

Keywords: software complex, one-dimensional Gibbs ensemble, canonical method of numerical integration, Hamilton function, Lennard-Jones potential, modeling

Получено 07.02.10

УДК 532.5.011

А. А. Калинин, кандидат технических наук, доцент;
В. А. Тененёв, доктор физико-математических наук, профессор;
Ю. В. Турыгин, доктор технических наук, профессор
Ижевский государственный технический университет

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПИТАЮЩЕЙ ТРУБЕ МОЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Дана постановка задачи о расчете течения жидкости в питающей трубе моечного устройства. Представлены результаты численного моделирования течения для трех видов моделей: трехмерной, осесимметричной и плоской.

Ключевые слова: гидродинамика моечных устройств, уравнения Навье – Стокса, математическая модель, криволинейные координаты, численный конечно-разностный метод

Практика использования устройств промывки высокого давления показывает, что промывающая способность жидкостных струй зависит от многих факторов, оказывающих влияние на состояние и трансформацию тела струи при ее распространении в воздушной среде. В первую очередь это структура струи, распределение скоростей частиц по сечению тела струи на подходе к промываемому полотну. Еще более сложной представляется задача теоретического описания соударения струи с пористой движущейся подложкой, ее (струи) проникновения (фильтрации) внутри объема многослойного полотна, захватывания и вымывания с поверхности и из толщ полотна загрязняющих частиц. Для промывки технологических полотен в бумагоделательном оборудовании используют струи диаметром обычно 1–3 мм, формируемых при прохождении через цилиндрические каналы сопел (насадков) протяженностью, соизмеримой с их диаметром. Струйные потоки создают нагнетанием жидкости под давлением от 20 до 100 МПа. При этом скорости истечения на выходе из сопел составляют от 50 до 180 м/с.

Истечение и распространение струи жидкости является сложным физическим процессом, зависящим от многих внешних и внутренних причин. Основной внешней причиной является воздействие на поверхность струи аэродинамических сил, величина которых зависит от относительной скорости струи и плотности окружающего газа. Аэродинамические силы стремятся деформировать и разорвать струю, а силы поверхностного натяжения препятствуют этому. Внутренними причинами, ведущими к распаду струи, являются различного рода начальные возмущения, вызываемые, например, нарушением цилиндрической формы струи при выходе из сопла, вибрациями сопла и др.

В общем случае моеющая способность струй зависит, в первую очередь, от скорости потока на выходе из сопла, от поперечного размера струи и структуры струи на дистанции промывки, от угла наклона струи к обрабатываемой поверхности и др. При промывке движущихся объектов большое значение имеет также скорость

их относительного перемещения. Определяющую роль в процессе формирования каждой из струй играют профиль, размеры и геометрия канала сопла, а иногда и показатель смачивания поверхности канала сопла. Некоторое влияние на форму струи и распределение скоростей в выходном сечении оказывают также форма внутренней полости питающей трубы, давление жидкости в трубе, направления и скорости потоков вблизи сопла и некоторые другие менее значительные факторы.

Влияние формирующих факторов на параметры и характеристики свободных струй рассматривается в некоторых публикациях, например [1].

Процесс промывки структурно можно подразделить на несколько последовательных этапов (стадий), а именно: а) формирование питающего потока жидкости в трубе с многочисленными выходными отверстиями; б) формирование многоструйного моющего потока; в) распространение струй в воздушном пространстве; г) воздействие струй на движущееся волокнистое полотно; д) течение потоков жидкости по поверхности полотна, а также в толще полотна.

В соответствии с перечисленными этапами следует сформулировать и перечень основных задач, решение которых позволит подойти к решению проблемы в целом. Рассмотрим в постановочном аспекте некоторые из этих задач.

Питающая (спрысковая) труба (рис. 1) служит для подачи жидкости к соплам. Одновременно она выполняет функции несущего элемента конструкции и резервуара, обеспечивающего выравнивание (в определенных пределах) давления и расходов на каждом сопле независимо от его местоположения. Конструктивные и гидравлические параметры трубы должны быть взаимосвязаны таким образом, чтобы все сформированные струи имели одинаковые параметры и характеристики. Кроме того, суммарное действие силовых факторов на тело трубы от внутреннего давления, веса жидкости, реактивных сил струй не должно вызывать недопустимого прогиба трубы.

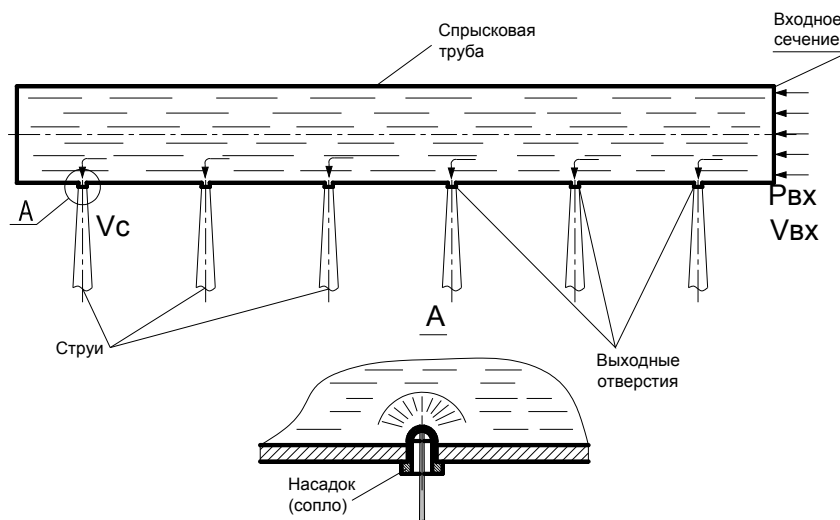


Рис. 1. Схема формирования струй питающей (спрысковой) трубой

Рассматриваемый вариант течения в трубе с отверстиями следует отнести к более сложному случаю по сравнению с известными [2], для которых получены точ-

ные решения. В связи с этим для определения параметров течения требуется численно решить уравнения гидродинамики.

Математическая модель

Уравнения гидродинамики взяты в общем виде для криволинейной ортогональной системы координат x_1, x_2, x_3 [3].

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho q_i \frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} \right) = 0,$$

где ρ – плотность жидкости; q_1, q_2, q_3 – проекции вектора скорости на оси координат x_1, x_2, x_3 ; H_1, H_2, H_3 – коэффициенты Ляме.

Уравнение импульса:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial q_k}{\partial t} + \rho \sum_{i=1}^3 \left(\frac{q_i}{H_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{q_i^2}{H_i H_k} \frac{\partial H_i}{\partial x_k} + \frac{q_i q_k}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x_i} \right) = \\ = \frac{1}{H_k} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3 H_k}{H_i} P_{ik} \right) - \frac{P_{ik}}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x_k} \right], \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Компоненты тензора напряжений $\mathbf{P}$ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{11} = -p + \frac{4}{3} \mu \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{q_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \frac{q_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \right) - \\ - \frac{2}{3} \mu \left[\frac{1}{H_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial q_3}{\partial x_3} + \frac{q_1}{H_1} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{H_2 H_3} \left(q_2 \frac{\partial H_3}{\partial x_2} + q_3 \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right) \right]; \\ P_{22} = -p + \frac{4}{3} \mu \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{q_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \frac{q_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right) - \\ - \frac{2}{3} \mu \left[\frac{1}{H_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial q_3}{\partial x_3} + \frac{q_2}{H_2} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{H_1 H_3} \left(q_1 \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + q_3 \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \right) \right]; \\ P_{33} = -p + \frac{4}{3} \mu \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial q_3}{\partial x_3} + \frac{q_1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + \frac{q_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right) - \\ - \frac{2}{3} \mu \left[\frac{1}{H_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{q_3}{H_3} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{H_1 H_2} \left(q_1 \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + q_2 \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right) \right]; \\ P_{12} = P_{21} = \mu \left[\frac{1}{H_2} \frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial q_2}{\partial x_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \left(q_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + q_2 \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right]; \\ P_{23} = P_{32} = \mu \left[\frac{1}{H_3} \frac{\partial q_2}{\partial x_3} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial q_3}{\partial x_2} - \frac{1}{H_2 H_3} \left(q_2 \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + q_3 \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$P_{13} = P_{31} = \mu \left[\frac{1}{H_3} \frac{\partial q_1}{\partial x_3} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial q_3}{\partial x_1} - \frac{1}{H_1 H_3} \left(q_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + q_3 \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right) \right],$$

где p – давление; μ – коэффициент динамической вязкости.

Поскольку скорость движения жидкости значительно меньше местной скорости звука $M < 0,3$, где M – число Маха, а процесс протекает при постоянной температуре, следует принять, что жидкость несжимаема и процесс изотермический. Течение жидкости по трубе следует рассматривать как установившееся.

Для стационарного несжимаемого течения уравнения принимают вид:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho q_i \frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} \right) = 0. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \left(\frac{q_i}{H_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{q_i^2}{H_i H_k} \frac{\partial H_i}{\partial x_k} + \frac{q_i q_k}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x_i} \right) = \\ & \frac{1}{\rho H_k} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3 H_k}{H_i} P_{ik} \right) - \frac{P_{ik}}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x_k} \right], \quad k = 1, 2, 3; \end{aligned} \quad (2)$$

$$P_{11} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{q_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \frac{q_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \right);$$

$$P_{22} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{q_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \frac{q_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right);$$

$$P_{33} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial q_3}{\partial x_3} + \frac{q_1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + \frac{q_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right).$$

Искомые решения позволяют установить соотношение параметров течения на входе и на выходе, а также определить влияние геометрии самой трубы и сопел на это соотношение и на равномерность формирования струй.

Численные расчеты проводились для трех типов задач.

1. Трехмерное течение в цилиндрической системе координат:

$x_1 = x$, $x_2 = r$, $x_3 = \varphi$ – координатные линии;

$q_1 = u$, $q_2 = v$, $q_3 = w$ – проекции вектора скорости на оси координат;

$H_1 = 1$, $H_2 = 1$, $H_3 = r$ – коэффициенты Ляме.

2. Осесимметричное течение в криволинейных координатах:

$x_1 = \xi$, $x_2 = \eta$ – координатные линии;

$q_1 = u$, $q_2 = v$ – проекции вектора скорости на оси координат;

$H_1 = H_2 = J = \sqrt{x_\xi^2 + x_\eta^2}$, $H_3 = r$ – коэффициенты Ляме.

3. Плоское течение в декартовых координатах:

$x_1 = x$, $x_2 = y$ – координатные линии;

$q_1 = u$, $q_2 = v$ – проекции вектора скорости на оси координат;

$H_1 = 1$, $H_2 = 1$ – коэффициенты Ляме.

Следует отметить, что соотношение площадей входного и выходных сечений разнится на несколько порядков, и поэтому скорости и характер течения на входе и на выходе будут различны: по предварительным оценкам, режим течения на входе и в большей части сечения трубы будет ламинарным, а в некоторой части струи – турбулентным. Турбулентность рассчитывалась с применением двухпараметрической модели $K-\varepsilon$ (K – кинетическая энергия, ε – скорость диссипации). Например, для осесимметричного случая криволинейных координат уравнения переноса K, ε имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho r J^2 U K \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho r J^2 V K \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(r \mu \sigma \frac{\partial K}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(r \mu \sigma \frac{\partial K}{\partial \eta} \right) + r J^2 \rho (B - \varepsilon); \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho r J^2 U \varepsilon \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho r J^2 V \varepsilon \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(r \mu \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(r \mu \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) + r J^2 \rho \varepsilon \frac{c_1 B - c_2 \varepsilon}{K}, \quad (4)$$

где $U = \frac{1}{J^2} \left(u \frac{\partial x}{\partial \xi} + v \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)$, $V = \frac{1}{J^2} \left(u \frac{\partial x}{\partial \eta} + v \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)$, $\mu = c_3 \rho \frac{K^2}{\varepsilon}$, c_1, c_2, c_3, σ, B – эмпирические коэффициенты.

Для решения задачи (1–4) применяется численный метод SIMPLE [4], реализованный в трехмерной постановке в [5].

Результаты расчетов

Рассмотрим трехмерное течение в трубе с применением цилиндрической системы координат. Пространственное представление векторного поля течения представлено на рис. 2.

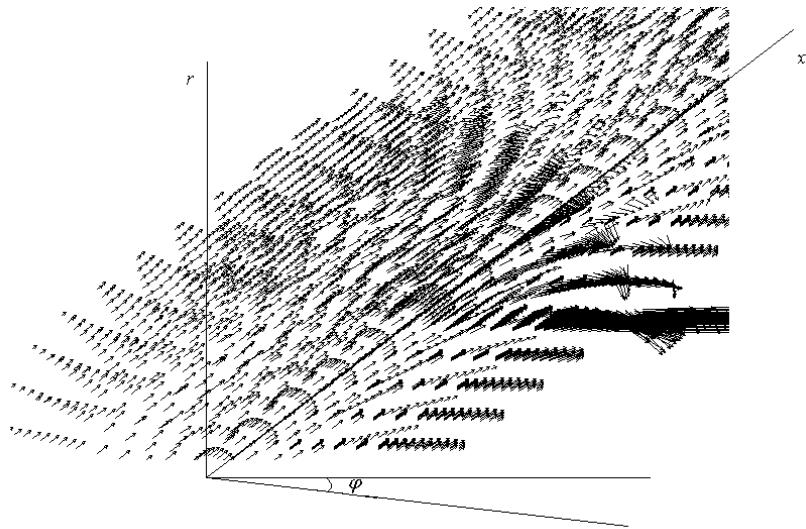


Рис. 2. Трехмерное векторное поле

Поле течения в плоскости, проходящей через центр отверстий, показано на рис. 3.

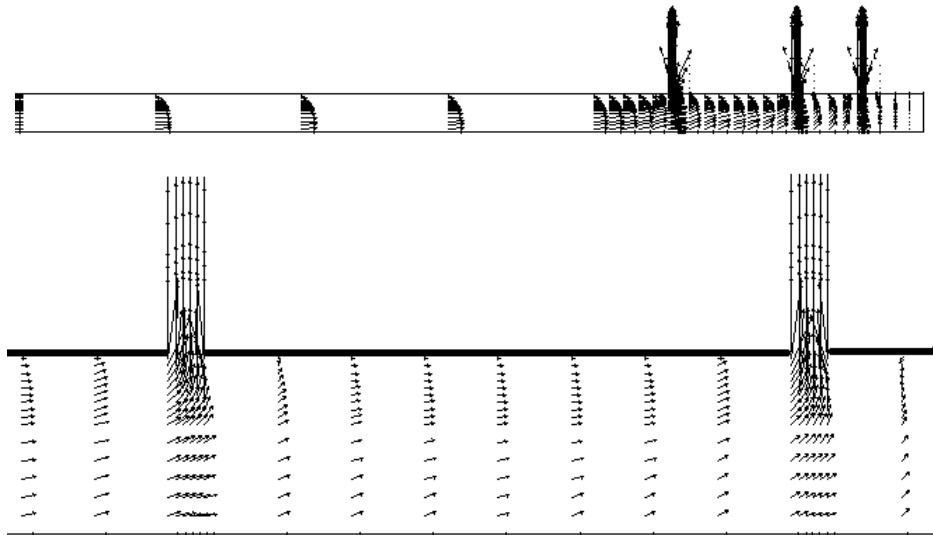


Рис. 3. Векторное поле течения в меридиональной плоскости

Формирование струй происходит преимущественно в некоторой ограниченной области, примыкающей к выходному сечению каждого из сопел. Эта область включает как участки течения, прилегающие к отверстию, так и участки, ограниченные профилем отверстия, например каналом насадка или сопла, а иногда и участки струи за пределами сопла (участки свободного истечения в газовую среду). При достаточном удалении отверстий друг от друга, как это имеет место в струйных моющих устройствах, взаимовлияние каждой из струй на параметры истечения других весьма незначительно. Область заметного изменения градиента скорости ограничена радиусом 15–30 мм, очерченным около отверстия, при расстоянии между отверстиями 200 мм. Следовательно, расчетную область моделирования процесса формирования струи можно ограничить только участком трубы, непосредственно примыкающим к отверстию, задавая граничные условия на входном и выходном сечениях участка исходя из общего решения в целом по всей трубе.

Течение в окрестности сопел рассчитывалось по второй модели – осесимметричное течение в криволинейных координатах.

Для одного из вариантов сопла картина течения приведена на рис. 4.

Разностная сетка, построенная комплексным методом граничных элементов, показана на рис. 5.

Расчетное распределение давления при истечении из насадка показано на рис. 6.

Аналогичные расчеты проведены для отверстия, вырезанного в стенке трубы (рис. 7).

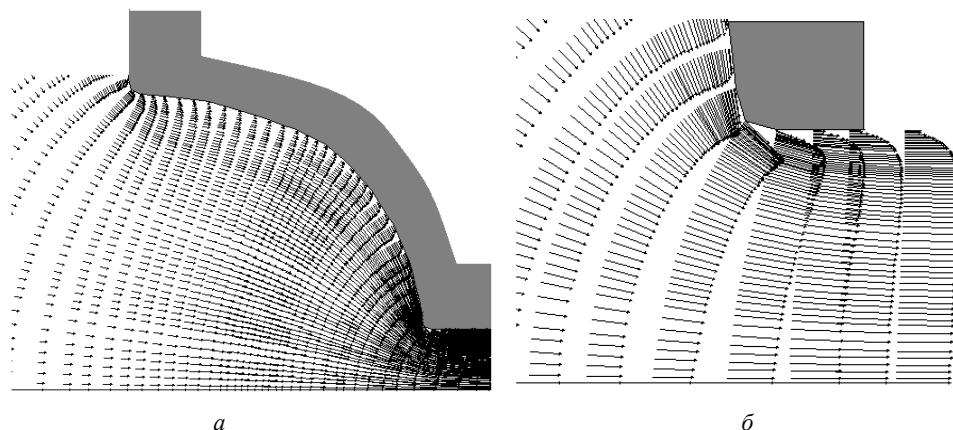


Рис. 4. Векторное поле в окрестности отверстия

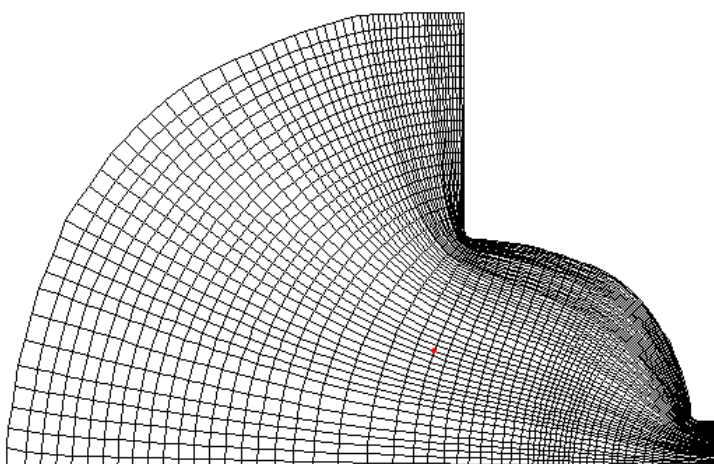


Рис. 5. Разностная сетка для расчета течения в окрестности отверстия

Трехмерный расчет течения в питающей трубе с большим количеством отверстий является достаточно затратным по времени. Изучение распределения давления целесообразно проводить с применением более простых моделей. Рассмотрим третий вариант расчетной модели – плоское течение. Двумерное поле течения представлено на рис. 8.

Картина течения является похожей на картину в меридиональной плоскости (рис. 3). Рассчитанные перепады давления в плоской трубе с полушириной $b = 0,025$ м и длиной 2,5 м приведены на рис. 9. Количество отверстий равно 10.

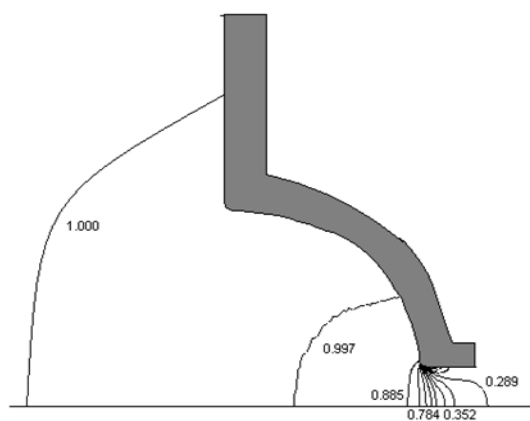


Рис. 6. Изобары в окрестности отверстия

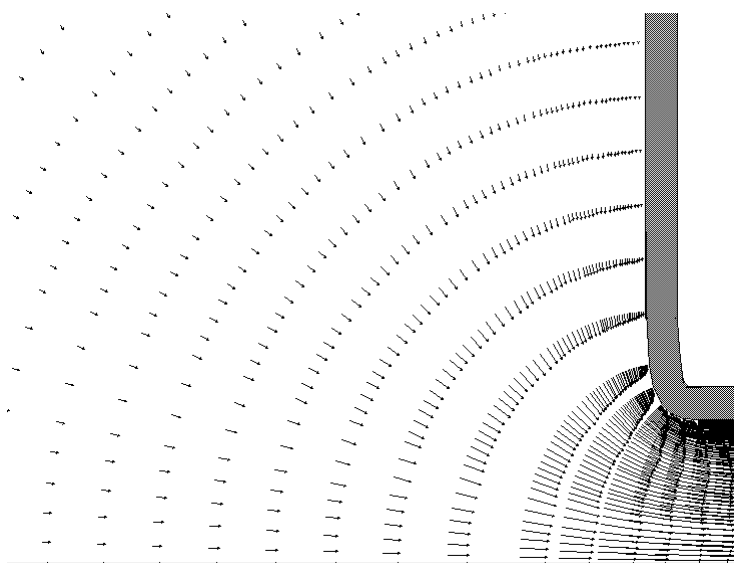


Рис. 7. Векторное поле в окрестности отверстия на стенке питающей трубы

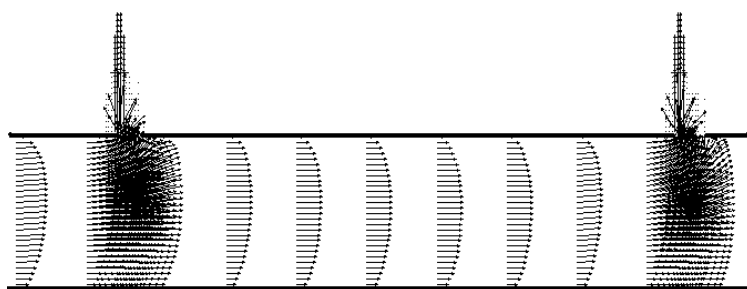


Рис. 8. Поле течения, рассчитанное в двумерном приближении

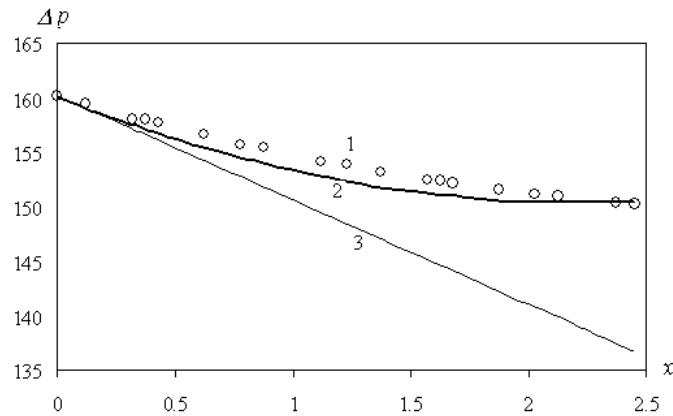


Рис. 9. Изменение давления по длине плоской трубы

Зависимость (1) соответствует расчету по плоской модели. Давление имеет размерность $\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$. Для построения зависимости (2) использовалось аналитическое выражение [6]

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{3\mu V(x)}{b^2}, \quad (5)$$

где $V(x)$ – средняя скорость в трубе.

Зависимость (3) соответствует трубе без боковых отверстий, т. е. средняя скорость постоянна и равна скорости на входе $V(x) = V_0$, течение ламинарное. Из этих результатов следует, что градиент давления можно приближенно оценивать по формуле (5).

Для случая круглой трубы с радиусом R градиент давления рассчитывается по формуле, аналогичной (5):

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{8\mu V(x)}{R^2}. \quad (6)$$

Зависимость (1) на рис. 10 получена расчетом по трехмерной модели.

Зависимость (2) соответствует формуле (6). Зависимость (3) (кружочки) также получена по формуле (6) с эффективной постоянной вязкостью.

На основе проведенных расчетов можно сделать заключение:

- формирование истечения в отверстиях не зависит от наличия других отверстий;
- давление в питающей трубе изменяется незначительно и может рассчитываться по аналитическим зависимостям с эффективной вязкостью.

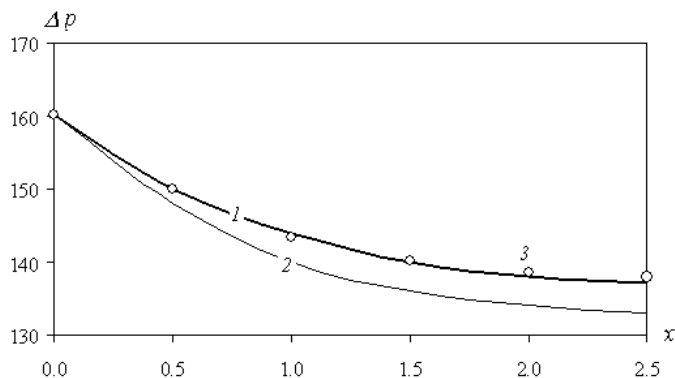


Рис. 10. Изменение давления по длине круглой трубы

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)».

Список литературы

1. Сиов Б. Н. Истечение жидкости через насадки в среды с противодействием. – М. : Машиностроение, 1968. – С. 9–28.
2. Дулов В. Г., Лукьянов Г. А. Газодинамика процессов истечения. – Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1984. – 234 с.
3. Моисеев М. Г., Савельев Ю. П. Трение и теплообмен в аэродинамике летательных аппаратов. Уравнения Навье – Стокса и ламинарного пограничного слоя : учеб. пособие для вузов / Ленингр. мех. ин-т. – Л. : [б. и.], 1986. – 116 с.
4. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М. : Энергоиздат, 1984. – 152 с.
5. Бендерский Б. Я., Тененев В. А. Пространственные дозвуковые течения в областях со сложной геометрией // Математическое моделирование. – 2001. – Т. 13, № 8. – С. 121–127.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / пер. Г. А. Вольперта с 5-го нем. изд., испр. по 6-му (амер.) изд. под ред. Л. Г. Лойцянского. – М. : Наука, 1974. – 712 с.

* * *

A. A. Kalinkin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Izhevsk State Technical University

V. A. Tenenev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Izhevsk State Technical University

Yu. V. Turygin, Doctor of Technical Sciences, Professor, Izhevsk State Technical University

Numerical Modeling of Hydrodynamical Processes in a Washer Supply Pipe

The problem statement on calculation of a liquid flow in a washer feeding pipe is given. Results of numerical modeling of the flow for three-dimensional, axisymmetric and flat models are presented.

Keywords: hydrodynamics of washers, Navier-Stokes equation, mathematic model, curvilinear coordinates, numerical finite-difference method

Получено 06.05.10