УДК 519.688

В. В. Шаяхметов, кандидат технических наук, доцент
Башкирский государственный университет

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО КОЛИЧЕСТВА ЭТАПОВ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

В исследовании математических моделей эксплуатации технических систем критериальной является задача определения необходимых и достаточных условий существования оптимального периода технического обслуживания и количество его этапов. Показано, что при произвольных законах распределения исходных случайных величин на основе использования аппарата теории полумарковских процессов и операционного исчисления существует искомый программно-математический инструментарий.

Ключевые слова: техническое обслуживание, эффективность технической системы, оптимальное число стадий технического обслуживания, марковский процесс, преобразование Лапласа – Стилтьеса, краткое сокращение, минимальное время выполнения технического процесса

При разбиении технического обслуживания на автономно выполняемые этапы на практике возникает задача их оптимизации. Это обусловлено тем, что разбиение связано с дополнительными затратами времени, необходимого, например, для проверки работоспособности технической системы, на которой проводится j-й этап технического обслуживания. С другой стороны, разбиение технического обслуживания на этапы снижает действие возмущающих факторов, связанных с началом использования по назначению. В этих условиях существует некоторое оптимальное число этапов, при котором обеспечиваются наилучшие значения показателей качества проведения технического обслуживания.

Сформулируем задачу. Пусть техническое обслуживание системы, как и раньше, проводится во время ожидания использования по назначению. В процессе проведения обслуживания может начинаться использование по назначению с интенсивностью α. В этом случае система переводится за случайное время $\bar{t}_{\text{ПГ}}$ с функцией распределения $A_{\text{ПГ}}(t) = P\{t_{\text{ПГ}} < t\}$ и математическим ожиданием (МОЖ) $t_{\text{ПГ}}$ в состояние готовности. Работа, выполненная на j-м этапе технического обслуживания, обесценивается, и техническое обслуживание начинается с начала прерванного этапа. Длительность одного этапа – случайная величина $t_{\text{э}j}$ с общей функцией распределения $F_{\text{э}}(t) = P\{t_{\text{э}j} < t\}$ и одинаковым МОЖ $t_{\text{э}}$. В момент окончания очередного этапа затрачивается дополнительное время на проверку работоспособности обслуживаемой части технических систем. На это затрачивается случайное время $\tau_{\text{КР}}$ с функцией распределения $F_{\text{КР}}(t) = P\{\tau_{\text{КР}} < t\}$ и МОЖ $\bar{\tau}_{\text{КР}}$. При проведении технического обслуживания могут возникать отказы с суммарной интенсивностью $\lambda = \sum_{1}^{i} \lambda_i$, $i \geq 1$. Время восстановления работоспособности в этом случае – случайная величина $t_{\text{В}i}$ с функцией распределения $F_{\text{В}i} = P\{t_{\text{В}i} < t\}$ и МОЖ $\bar{\tau}_{\text{КР}}$. В момент окончания аварийного ремонта проведение технического обслуживания продолжается.

Будем считать, что функции распределения $A_{\text{ПГ}}(t)$, $F_З(t)$, $F_{\text{КР}}(t)$ и $F_{\text{В}i}(t)$ соответствующих случайных величин $t_{\text{ПГ}}$, $t_{эj}$, $\tau_{\text{КР}}$, $t_{\text{В}i}$ $(i \geq 1,\ j = \overline{1,\ m})$ имеют непрерывные плотности и конечные значения МОЖ дисперсий.

Для сформулированных условий требуется определить вероятность выполнения всего объема технического обслуживания за отведенное оперативное время t и МОЖ реального времени выполнения технического обслуживания $t_{\text{ВТО}}$, а также оптимальное число этапов m_{opt}, при котором обеспечивается наименьшее время выполнения технического обслуживания.

Найдем функции распределения времени проведения одного этапа технического обслуживания, которое включает в себя время собственно выполнения операций обслуживания и дополнительное время проведения контроля работоспособности. Обозначим через t_{2K-1} и $t_{2K}(K \geq 1)$ моменты соответственно начала использования по назначению и перевода системы в состояние готовности, и пусть $t_0 = 0$ есть начальный момент рассмотрения процесса. Опишем функционирование системы на одном этапе с помощью случайного процесса $\xi(t)$, который линейно возрастает на отрезках времени $[t_{2K-2},\ t_{2K-1}]$, постоянен в интервалах $[t_{2K-1},\ t_{2K}]$, а в моменты $t_{2K}(K \geq 1)$ совершает скачок в начало данного этапа. Будем считать процесс непрерывным справа и полагать, что $\xi(0) = 0$ с вероятностью единица.

Процесс $\xi(t)$ не является марковским. Однако его можно преобразовать в марковский процесс путем введения «марковской добавки» $\eta(t)$, которую определим следующим образом: $\eta(t) = t - \sup\limits_{K \geq 1}\{t_{2K-1} \leq t\}$. Это означает, что $\eta(t) = x$, если последний перевод системы в готовность начался в момент $t = x$. Двумерный процесс $Y(t) = \{\xi(t),\ \eta(t)\}$ представляет собой непрерывный справа однородный марковский процесс. Найдем распределение времени γ_0 достижения этим процессом случайного уровня $t_э + \tau_{\text{КР}}$, определяемого общим временем проведения технического обслуживания на одном этапе в идеальных условиях. Для этого обозначим через γ_1 и γ_2 соответственно время непосредственного выполнения этапа обслуживания и проведения контроля работоспособности с учетом начала использования по назначению и перевода системы в готовность. Тогда, используя формулу полной вероятности, можно записать для искомой случайной величины γ_0 следующее стохастическое соотношение

$$\gamma_0 = \gamma_1 + \gamma_2\,, \tag{1}$$

где

$$\gamma_2 = \begin{cases} Z : \int\limits_0^\infty e^{-\gamma Z}\, dF_{\text{КР}}(z); \\ Z + t_{\text{В}1} + \gamma_1 : \int\limits_0^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i z}\, \overline{F}_{\text{КР}}(z)\, dz. \end{cases}$$

Здесь двоеточие означает «с вероятностью», а

$$\overline{F}_{Э}(z)=1-F_{Э}(z);\ \overline{F}_{КР}(z)=1-F_{КР}(z).$$

Пусть $J_0(s)=M\times\exp(-s\gamma_0)$; $J_1(s)=M\times\exp(-s\gamma_1)$; $J_2(s)=M\times\exp(-s\gamma_2)$; есть преобразования Лапласа – Стилтьеса соответствующих случайных величин $\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2$, а $\tilde{A}_{ПГ}(s)=\int\limits_0^\infty e^{-st}dA_{ПГ}(t);\ \overline{F}_{Bi}(s)=\int\limits_0^\infty e^{-st}dF_i(t).$

Переходя в (1) к преобразованию Лапласа – Стилтьеса, получаем

$$J_0(s)=J_1(s)J_2(s),$$

где $J_1(s)=\int\limits_0^\infty e^{-(\alpha+s)z}dF_3(z)+J_1(s)\int\limits_0^\infty e^{-(\alpha+s)z}\overline{F}_3(z)\,dz\times d\tilde{A}_{ПГ}(s);$

$$J_2(s)=\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda+s)z}dF_{КР}(z)+J_1(s)\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda+s)z}\overline{F}_{КР}dz\times\sum_{t\ge1}^{i}\lambda_i\tilde{F}_{Bi}(s).$$

Отсюда находим распределение искомой случайной величины γ_0 – реального времени выполнения технического обслуживания на одном этапе в виде преобразования Лапласа – Стилтьеса:

$$J_0(s)=\frac{F_{Э}(\alpha+s)F_{КР}(\lambda+s)}{1-\alpha\tilde{A}_{ПГ}(s)\dfrac{\overline{F}_{Э}(s+\alpha)}{\alpha+s}-\sum\limits_{i\ge1}^{i}\lambda_i\tilde{F}_{Bi}\dfrac{\overline{F}_{Э}(\alpha+s)\overline{F}_{КР}(\lambda+s)}{\lambda+s}},$$

где $F_{Э}(\alpha+s)=\int\limits_0^\infty e^{-(\alpha+s)z}dF_{Э}(z)$; $F_{КР}(\lambda+s)=\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda+s)z}dF_{КР}(z);$

$\overline{F}_{Э}(\alpha+s)=1-F_{Э}(\alpha+s);\ \overline{F}_{КР}(\lambda+s)=1-F_{КР}(\lambda+s).$

Пусть случайная величина γ_0 имеет функцию распределения $P_1(t)=P\{\gamma_0<t\}$. Тогда функция распределения суммы m независимых и одинаково распределенных случайных величин γ_0 получается как m – краткая свертка распределения $P_1(t)$. Учитывая это, запишем формулу для преобразования Лапласа – Стилтьеса $J(s,\ m)$ ФР общего времени проведения технического обслуживания $t_{ВТО}$ на m этапах в следующем виде:

$$J(s,m)=J_0^m(s)=\frac{\left[F_{Э}(\alpha+s)F_{КР}(\lambda+s\right]^m}{\left[1-\alpha\tilde{A}_{ПГ}(s)\dfrac{\overline{F}_{Э}(\alpha+s)}{\alpha+s}-\sum\limits_{i\ge1}^{i}\lambda_i\tilde{F}_{Bi}(s)\dfrac{\overline{F}_{Э}(\alpha+s)F_{КР}(\lambda+s)}{\lambda+s}\right]^m}. \tag{2}$$

Воспользовавшись соотношением $\bar{t}_{ВТО}=-J_1(s,m)\vdots_{s=0}$ и формулой (2), нетрудно получить выражение для МОЖ реального времени проведения технического обслуживания

$$\bar{t}_{ВТО}=\frac{m}{F_{Э}(\alpha)F_{КР}(\lambda)}\left[\frac{1}{\alpha}\overline{F}_{Э}(\alpha)(1+\alpha\bar{t}_{ПГ})+\frac{1}{\lambda}\overline{F}_{Э}(\alpha)\overline{F}_{КР}(\lambda)\left(1+\sum_{i\ge1}^{i}\lambda_i\bar{t}_{Bi}\right)\right]. \tag{3}$$

Полученные результаты (2) и (3) представляют собой решение задачи в общем виде. Из них могут быть легко найдены различные частные решения, представляющие практический интерес. Так, если предположить, что продолжительность собственно этапа технического обслуживания и длительность контроля работоспособности на этом этапе являются постоянными величинами $t_{\text{э}}^{(1)}$ и $\tau_{\text{КР}}^{(1)}$, то функция распределения и МОЖ времени проведения технического обслуживания будут определяться выражениями

$$J(s,m)=\frac{\exp\{-m[s(t_{\text{э}}^{(1)}+\tau_{\text{КР}}^{(1)})-\alpha t_{\text{э}}^{(1)}-\lambda\tau_{\text{КР}}^{(1)}]\}}{1-\dfrac{\alpha}{\alpha+s}\tilde{A}_{\text{ПГ}}(s)\left(1-e^{-(\alpha+s)\tau_{\text{К}}^{(1)}}\right)-\dfrac{1}{\lambda+s}\sum\limits_{i\geq 1}^{i}\lambda_i\tilde{F}_{\text{В}i}(s)\times e^{-(\alpha+s)t_{\text{э}}^{(1)}}},$$

$$\bar{t}_{\text{ВТО}}=m\left[\frac{1}{\alpha}e^{-\lambda\tau_{\text{КР}}^{(1)}}\left(e^{-\alpha t_{\text{э}}^{(1)}}-1\right)\left(1+\alpha\bar{t}_{\text{ПГ}}\right)+\frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda\tau_{\text{КР}}^{(1)}}-1\right)\left(1+\sum_{i\geq 1}^{i}\lambda_i\bar{t}_{\text{В}i}\right)\right]. \qquad (4)$$

Если предположить, что время перевода системы в готовность из состояния технического обслуживания и время восстановления работоспособности системы значительно меньше наработки на отказ, т. е. $\bar{t}_{\text{ПГ}} \ll T_{\text{о}i}$ и $\bar{t}_{\text{В}i} \ll T_{\text{о}i}$, то можно принять $\bar{t}_{\text{ПГ}}=\bar{t}_{\text{В}i}=0,\ (i\geq 1)$ и получить приближенные соотношения

$$\varphi(s,m)=\left\{\exp\left[-m\left[s(t_{\text{э}}^{(1)}+\tau_{\text{КР}}^{(1)})-\alpha t_{\text{э}}^{(1)}+\lambda\tau_{\text{КР}}^{(1)}\right]\right]\right\}\Big/\left\{\left[1-\frac{\alpha}{\alpha+s}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(1-e^{-(\alpha+s)t_{\text{э}}^{(1)}}\right)-\frac{\lambda}{\lambda+s}e^{-(\alpha+s)t_{\text{э}}^{(1)}}\left(e^{-(\lambda+s)t_{\text{КР}}^{(1)}}\right)\right]^m\right\}, \qquad (5)$$

$$\bar{t}_{\text{ВТО}}=m\left[\frac{1}{\alpha}e^{-\lambda\tau_{\text{КР}}^{(1)}}\left(e^{-\alpha t_{\text{э}}^{(1)}}-1\right)+\frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda\tau_{\text{КР}}^{(1)}}-1\right)\right].$$

Используя выражение (5), можно получить формулу для вероятности $P(t_{\text{ТО}}, t, m)$ выполнения технического обслуживания за отведенное оперативное время t. Для этого разложим (4) в ряд по степеням экспоненты и определим вычеты в полюсах $S_1 = 0$ и $S_2 = -\lambda$. После ряда преобразований находим

$$P(t_{\text{ТО}},\ t,\ m)=\sum_{i=0}^{n}\binom{m+i-1}{i}(-1)^i\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\lambda^j(\alpha-\lambda)^{i-1}\exp\left[\alpha m t_{\text{э}}^{(1)}(1+im-\right.$$

$$\left.-\lambda(m+j))\tau_{\text{КР}}^{(1)}\right]\sum_{r=0}^{m+j}\binom{m+j}{r}\alpha^r R\left[t-mt_{\text{э}}^{(1)}(1+\frac{i}{m})-(m+j)\tau_{\text{КР}}^{(1)}\right],$$

где $n=[(t-(m-i)\tau_{\text{КР}}^{(1)}-t_{\text{э}}^{(1)})m/t_{\text{э}}^{(1)}]$ (здесь квадратные скобки означают операцию выделения целой части числа, стоящего в скобках), а $R(z)=\sum\limits_{\nu=0}^{r}\dfrac{z^{r-\nu}(i+\nu+1)!(-1)^{\nu}}{(r-\nu)!\nu!(i-1)!\lambda^{i+\nu}}+$ $+\sum\limits_{\nu=0}^{i-1}\dfrac{z^{i-\nu-1}(r+\nu)!(-1)^{r+1}e^{\lambda z}}{(i-\nu-1)!\nu!r!\lambda^{r+\nu+1}}$ (здесь $z=t-mt_{\text{э}}^{(1)}(1+i/m)-(m+j)\tau_{\text{КР}}^{(1)}$).

Определим теперь оптимальное число этапов m_{opt}, при котором обеспечивается минимальное время выполнения технического обслуживания $\min \bar{t}_{\text{ВТО}}$. Для этого продифференцируем выражение (4) по m и приравняем производную нулю

$$\frac{d\bar{t}_{\text{ВТО}}}{dm} = \left(1-\alpha \quad t_{\text{э}}^{(1)}\right) \quad e^{-\alpha \ t_{\text{э}}^{(1)}} \frac{\alpha(1+\sum_{i=1}^{i}\lambda_i \bar{t}_{\text{В}i})}{\lambda(1+\alpha t_{\text{ПГ}})}\left(e^{-\lambda\tau_{\text{КР}}^{(1)}}-1\right)-1=0. \quad (6)$$

Данное уравнение не удается решить аналитически в явном виде относительно m. Однако при $\alpha t_{\text{ТО}}/m \ll 1$ можно получить его приближенное решение. Разлагая в (6) экспоненту в ряд по степеням $\alpha t_{\text{ТО}}/m$ и отбрасывая члены порядка малости $(\alpha t_{\text{ТО}}/m)^2$ и выше, приходим к квадратному уравнению, решение которого находится по формуле

$$m_{\text{opt}} = \alpha t_{\text{э}}^{(1)} \left[\frac{\alpha\left(1+\sum_{i\geq 1}^{i}\lambda_i \bar{t}_{\text{В}i}\right)}{\lambda(1+\alpha \quad t_{\text{ПГ}})}\left(e^{-\lambda\tau_{\text{КР}}^{(1)}}-1\right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Поскольку формула (7) получена приближенным путем, то выбор m_{opt} не всегда обеспечивает $\min \bar{t}_{\text{ВТО}}$. Однако расчеты показали, что точность приближенной формулы вполне приемлема для инженерной практики.

Таким образом, на основе аналитических методов поставлена и решена оптимизационная задача по определению оптимального количества этапов технического обслуживания. Задача решена в общем виде для произвольных законов распределения определяющих случайных величин.

* * *

V. V. Shayakhmetov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bashkir State University

Mathematical Tools for Definition of Technical Service Optimal Stages of Machine-Building Complex Technical Systems

In the research of mathematical models of the technical systems exploitation a criterion problem is the determination of required and sufficient conditions of the optimum period existence of the technical maintenance and the number of its stages. It is shown that under random distribution of initial random quantities based on use of semi-Markov processes and operational calculus, there exists an acceptable for practice software-mathematical toolbox.

Keywords: technical maintenance, technical system efficiency, optimal number of stages of technical maintenance, Markov process, Laplace–Stieltjes transform, minimum execution time of technical processes

Получено 17.03.10