xi - \tilde{x}_{k+1}| \le \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}|\xi - \tilde{x}_{k-1}|^2\right)^2 \le \ldots \le \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1+2+2^2+\ldots+2^k} \cdot |\xi - \tilde{x}_0|^{2^{k+1}} =$$
$$= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2^{k+1}-1} \cdot |\xi - \tilde{x}_0|^{2^{k+1}} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}|\xi - \tilde{x}_0|\right)^{2^{k+1}}.$$

Так как при выполнении условия (20) выполняется неравенство $\frac{\beta}{\alpha}|\xi - \tilde{x}_0| < 1$, то из полученной выше оценки погрешности приближения $\tilde{x}_{k+1}$ очевидным образом следует заключение о квадратичной сходимости последовательности $(\tilde{x}_k)$ к ξ.

Требование к первой производной, наложенное в условиях Б), также обеспечивает существование неподвижной точки $\xi \in [a, b]$ и осциллирующую сходимость к ней МПИ. Значит, точки $\tilde{x}_k$ и x_{k+1} находятся по разные стороны от неподвижной точки ξ, но при этом

$$|\xi - x_{k+1}| < |\xi - \tilde{x}_k| \quad \Rightarrow \quad |x_{k+1} - \tilde{x}_k| < 2|\xi - \tilde{x}_k|.$$

В таком случае для фигурирующей в равенстве (17) разности $\theta_k - \nu_k$ справедлива оценка $|\theta_k - \nu_k| < 2|\xi - \tilde{x}_k|$, что позволяет вместо неравенства (19) использовать аналогичное неравенство

$$|\xi - \tilde{x}_{k+1}| \le \frac{2|\varphi''(\tau_k)|}{|1-\varphi'(\nu_k)|} \cdot |\xi - \tilde{x}_k|^2 .$$

Дальнейшие рассуждения не отличаются от проведенных при условиях А).

Теорема доказана.

Замечание 1. Как видно из равенства (17), предваряющего равенство (18) и служащего основой для заключения теоремы 3, вместо двукратной дифференцируемости $\varphi(x)$ достаточно потребовать липшицевость первой производной. В этом случае под β (или $\beta/2$ в условиях Б)) в теореме 3 должна пониматься постоянная Липшица для $\varphi'(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Замечание 2. Поскольку в условиях теоремы 3 имеет место сходимость МПИ, то обоснованным критерием окончания процесса итераций по формулам (6) – (7) можно считать следующее правило [3, 4]:

$$|x_{k+1} - \tilde{x}_k| \le \frac{1-t}{t}\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \xi :\approx x_{k+1} \ (\pm\varepsilon),$$

где $t := |1-\alpha|$, а $\varepsilon > 0$ – задаваемый допустимый уровень абсолютной погрешности. Если же условия теоремы 3 не выполняются, то также возможна сходимость метода (6) – (7) при расходимости МПИ (что следует из анализа теоремы 2). В такой ситуации правило

$$|x_{k+1} - \tilde{x}_k| \le \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \xi :\approx \tilde{x}_k$$

можно считать критерием выхода по невязке (скорее эвристическим, чем обоснованным).

Пример. В качестве теста для нового метода возьмем уравнение

$$x = \operatorname{sh}\omega x, \tag{21}$$

на котором Дж. Вегстейн демонстрировал достоинства своего метода [2]. Это уравнение при любых значениях параметра ω имеет корень $\xi = 0$, причем функция $\varphi(x) := \operatorname{sh}\omega x$ такова, что ее производная $\varphi'(x) = \omega \operatorname{ch}\omega x$ в точке ξ имеет значение ω. Таким образом, легко смоделировать ситуации, когда можно заведомо указать, как поведет себя метод простых итераций (3), являющийся базовым для предложенного метода (6) – (7). Результаты решения уравнения (21) итерационным процессом (6) – (7), начинающимся с того же, что и в примере из статьи [2], начального приближения $\tilde{x}_0 = 1$ и при тех же взятых из [2] четырех значениях параметра ω, а именно: при

а) $\omega = 0,5$ (случай монотонной сходимости МПИ),

б) $\omega = -0,5$ (случай осциллирующей сходимости МПИ), в) $\omega = -1,2$ (случай осциллирующей расходимости МПИ),

г) $\omega = 1,2$ (случай монотонной расходимости МПИ)

отображены в помещенной ниже табл. 1 (среда *Delphi 7*, тип данных *extended,* мантиссы невязок округлены до двух значащих цифр).

Таблица 1. **Поведение невязок $\left|\tilde{x}_k - \varphi\left(\tilde{x}_k\right)\right|$ в методе (6) – (7)**

$k\backslash\omega\rightarrow$ $\downarrow$	а) $\omega = 0,5$	б) $\omega = -0,5$	в) $\omega = -1,2$	г) $\omega = 1,2$
1	0,018	0,0052	0,22	0,26
2	$0,75 \cdot 10^{-6}$	$0,22 \cdot 10^{-9}$	$0,70 \cdot 10^{-4}$	0,11
3	$0,10 \cdot 10^{-18}$	$0,90 \cdot 10^{-20}$	$0,22 \cdot 10^{-14}$	0,036
4			$0,54 \cdot 10^{-20}$	0,0034
5				$0,37 \cdot 10^{-5}$
6				$0,47 \cdot 10^{-14}$
7				$0,56 \cdot 10^{-19}$

Данные табл. 1 наглядно показывают, что при каждом из фиксированных в а) – г) значений параметра ω наблюдается сходимость итерационного процесса (6) – (7) со скоростью, которую можно охарактеризовать как квадратичную (хотя условия теоремы 3 выполняются только при значениях $\omega = \pm 0,5$). Для выполнения критерия $\left|\tilde{x}_k - \varphi\left(\tilde{x}_k\right)\right| < 10^{-15}$ при реализации метода Вегстейна потребовалось 6 итераций в случаях а) и б), 7 — в случае в) и 11 – в случае г), что позволяет говорить о более быстрой сходимости рассматриваемого здесь метода по сравнению с методом Вегстейна. Следует упомянуть, что метод простых итераций (3) в этом примере дает требуемую точность 10^{-15} по невязке за 50 итераций в случае а), 52 итерации в случае б) и совсем не применим при $|\omega| \geq 1$.

Выигрыш в скорости сходимости нового метода по сравнению с методом Вегстейна был достигнут ценой лишнего вычисления функции (необходимого для подсчета значения параметра λ_k в формуле (7)), что может отразиться на его вычислительной эффективности. Однако высокая скорость сходимости предлагаемого метода позволяет ему вполне успешно конкурировать по вычислительным затратам не только с методом Вегстейна, но и с другими быстросходящимися методами решения скалярных уравнений, например, с наиболее популярным из них методом Ньютона. Результаты применения в тех же условиях метода Ньютона к уравнению (21), представленному в виде $f\left(x\right) := x - sh\omega x = 0,$ показаны в табл. 2.

Как видим, в трех случаях из четырех результаты, полученные методом (6) – (7), лучше ньютоновских при условно одинаковой цене одной итерации (два вычисления функции в предлагаемом методе и по одному вычислению функции и ее производной в методе Ньютона).

Таблица 2. **Поведение невязок** $|x_k - \varphi(x_k)|$ **в методе Ньютона** $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 = 1$

$k \backslash \omega \to$ $\downarrow$	а) $\omega = 0,5$	б) $\omega = -0,5$	в) $\omega = -1,2$	г) $\omega = 1,2$
1	0,038	0,11	0,68	0,069
2	$0,18 \cdot 10^{-4}$	$0,54 \cdot 10^{-4}$	0,029	0,0026
3	$0,20 \cdot 10^{-14}$	$0,59 \cdot 10^{-14}$	$0,23 \cdot 10^{-5}$	$0,21 \cdot 10^{-6}$
4	$0,12 \cdot 10^{-19}$	$0,12 \cdot 10^{-19}$	$0,12 \cdot 10^{-17}$	$0,10 \cdot 10^{-18}$

Что касается поведения последовательности (λ_k) параметров метода, то во всех случаях подтверждается выполнение сформулированного в теореме 1 требования к ним, а именно: имеет место $\lambda_k \to -\omega$.

Список литературы

1. *Васин В. В., Еремин И. И.* Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. – Екатеринбург : УрО РАН, 2005. – 210 с.
2. *Wegstein J. H.* Accelerating convergence of iterative processes // Communications of the ACM. – 1958. – Vol. 1, Iss. 6. – Pp. 9–13.
3. *Вержбицкий В. М.* Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения). – 2-е изд., испр. – М. : Оникс 21 век, 2005. – 432 с.
4. *Вержбицкий В. М.* Основы численных методов. – 3-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2009. – 840 с.
5. *Мак-Кракен Д., Дорн У.* Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. – 2-е изд., стер. – М. : Мир, 1977. – 584 с.

* * *

V. M. Verzhbitskiy, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Izhevsk State Technical University

I. F. Yumanova, Student, Izhevsk State Technical University

On One Analogue of Wegstein Method of Iterative Process Convergence Acceleration

A new method for solving of nonlinear scalar equations is received by means of step-by-step parameterization of a method of simple iterations. Conditions of square-law convergence of the offered method have been obtained. The results of numerical comparisons with Wegstein method and Newton method are presented.

Keywords: scalar equation, fixed point, analogue of Wegstein method, quadratic convergence

Получено 15.03.10