3) как для экспериментально, так и для численно полученных кривых можно отметить более высокий коэффициент звукопоглощения в случае вакуумирования сотовой конструкции (в более широком диапазоне частот).

На рис. 5 приведено сравнение так называемых нормальных коэффициентов звукопоглощения, полученных численно, с диффузными, полученных в малой реверберационной камере объемом 2 м^3. Существующие расхождения кривых звукопоглощения во всех случаях в левой части графика, т. е. с частот ниже 1 100 Гц, можно объяснить особенностью метода реверберационной камеры, с правой части графика – особенностью смоделированной трубы (в частности, ее размерами, позволяющими исследовать только частоты в диапазоне 200–1 800 Гц).

Список литературы

1. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. – М. : Наука, 1966. – 520 с.

2. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. – М. : Наука, 1981. – 208 с.

3. *Деклу Ж.* Метод конечных элементов. – М. : Мир, 1976.

* * *

A. P. Tyurin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Izhevsk State Technical University

Numerical modelling of a sound absorption by deaerated cellular designs

The finite-element approach to sound absorption estimation by deaerated and not deaerated cellular designs is considered. The problem solution was carried out by finding the sound pressure complex values in microphone positions of an impedance pipe with the subsequent calculation of sound absorption factors. Comparison of numerical and physical results of experiments has shown satisfactory coincidence.

Keywords: finite element, sound pressure, transfer function, sound absorption coefficient

Получено 20.04.10

УДК 537.812

Б. И. Урусова, доктор физико-математических наук, профессор;
У. М. Лайпанов, старший преподаватель
Карачаево-Черкесский государственный университет им. У. Д. Алиева

ЗАКОН ПОДОБИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Показано, что подобие электромагнитных полей в геометрически подобных системах может иметь место, если, во-первых, в соответствующих срединах сопротивления изменены пропорционально и, во-вторых, при увеличении всех сопротивлений и линейных размеров частота будет увеличена.

Ключевые слова: электромагнитные поля, дифференциальные уравнения, граничные условия, метод интенсивности, операторы, вектор-потенциал, плотность тока, электропроводность

Целью данной работы является показать, что подобие электромагнитных полей в геометрически подобных системах может иметь место, если в соответствующих срединах сопротивления изменены пропорционально и при увеличении всех сопротивлений и линейных размеров частота тоже должна увеличиваться.

Необходимость решения данной проблемы диктуется тем, что она имеет немаловажное значение в модельных установках, которые применяются в электроразведке.

Для достижения поставленной цели использовали: 1) установку, состоящую из кабеля с двумя заземлениями, на концах в среде *a*, окруженную средами *b*, *c*, *d*...; 2) дифференциальные уравнения электромагнитного поля; 3) граничные условия и комплексные параметры; 4) метод интенсивности, который отличается от других методов малой частотой и имеет особенность – преимущество наглядности.

Для описания геометрической конфигурации всей этой системы мы ввели вместо линейных координат (x, y, z) относительные координаты (ξ, η, ζ) и выбрали характерную длину l (расстояние между заземлениями):

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{z}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{l}. \tag{1}$$

Для описания другой системы, увеличенной в S раз, мы ввели относительные координаты, только характерная длина уже не l, а $l' = Sl$.

Если в обеих системах начало координат и направление осей выбрать так, чтобы они были подобно расположены, тогда уравнения граничных поверхностей в относительных координатах и относительные координаты отдельных точек и линий останутся без изменений при переходе от одной системы к другой. Кроме этого, еще в этих двух системах комплексные амплитуды составляющих периодического электромагнитного поля должны удовлетворять соотношениям:

$$\frac{E_x}{E'_x} = \frac{E_y}{E'_y} = \frac{E_z}{E'_z} = e; \tag{2}$$

$$\frac{I_x}{I'_x} = \frac{I_y}{I'_y} = \frac{I_z}{I'_z} = j; \tag{3}$$

$$\frac{H_x}{H'_x} = \frac{H_y}{H'_y} = \frac{H_z}{H_z} = h, \tag{4}$$

где e, j, h – постоянные, не зависящие от координат. В силу этих соотношений можно решить для всех систем, удовлетворяющих не только геометрическим, но и электромагнитным условиям, подобия.

Ограничиваясь случаем однородных средин, разделенных граничными поверхностями, перепишем дифференциальные уравнения и граничные условия в относительных координатах. Для этого воспользуемся символическими формулами перехода:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial \xi}; \ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial \eta}; \ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial \zeta}; \nabla = \frac{1}{l}\nabla^*; \tag{5}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{l^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right) = \frac{1}{l^2}\Delta^*, \tag{6}$$

где ∇^* и Δ^* – операции градиента и Лапласа по отношению к относительным координатам. На основании этих соотношений мы можем написать, пользуясь оператором ∇ как символическим вектором [1–2]:

$$div\,A = (\nabla A) = \frac{1}{l}\ (\nabla^* A)\,; \tag{7}$$

$$grad\,\varphi = \nabla\varphi = \frac{1}{l}\nabla^*\varphi\,, \tag{8}$$

где A и φ являются соответственно электромагнитными вектор-потенциалом и скалярным потенциалом.

Для определения величин A и φ искали решения уравнений электромагнитного поля в виде

$$E = E_0 e^{i\omega t}, \tag{9}$$

где E – напряженность электрического поля; E_0 – амплитуда плоской монохроматической волны, зависящая от координат; $\omega = 2\pi f$ – круговая частота.

Учитывая, что распространение плоской (монохроматической волны с круговой частотой ω) в неограниченной диэлектрической среде ε со слабой магнитной проницаемостью $\mu \approx 1$, объемные заряды отсутствуют $\rho = 0$, и для электрической – ε_0 и магнитной – μ_0 постоянных выполняется условие $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ в расширенной системе СГС, то для материальной среды справедливы следующие уравнения Максвелла:

$$\left.\begin{aligned} &rot\,H = i\frac{\omega\varepsilon}{c}E + \frac{4\pi}{c}j \\ &div\,H = 0 \\ &rot\,E = -\frac{i\omega}{c}H \\ &div\,E = 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где H – напряженность магнитного поля; c – скорость света; ε – диэлектрическая проницаемость среды; $j = \sigma E$ – плотность тока; σ – электропроводность.

Второе уравнение системы (10) позволяет утверждать, что существует такой вектор A, который связан с H соотношением

$$H = rot\,A, \tag{11}$$

что учтем в третьей формуле системы (10):

$$rot\left(E + \frac{i\omega}{c}A\right) = 0, \tag{12}$$

откуда следует, что

$$E = -grad\,\varphi - \frac{i\omega}{c}A. \tag{13}$$

Для определения величин A и φ подставим формулы (11) и (13) в первую формулу системы (10) и получим:

$$rot\ rot\ A = grad\ div\ A - \Delta A = -\frac{i\omega\varepsilon + 4\pi\sigma}{c}\left(grad\varphi + \frac{i\omega}{c}A\right), \tag{14}$$

или

$$grad\left(div\ A + \frac{i\omega\varepsilon + 4\pi\sigma}{c}\varphi\right) = \Delta A - \frac{i4\pi\sigma\omega - \omega^2\varepsilon}{c^2}A. \tag{15}$$

Этому уравнению мы удовлетворяем, положив

$$div\ A + \frac{i\omega\varepsilon + 4\pi\sigma}{c}\varphi = 0, \tag{16}$$

$$\Delta A = k^2 A, \tag{17}$$

где $k^2 = \frac{i4\pi\sigma\omega - \omega^2\varepsilon}{c^2}$ – комплексная постоянная, заключает в себе свойства среды.

Если через величину k^2 выразить первую формулу системы (10), получим:

$$\frac{i4\pi\sigma\omega - \omega^2\varepsilon}{c^2} = \frac{ck^2}{i\omega}. \tag{18}$$

Затем, учитывая (18) в формуле (16), получим:

$$\varphi = -\frac{i\omega}{ck^2}\ div\ A. \tag{19}$$

Далее, подставляя (13) в четвертую формулу системы (10) и используя (19), имеем:

$$divE = -\Delta\varphi - \frac{i\omega}{c}div\ A = -\Delta\varphi + k^2\varphi = 0. \tag{20}$$

Если в формуле (18) вместо угловой частоты ω ввести f и учесть $\sigma = \frac{1}{\rho}$, получим:

$$k^2 = \frac{i4\pi f - f^2\varepsilon\rho}{\rho} = 4\pi\sqrt{i\frac{5f}{\rho}\left(1 + \frac{i\varepsilon f\rho}{1{,}8\cdot 10^{11}}\right)}. \tag{21}$$

Преобразуем к относительным координатам волновое уравнение (17) для *a*-й среды:

$$\Delta A^{(a)} = k_a^2\ A^{(a)} \to \Delta^* A^{(a)} = \left(k_a\, l\right)^2 A^{(a)} \tag{22}$$

и граничные условия для границы средин *a* и *b*:

$$A^{(a)} = A^{(b)} \to A^{(a)} = A^{(b)}, \tag{23}$$

$$\nabla_n\ A_\tau^{(a)} = \nabla_n\ A_\tau^{(b)} \to \nabla^*{}_n\ A_\tau^{(a)} = \nabla^*{}_n\ A_\tau^{(b)}, \tag{24}$$

$$\frac{1}{k_a^2}(\nabla\ A^{(a)}) = \frac{1}{k_b^2}(\nabla A^{(b)}) \to \frac{1}{(k_a l)^2}(\nabla^*\ A^{(a)}) = \frac{1}{(k_b\ \ l)^2}\ (\nabla^* A^{(b)}), \tag{25}$$

где A_τ – тангенциальная слагающая вектора A.

Введем комплексные параметры для каждой среды:

$$\tilde{P}_a^0 = k_a l \, , \tag{26}$$

$$\tilde{P}_b^0 = k_b l \, . \tag{27}$$

Тогда волновое уравнение для среды a в относительных координатах примет вид:

$$\Delta^* A^{(a)} = \tilde{P}_a^2 A^{(a)} \, , \tag{28}$$

а граничные условия на границе между (a) и (b) будут записаны [2]:

$$\left.\begin{aligned} & A^{(a)} = A^{(b)} \, ; \\ & \nabla_n^* \, A_\tau^{(a)} = \nabla_n^* \, A_\tau^{(b)} \, ; \\ & \frac{1}{\tilde{P}_a^2} (\nabla^* A^{(a)}) = \frac{1}{\tilde{P}_a^2} (\nabla^* A^{(b)}). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Если имеются две системы, в которых, кроме геометрического подобия в расположении источников поля и границ средин, еще выполнено условие, что параметры $\tilde{P}$ в соответственных срединах одинаковы, то формулы (28) и (30) показывают, что уравнения и граничные условия в относительных координатах будут тождественными, и любое решение, для одной системы, окажется решением для другой (с точностью до произвольного постоянного множителя, ввиду однородности уравнений).

Таким образом, мы получили, что для подобия электромагнитных полей, кроме геометрического подобия, еще необходимо, чтобы выполнялись условия для каждой пары соответствующих средин, входящих в геометрически подобно в систему штрихованную и нештрихованную, т. е.

$$\tilde{P} = kl = 4\pi \sqrt{i \frac{5f}{\rho} \left(1 + i \frac{\varepsilon f \rho}{1{,}8 \cdot 10^{11}} \right) l^2} = 4\pi \sqrt{i \frac{5f'}{\rho'} \left(1 + i \frac{\varepsilon' f' \rho}{1{,}8 \cdot 10^{11}} \right) l'^2} = k'l' = \tilde{P}'. \tag{30}$$

Если пренебречь током смещения $(\varepsilon = 0)$, то мы имеем для $\tilde{P}$ выражение

$$\tilde{P} = 4\pi \sqrt{i \frac{5 f l^2}{\rho}}, \tag{31}$$

и равенство параметров соответствующих средин приводит к соотношению

$$\frac{f l^2}{\rho} = \frac{f' l'^2}{\rho'} \, . \tag{32}$$

Так как f, l, f', l' от номера среды не зависят, то из уравнений

$$\frac{f l^2}{\rho_a} = \frac{f' l'^2}{\rho_a'} \, , \tag{33}$$

$$\frac{f\,l^2}{\rho_b} = \frac{f'\,l'^2}{\rho_b'} \qquad (34)$$

следует, что

$$\frac{\rho_a}{\rho_b} = \frac{\rho_a'}{\rho_b'} = \text{const.} \qquad (35)$$

При выполнении условия

$$\frac{\varepsilon f \rho}{1{,}8\cdot 10^{11}} \le 1 \qquad (36)$$

можно сказать, что подобие электромагнитных полей в геометрически подобных системах может иметь место, если, во-первых, в соответствующих срединах сопротивления изменены пропорционально и, во-вторых, при увеличении всех сопротивлений в m раз и линейных размеров в S раз частота будет увеличена в υ раз, причем

$$\frac{\upsilon S^2}{m} = 1, \text{ или } \upsilon = \frac{m}{S^2}. \qquad (37)$$

В общем случае подобие будет иметь место, если выполняется условие (30), которое распадается на два:

$$\frac{fl^2}{\rho} = \frac{f'l'^2}{\rho'} \qquad (38)$$

и новое условие

$$\varepsilon f^2 l^2 = \varepsilon' f'^2 l'^2 \qquad (39)$$

одновременно для всех пар соответствующих средин.

Первое условие по-прежнему требует, чтобы

$$\rho_a : \rho_b : \ldots : \rho_m : \ldots = \rho_a' : \rho_b' : \ldots \rho_m' : \ldots, \qquad (40)$$

а второе, комбинированное с первым, приводит к требованию

$$\varepsilon f \rho = \varepsilon' f' \rho' \qquad (41)$$

или

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{f'\rho'}{f\rho}. \qquad (42)$$

Тогда для соответствующих средин мы имеем:

$$\frac{\varepsilon_a \rho_a}{\varepsilon_b \rho_b} = \frac{\varepsilon_a' \rho_a'}{\varepsilon_b' \rho_b'} \qquad (43)$$

или, в силу (40):

$$\varepsilon_a : \varepsilon_b : \ldots : \varepsilon_m : \ldots = \varepsilon_a' : \varepsilon_b' : \ldots \varepsilon_m' : \ldots. \qquad (44)$$

Условия (38), (39), (40) и (44) необходимы для того, чтобы подобие имело место.

Для случая одной неограниченной среды, когда изменение линейных масштабов определяется изменением размеров питающей установки, полученные соотношения также остаются в силе; если пренебречь током смещения, то достаточно условий (38) и (40).

Наиболее важным является случай однородного проводящего полупространства (земля с плоской поверхностью), граничащего с непроводником (воздух).

Пренебрегая токами смещения, как в воздухе, так и в почве, имеем, что параметр воздуха равен нулю, и тогда характер задачи определяется только характером почвы, определенным размером установки, частотой и удельным сопротивлением. А при равенстве параметров мы имеем подобные поля, поэтому достаточно рассчитать поле данной установки, для ряда значений одной только переменной величины $\tilde{P}$, чтобы охватить всевозможные случаи, причем $\tilde{P} = 0$ соответствует постоянному току.

При больших сопротивлениях, низких частотах и малых размерах установки получаем малые значения параметра.

Полученный закон подобия имеет большое практическое значение при проектировании модельных установок.

Список литературы

1. *Очан Ю. С.* Методы математической физики. – М. : Высш. шк., 1965.

2. *Левин В. И., Гросберг Ю. И.* Дифференциальные уравнения математической физики. – М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1951.

* * *

B. I. Urusova, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Karachai-Cherkess State University after U. D. Aliev

U. M. Laipanov, Senior Teacher, Karachai-Cherkess State University after U. D. Aliev

Similarity Law for Electromagnetic Fields

It is shown that electromagnetic fields, similarity in geometrically similar systems may take place if the resistances in corresponding middle parts are proportionally changed, and if at increase of all resistances and linear dimensions the frequency will be increased.

Keywords: electromagnetic fields, differential equation, boundary conditions, intensity method, operators, vector potential, current density, electric conduction

Получено 24.03.10