

УДК 517.958

К. М. Селиванов, аспирант
Чайковский технологический институт (филиал)
Ижевского государственного технического университета

КАНОНИЧЕСКИЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ИССЛЕДОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Сформулировано требование для построения устойчивых алгоритмов на основе канонического метода интегрирования уравнений динамики твердого тела.

Ключевые слова: канонический метод, уравнения динамики, устойчивость, твердое тело

В основе канонического метода численного интегрирования и последующего построения анимационных моделей лежит требование учета влияния самого процесса интегрирования [1, 2].

Сформулируем указанное требование применительно к каноническим компьютерным моделям динамики твердого тела.

1. Все выполняемые операции в процессе интегрирования уравнений движения необходимо рассматривать как возможные возмущения.

2. Возмущения, вызванные процессом счета, должны быть малыми выше первого порядка малости.

3. Характер возмущения должен соответствовать характеру моделируемого воздействия (рис. 1).

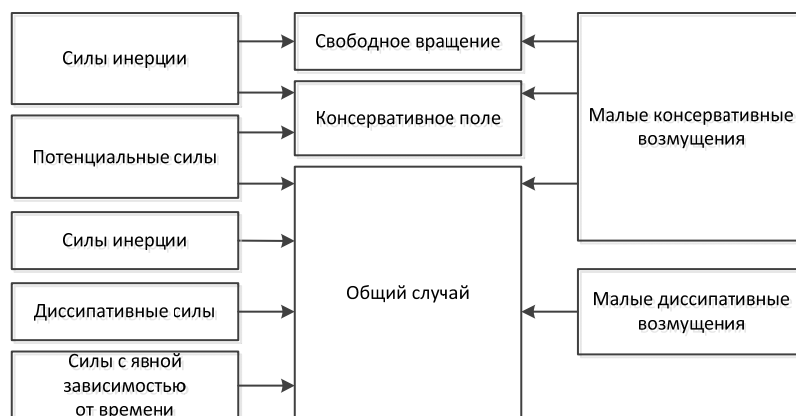


Рис. 1. Возмущения, вызванные процессом численного интегрирования динамических уравнений

Будем изначально предполагать, что алгоритм численного интегрирования дискретно воспроизводит непрерывную функцию, заданную собственной системой неизвестных нам дифференциальных уравнений, которые могут быть получены как некоторое малое возмущение исходной системы. Тогда требование соответствия характера возмущения, вызванного процессом счета и моделируемым процессом, формализуется в требовании изоморфизма между моделируемым

процессом и процессом, воспроизводимым на экране, по отношению к конкретным свойствам (рис. 2).

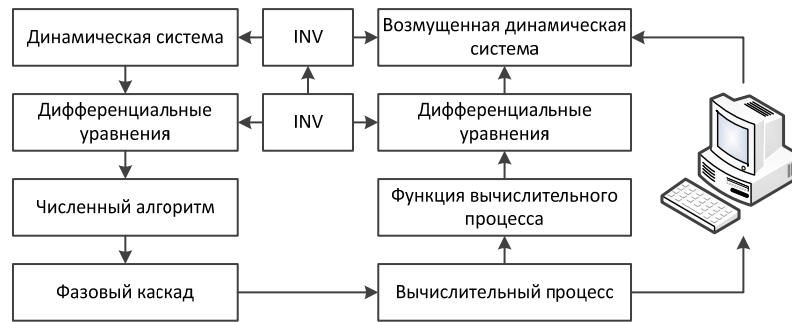


Рис. 2. Функциональная схема построения процесса численного интегрирования при каноническом методе

Существенно, что установление инвариантности позволяет полностью исключить процесс аналитического интегрирования и свести задачу к исследованию характера возмущения на основе самих дифференциальных уравнений.

Разработку алгоритмов интегрирования уравнений движения естественно начать со случая свободного вращения, который лежит в основе всех прочих моделей.

Динамические модели свободного вращения в условиях действия потенциальных сил являются консервативными системами. Поэтому основным требованием, обеспечивающим инвариантность, является требование консервативности. Таким образом, процесс численного интегрирования должен соответствовать малому консервативному возмущению. Функциональная схема компьютерной модели при численном интегрировании консервативной системы приведена на рис. 3.

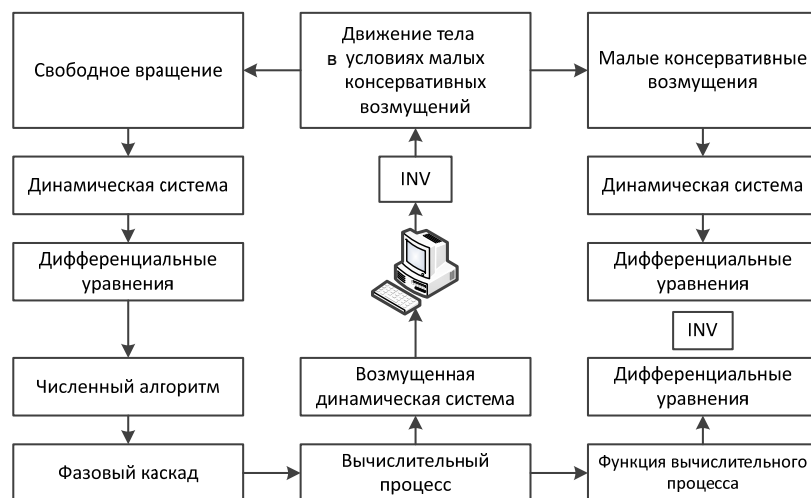


Рис. 3. Функциональная схема процесса численного интегрирования динамических уравнений консервативной системы

Воспользовавшись результатами [1], мы немедленно получаем вывод.

Если процесс численного интегрирования соответствует какому-либо малому консервативному возмущению консервативной системы, то процесс численного интегрирования не будет нарушать ее устойчивости. Напротив, воспроизводимое на экране состояние неустойчивости будет означать реальное нахождение тела в неустойчивом режиме (в окрестностях сепаратрисы).

С этой точки зрения, неустойчивость классических методов численного интегрирования, например методов Эйлера или Рунге – Кутты, как раз и объясняется тем, что они выражают некоторое неконсервативное возмущение системы.

Как следует из результатов [1], связь между свободной и консервативно возмущенной системой осуществляется бесконечно малыми каноническими преобразованиями. Из теории канонического интегрирования [2] этому должны соответствовать алгоритмы численного интегрирования для обеспечения консервативности возмущения, вызванного процессом счета. В данной работе используются алгоритмы следующего вида:

I. Импульс-координата:

$$\begin{aligned} P &= p - \tau \frac{H(p, q)}{q}; \\ Q &= q + \tau \frac{H(P, q)}{P}. \end{aligned} \quad (1)$$

II. Координата-импульс:

$$\begin{aligned} Q &= q + \tau \frac{\partial H(p, q)}{\partial p}; \\ P &= p - \tau \frac{\partial H(p, Q)}{\partial Q}. \end{aligned} \quad (2)$$

Приведем основные свойства указанных алгоритмов:

1) преобразования, осуществляемые алгоритмом, – суть бесконечно малые по шагу интегрирования преобразования фазового пространства;

2) влияние процесса счета проявляется в форме малого консервативного возмущения исходной системы;

3) предлагаемый алгоритм устойчив к накоплению погрешности счета, порядок метода 1,5;

4) алгоритм интегрирования уравнений Гамильтона выполняет минимально возможное количество арифметических операций по сравнению с другими алгоритмами.

На основе использования алгоритмов (1), (2) могут быть построены компьютерные модели, воспроизводящие движение твердого тела свободного вращения и действия потенциальных сил.

Алгоритмы интегрирования (1), (2) для свободного вращения будут иметь вид:

I. Импульс-координата:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\varphi} = p_{\varphi} + \frac{\partial H_0(p_{\varphi}, p_{\theta}, p_{\psi}, \varphi, \theta, \psi)}{\partial \varphi} \tau; \\ P_{\theta} = p_{\theta} + \frac{\partial H_0(p_{\varphi}, p_{\theta}, p_{\psi}, \varphi, \theta, \psi)}{\partial \theta} \tau; \\ P_{\psi} = p_{\psi} + \frac{\partial H_0(p_{\varphi}, p_{\theta}, p_{\psi}, \varphi, \theta, \psi)}{\partial \psi} \tau; \\ \Phi = \varphi + \frac{\partial H_0(p_{\varphi}, p_{\theta}, p_{\psi}, \varphi, \theta, \psi)}{\partial P_{\varphi}} \tau; \\ \Theta = \theta + \frac{\partial H_0(p_{\varphi}, p_{\theta}, p_{\psi}, \varphi, \theta, \psi)}{\partial P_{\theta}} \tau; \\ \Psi = \psi + \frac{\partial H_0(p_{\varphi}, p_{\theta}, p_{\psi}, \varphi, \theta, \psi)}{\partial P_{\psi}} \tau. \end{array} \right. \quad (3)$$

II. Координата-импульс:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = \varphi + \frac{\partial H_0(p_{\varphi}, p_{\theta}, p_{\psi}, \varphi, \theta, \psi)}{\partial p_{\varphi}} \tau; \\ \Theta = \theta + \frac{\partial H_0(p_{\varphi}, p_{\theta}, p_{\psi}, \varphi, \theta, \psi)}{\partial p_{\theta}} \tau; \\ \Psi = \psi + \frac{\partial H_0(p_{\varphi}, p_{\theta}, p_{\psi}, \varphi, \theta, \psi)}{\partial p_{\psi}} \tau; \\ P_{\varphi} = p_{\varphi} + \frac{\partial H_0(p_{\varphi}, p_{\theta}, p_{\psi}, \Phi, \Theta, \Psi)}{\partial \Phi} \tau; \\ P_{\theta} = p_{\theta} + \frac{\partial H_0(p_{\varphi}, p_{\theta}, p_{\psi}, \varphi, \Theta, \Psi)}{\partial \Theta} \tau; \\ P_{\psi} = p_{\psi} + \frac{\partial H_0(p_{\varphi}, p_{\theta}, p_{\psi}, \varphi, \theta, \Psi)}{\partial \Psi} \tau, \end{array} \right. \quad (4)$$

где τ – шаг интегрирования.

Или, учитывая [3], запишем алгоритм в форме удобной для компьютерного моделирования:

I. Импульс-координата:

$$\begin{cases} P\Phi = P\Phi - D\Phi T \cdot \tau; \\ P\Theta = P\Theta - D\Theta T \cdot \tau; \\ P\Psi = P\Psi - D\Psi T \cdot \tau; \\ \Phi = \Phi + DP\Phi T \cdot \tau; \\ \Theta = \Theta + DP\Theta T \cdot \tau; \\ \Psi = \Psi + DP\Psi T \cdot \tau. \end{cases} \quad (5)$$

II. Координата-импульс:

$$\begin{cases} \Phi = \Phi + DP\Phi T \cdot \tau; \\ \Theta = \Theta + DP\Theta T \cdot \tau; \\ \Psi = \Psi + DP\Psi T \cdot \tau; \\ P\Phi = P\Phi - D\Phi T \cdot \tau; \\ P\Theta = P\Theta - D\Theta T \cdot \tau; \\ P\Psi = P\Psi - D\Psi T \cdot \tau. \end{cases} \quad (6)$$

Фазовый каскад преобразований (5), (6) дискретно воспроизводит свободное вращение тела в условиях действия малого консервативного возмущения.

Канонические алгоритмы интегрирования уравнений динамики в условиях действия потенциальных сил получаются применением канонических преобразований (1), (2) к динамическим уравнениям:

I. Импульс-координата:

$$\begin{cases} P_\Phi = p_\Phi - \frac{\partial H(P_\Phi, p_\Phi, P_\Psi, \Phi, \Theta, \Psi)}{\partial \Phi} \tau; \\ P_\Theta = p_\Theta - \frac{\partial H(P_\Phi, p_\Phi, P_\Psi, \Phi, \Theta, \Psi)}{\partial \Theta} \tau; \\ P_\Psi = p_\Psi - \frac{\partial H(P_\Phi, p_\Phi, P_\Psi, \Phi, \Theta, \Psi)}{\partial \Psi} \tau; \\ \Phi = \Phi + \frac{\partial H(P_\Phi, p_\Phi, P_\Psi, \Phi, \Theta, \Psi)}{\partial P_\Phi} \tau; \\ \Theta = \Theta + \frac{\partial H(P_\Phi, p_\Phi, P_\Psi, \Phi, \Theta, \Psi)}{\partial P_\Theta} \tau; \\ \Psi = \Psi + \frac{\partial H(P_\Phi, p_\Phi, P_\Psi, \Phi, \Theta, \Psi)}{\partial P_\Psi} \tau. \end{cases} \quad (7)$$

II. Координата-импульс:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = \varphi + \frac{\partial H(p_\varphi, p_\theta, p_\psi, \varphi, \theta, \psi)}{\partial p_\varphi} \tau; \\ \Theta = \theta + \frac{\partial H(p_\varphi, p_\theta, p_\psi, \varphi, \theta, \psi)}{\partial p_\theta} \tau; \\ \Psi = \psi + \frac{\partial H(p_\varphi, p_\theta, p_\psi, \varphi, \theta, \psi)}{\partial p_\psi} \tau; \\ P_\varphi = p_\varphi - \frac{\partial H(p_\varphi, p_\theta, p_\psi, \Phi, \Theta, \Psi)}{\partial \Phi} \tau; \\ P_\theta = p_\theta - \frac{\partial H(p_\varphi, p_\theta, p_\psi, \varphi, \Theta, \Psi)}{\partial \Theta} \tau; \\ P_\psi = p_\psi - \frac{\partial H(p_\varphi, p_\theta, p_\psi, \varphi, \theta, \Psi)}{\partial \Psi} \tau, \end{array} \right. \quad (8)$$

где τ – шаг интегрирования.

Учитывая представления, полученные в работе [3], аналогично (5), (6) получим:

I. Импульс-координата:

$$\left\{ \begin{array}{l} P\Phi = P\Phi - (D\Phi T + MY1) \tau; \\ P\Theta = P\Theta - (D\Theta T + MY2) \tau; \\ P\Psi = P\Psi - (D\Psi T + MY3) \tau; \\ \Phi = \Phi + DP\Phi T \cdot \tau; \\ \Theta = \Theta + DP\Theta T \cdot \tau; \\ \Psi = \Psi + DP\Psi T \cdot \tau. \end{array} \right. \quad (9)$$

II. Координата-импульс:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = \Phi + DP\Phi T \cdot \tau; \\ \Theta = \Theta + DP\Theta T \cdot \tau; \\ \Psi = \Psi + DP\Psi T \cdot \tau \\ P\Phi = P\Phi - (D\Phi T + MY1) \tau; \\ P\Theta = P\Theta - (D\Theta T + MY2) \tau; \\ P\Psi = P\Psi - (D\Psi T + MY3) \tau. \end{array} \right. \quad (10)$$

Фазовые каскады преобразований (9), (10) в зависимости от вида функции потенциальной энергии и начальных условий дискретно воспроизводят вращательное, колебательное движение, а также условия покоя относительно осей координат в условиях действия малых консервативных возмущений.

Канонические алгоритмы интегрирования уравнений движения в условиях действия диссипативных сил $Q_\varphi, Q_\theta, Q_\psi, P_\varphi, P_\theta, P_\psi$ имеют вид:

I. Импульс-координата:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_\varphi = p_\varphi - \frac{\partial H(p_\varphi, p_\theta, p_\psi, \varphi, \theta, \psi)}{\partial \varphi} \tau - Q_\varphi \cdot \tau; \\ P_\theta = p_\theta - \frac{\partial H(p_\varphi, p_\theta, p_\psi, \varphi, \theta, \psi)}{\partial \theta} \tau - Q_\theta \cdot \tau; \\ P_\psi = p_\psi - \frac{\partial H(p_\varphi, p_\theta, p_\psi, \varphi, \theta, \psi)}{\partial \psi} \tau - Q_\psi \cdot \tau; \\ \Phi = \varphi + \frac{\partial H(P_\varphi, P_\theta, P_\psi, \varphi, \theta, \psi)}{\partial P_\varphi} \tau; \\ \Theta = \theta + \frac{\partial H(p_\varphi, P_\theta, p_\psi, \varphi, \theta, \psi)}{\partial P_\theta} \tau; \\ \Psi = \psi + \frac{\partial H(p_\varphi, p_\theta, P_\psi, \varphi, \theta, \psi)}{\partial P_\psi} \tau. \end{array} \right. \quad (11)$$

II. Координата-импульс:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = \varphi + \frac{\partial H(p_\varphi, p_\theta, p_\psi, \varphi, \theta, \psi)}{\partial p_\varphi} \tau; \\ \Theta = \theta + \frac{\partial H(p_\varphi, p_\theta, p_\psi, \varphi, \theta, \psi)}{\partial p_\theta} \tau; \\ \Psi = \psi + \frac{\partial H(p_\varphi, p_\theta, p_\psi, \varphi, \theta, \psi)}{\partial p_\psi} \tau; \\ P_\varphi = p_\varphi - \frac{\partial H(P_\varphi, P_\theta, P_\psi, \Phi, \Theta, \Psi)}{\partial \Phi} \tau - D_\varphi \cdot \tau; \\ P_\theta = p_\theta - \frac{\partial H(p_\varphi, P_\theta, P_\psi, \varphi, \Theta, \Psi)}{\partial \Theta} \tau - D_\theta \cdot \tau; \\ P_\psi = p_\psi - \frac{\partial H(p_\varphi, p_\theta, P_\psi, \varphi, \theta, \Psi)}{\partial \Psi} \tau - D_\psi \cdot \tau. \end{array} \right. \quad (12)$$

Или, учитывая [3], запишем алгоритм в форме удобной для компьютерного моделирования:

I. Импульс-координата:

$$\begin{cases} P\Phi = P\Phi + (-D\Phi T + MY1 - MQY1 - MQQY1)\tau; \\ P\Theta = P\Theta + (-D\Theta T + MY2 - MQY1 - MQQY2)\tau; \\ P\Psi = P\Psi + (-D\Psi T + MY3 - MQY3 - MQQY3)\tau; \\ \Phi = \Phi + DP\Phi T \cdot \tau; \\ \Theta = \Theta + DP\Theta T \cdot \tau; \\ \Psi = \Psi + DP\Psi T \cdot \tau. \end{cases} \quad (13)$$

II. Координата-импульс:

$$\begin{cases} \Phi = \Phi + DP\Phi T \cdot \tau; \\ \Theta = \Theta + DP\Theta T \cdot \tau; \\ \Psi = \Psi + DP\Psi T \cdot \tau; \\ P\Phi = P\Phi + (-D\Phi T + MY1 - MQY1 - MQQY1)\tau; \\ P\Theta = P\Theta + (-D\Theta T + MY2 - MQY1 - MQQY2)\tau; \\ P\Psi = P\Psi + (-D\Psi T + MY3 - MQY3 - MQQY3)\tau; \\ \Phi = \Phi + DP\Phi T \cdot \tau; \\ \Theta = \Theta + DP\Theta T \cdot \tau; \\ \Psi = \Psi + DP\Psi T \cdot \tau. \end{cases} \quad (14)$$

Фазовые каскады преобразований (13), (14) воспроизводят движение твердого тела в потенциальном поле, в условиях действия моментов диссипативных сил.

В работах [1, 2, 4] доказано, что преобразования (5), (6) принадлежат к классу канонических преобразований. Одновременно они являются алгоритмами численного интегрирования дифференциальных уравнений вращательного движения свободного твердого тела.

Движение центра масс соответствует трехмерному движению материальной точки. Таким образом, для полного описания динамики твердого тела к каноническим преобразованиям вращения (5), (6) необходимо добавить канонические преобразования, соответствующие движению точки центра масс [1, 2, 4].

Формально преобразования (5), (6) описывают действие сил инерции в системе отсчета, связанной с твердым телом. В более общем случае, кроме сил инерции, на твердое тело будут действовать обобщенно-потенциальные и диссипативные силы, а канонические преобразования фазового пространства, описывающие действие таких сил, рассмотрены в работах [1, 2, 4]. Применительно к полученным преобразованиям, это соответствует появлению дополнительных слагаемых в правой части выражений (13) и (14).

Особенностью канонического метода интегрирования, реализованного в полученных алгоритмах, является возможность учета влияния самого процесса интегрирования в форме малых консервативных возмущений [5]. Поскольку наличие малых консервативных возмущений есть неременное условие протекания всех реальных процессов, то использование предлагаемого метода позволяет повысить адекватность численных (компьютерных) моделей движения. Еще более важным

является то, что устойчивость метода канонического интегрирования к накоплению погрешности счета является следствием фундаментального свойства реальных систем обладать устойчивостью к возникновению хаоса при малых консервативных возмущениях. Как показано в работах [6–10], устойчивость канонических алгоритмов является следствием результатов канонической теории возмущений [11] и, в частности, известной теоремы Колмогорова – Арнольда – Мозера [12, 13].

Заметим, что предложенные алгоритмы имеют минимально возможное количество арифметических операций и, следовательно, обеспечивают максимально возможную скорость счета. Таким образом, использование предложенного метода позволяет одновременно повысить степень адекватности, надежности и быстродействия при создании компьютерных моделей в динамике твердого тела.

Список литературы

1. *Ефимов И. Н., Морозов Е. А.* Каноническое интегрирование гамильтоновых систем : моногр. – Екатеринбург ; Ижевск : Изд-во Ин-та экономики УрО РАН, 2006. – С. 135.
2. *Ефимов И. Н., Морозов Е. А.* Каноническое интегрирование динамических систем. – Екатеринбург ; Ижевск : Изд-во Ин-та экономики УрО РАН, 2006. – С. 198.
3. Канонические преобразования фазового пространства в динамике твердого тела / И. Н. Ефимов, Е. А. Морозов, К. М. Селиванов и др. // Вестн. Ижев. гос. техн. ун-та. – 2009. – № 4. – С. 190–195.
4. *Ефимов И. Н., Морозов Е. А.* Канонические преобразования и канонические ряды гамильтоновых систем // Вестн. Перм. гос. техн. ун-та. – 2005. – № 3. – С. 80–88.
5. Математическая энциклопедия : в 5 т. / гл. ред. И. М. Виноградов. – М. : Совет. энцикл., 1977–1984.
6. *Ефимов И. Н., Морозов Е. А.* Канонический метод интегрирования нелинейных динамических систем // Нелинейный динамический анализ – 2007 : тез. докл. междунар. конгр., Санкт-Петербург, 4–8 июня 2007 г. / С.-Петерб. гос. ун-т. – СПб., 2007. – С. 274.
7. *Морозов Е. А.* О консервативном характере возмущений метода численного интегрирования // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. мат. Математика. Механика. Информатика. – Т. 11, вып. 3. – Тула : Изд-во ТулГУ, 2005. – С. 142–145.
8. *Ефимов И. Н., Морозов Е. А.* Устойчивость канонического метода интегрирования гамильтоновых систем // Интеллектуал. системы в пр-ве. – 2003. – № 1. – С. 23–38.
9. *Морозов Е. А.* Об устойчивости интегральных кривых в сопряженных пространствах // Вестн. Ижев. гос. техн. ун-та. – 2005. – № 3. – С. 39–41.
10. *Ефимов И. Н., Морозов Е. А., Стерхов В. А.* Устойчивые алгоритмы численного интегрирования // Информационные системы и модели в научных исследованиях, промышленности и экологии : докл. 5-й Всерос. науч.-тех. конф., 30 июня 2006 г., г. Тула / под общ. ред. д-ра техн. наук, проф. В. М. Панарина. – Тула : Изд-во ТулГУ, 2006. – С. 106–108.
11. *Ефимов И. Н., Морозов Е. А., Германюк Г. Ю.* Каноническое интегрирование нелинейных систем в условиях параметрического резонанса // Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании : сб. материалов 2-й Междунар. науч. конф. – Екатеринбург : УГТУ – УПИ, 2008. Вып. 4. – С. 25–28.
12. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М. : Наука, 1974. – 432 с.
13. *Мозер Ю.* КАМ – теория и проблема устойчивости. – Ижевск : Регуляр. и хаот. динамика, 2001. – 448 с.

* * *

К. М. Selivanov, Postgraduate, Chaikovsky Technological Institute, Branch of Izhevsk State Technical University

Canonical Method of Integration at Investigation of Solid Body Movement

A requirement for stable algorithm creation based on a canonical method of integration of rigid-body dynamics equations is represented.

Keywords: canonical method, dynamic equation, stability, solid body

Получено 19.05.10

УДК 519.853.4

В. А. Тененёв, доктор физико-математических наук, профессор;

А. В. Тененёва, студентка

Ижевский государственный технический университет

ОБУЧЕНИЕ НЕЧЕТКИХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ГЕНЕТИЧЕСКИМ АЛГОРИТМОМ

Для обработки данных рассматривается применение нечеткой нейронной сети, основанной на правилах, построенных методом деревьев решений. Для оптимизации параметров сети применяется гибридный генетический алгоритм с вещественным кодированием. Установлено преимущество оптимизированных нечетких сетей над обычными многослойными нейронными сетями при решении задач аппроксимации.

Ключевые слова: обработка данных, нечеткие нейронные сети, генетический алгоритм, аппроксимация

Для извлечения закономерностей из набора эмпирических данных широко используются нейронные сети различных типов и адаптивные системы нечеткого вывода. Объединение принципов нечеткого логического вывода и нейросетевой структуры приводит к нечетким нейронным сетям [1]. Рассмотрим один из вариантов нечеткой сети – нечеткую нейронную сеть Такаги – Сугено – Канга (TSK), содержащую модель вывода с пятью слоями.

Нечеткая сеть основана на нескольких правилах M . Под правилом понимается логическая конструкция, представленная в виде *if A then B* ($A \rightarrow B$). Для вектора $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$, где $A_i, i = \overline{1, M}$ – это лингвистические переменные с соответствующими им функциями принадлежности $\mu_{A_i}(x)$, построенные в пространстве входных значений. Выходной результат правила представлен в виде $y_i(\mathbf{x}) = p_{i0} + \sum_{j=1}^n p_{ij}x_j$. Функция принадлежности представляется обобщенной

функцией Гаусса $\mu_{A_i}(x_j) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_j - c_i}{\sigma_i}\right)^{2b_i}}$. Результат *if A then B* задается алгебраическим произведением

$$\mu_{A_i}(x) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{x_j - c_i}{\sigma_i}\right)^{2b_i}}.$$