УДК 658.5.011 + 51-74

*М. Б. Гитман*, доктор физико-математических наук;
*А. С. Елисеев*, аспирант
Пермский национальный исследовательский политехнический университет

# К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОМ УПРАВЛЕНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМ ПЛАНОМ

*Работа посвящена исследованию устойчивости процесса выполнения производственного плана, который рассматривается в особом пространстве состояний. Формулируются определения устойчивого процесса и теоремы об устойчивости производственного процесса. На основе сформулированной теоремы рассматривается простейший пример управления процессом выполнения плана.*

**Ключевые слова:** производственное планирование, устойчивость, управление производственным планом

## Введение

В условиях жесткой рыночной конкуренции каждое предприятие стремится привлечь клиента наиболее выгодным предложением. С точки зрения потребителя, оптимальным является товар с максимальным качеством при минимальной стоимости. При этом понятие качества, с современной точки зрения, значительно изменяется – важным аспектом становится своевременность и отсутствие срывов поставок продукции, что во многом зависит от устойчивости процесса производства. Устойчивость в данном случае понимается в том смысле, что процесс выполнения производственного плана (ПП) слабо реагирует на внешние возмущения.

Пусть произошло возмущение производственного плана (поломка станка, отсутствие заготовок, болезнь работника и т. п.). Для исправления возникшей ситуации могут применяться различные методики [1]. Один из возможных вариантов – создание нового плана, имеющего в будущем общую точку с исходным [2, 3]. При успешном достижении планом общей точки можно продолжить выполнять исходный план. Другим возможным вариантом является сдвиг всех операций, без изменения структуры плана [4].

Предлагается использовать подход, позволяющий управлять процессом выполнения так, что даже при возникновении возмущений план был бы выполнен.

## Математическое описание производственного плана

Производственный план будем рассматривать как динамическую систему с дискретным временем. При этом процесс выполнения ПП можно представить как переход от одного состояния системы к другому. Для описания ПП введем фазовое пространство, в котором каждому состоянию системы соответствует своя точка $\Pi = (X_1, X_2 ..., X_n)$, где $X_1, ..., X_n$ – размерности пространства состояний, значением которых является число произведенных номенклатурных единиц из расширенной матрицы главного календарного производственного плана (ГКПП) [5]. Отметим, что так как размерности $X_i$ являются дискретными величинами, то пространство П является дискретным.

Дискретный план в характеристическом пространстве представляет собой некоторую ломаную траекторию, задающуюся системой (1) или вектор-значной функцией от времени (2):

$$X_i = F_i(t), \tag{1}$$

$$X = F(t), X = \{X_1, ..., X_n\}, X_i \in N, \tag{2}$$

где $F_i(t)$ – дискретные табличные функции, определяющие значение *i*-й компоненты точки плана в пространстве состояний.

На рис. 1 представлена траектория выполнения плана, состоящего всего из одной номенклатурной группы $X_1$. Точки на графике означают, что в момент времени $t_1$ должно быть изготовлено $X_{11}$ номенклатурных единиц, в момент времени $t_2 - X_{12}$ номенклатурных единиц и т. д. Момент времени $t_3$ соответствует концу планового периода.

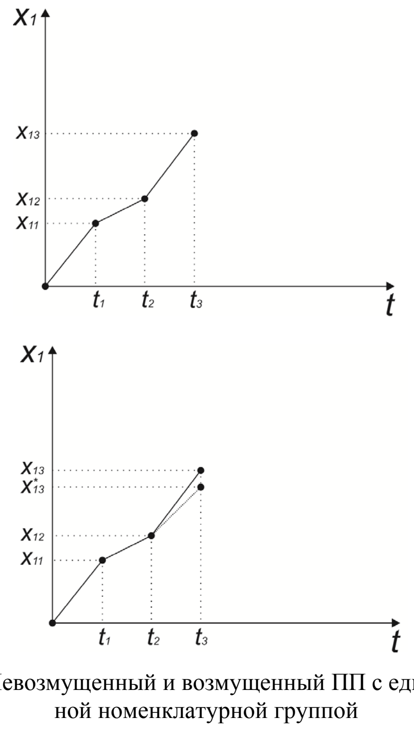


*Рис. 1.* Невозмущенный и возмущенный ПП с единственной номенклатурной группой

Будем называть *невозмущенным* такой план, точки которого соответствуют существующей расширенной матрице ГКПП (рис. 1) [5]. Пусть в определенный момент времени $t_2$ произошло некоторое возмущение. При этом вместо запланированных $X_{13}$ номенклатурных единиц было произведено $X^*_{13} < X_{13}$ (рис. 1). Такой план производства будем называть *возмущенным*.

Перейдем от дискретного описания плана к непрерывному. Для этого введем новое пространство состояний $\tilde{\Pi} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2 ..., \tilde{X}_n)$, где значение компонент определяет нецелое число изготовленных деталей. Введенное таким образом описание процесса выполнения плана позволяет говорить о «*частично завершенном*» изделии.

В качестве метрики $\|\cdot\|$ в пространствах $\Pi$ и $\tilde{\Pi}$ может быть использована любая функция, характеризующая расстояние между двумя планами в пространстве состояний. При этом, например, евклидова метрика $d(X, X^*) = \sqrt{(X_1 - X_1^*)^2 + ... + (X_n - X_n^*)^2}$ будет менее предпочтительной в сравнении с метрикой $d(X, X^*) = \max\{|X_1 - X_1^*|, ..., |X_n - X_n^*|\}$ в связи с тем, что во втором варианте норма приобретает четкий физический смысл, означающий максимальное отклонение планов по всем номенклатурным группам. Для обозначения приоритетов предприятия могут быть использованы взвешенные метрики $d(X, X^*) = \max\{k_1 |X_1 - X_1^*|, ..., k_n |X_n - X_n^*|\}$, коэффициенты $k_i$ которых определяют важность соответствующих номенклатурных типов.

Для управления процессом выполнения производственного плана введем функцию $U$, определяющую управление ПП. В зависимости от вида $U$ можно выделить три основных класса функций управления: *автономные* (или *стационарные*), не зависящие от времени вида $U = U(X_1, ..., X_n)$, *неавтономные*, зависящие от времени $U = U(X_1, ..., X_n, t)$ и *обобщенные* (их комбинаций) вида $U = U(D_1, ..., D_m, t)$, где $D_i, i = \overline{1..m}$ – параметры производства.

Для непрерывного производственного плана можно ввести описание ПП в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\tilde{X}_i}{dt} = \tilde{f}_i(t) = \tilde{F}_i'(t), \quad (3)$$

где $\tilde{f}_i$ – дискретные табличные функции, определяющие изменение значения $i$-й компоненты точки плана в пространстве состояний.

В связи с возможностью взаимно-однозначного сопоставления дискретных и непрерывных планов, здесь и далее будем рассматривать только непрерывные варианты описания плана.

Описание процесса выполнения ПП можно записать в виде:

$$\frac{d\tilde{X}_i}{dt} = \tilde{f}_i + \tilde{u}_i, \quad (4)$$

где $\tilde{u}_i$ – функция управления для $i$-й номенклатурной позиции.

Начальным условием для системы (4) является начальная точка $\tilde{M}^0$ траектории ПП в его фазовом пространстве в начальный момент времени $t_0$:

$$t = t_0 : \tilde{M}_0(\tilde{X}_1^0, ..., \tilde{X}_i^0); \tilde{X}_1^0 = \tilde{F}_1(t_0), ..., \tilde{X}_n^0 = \tilde{F}_n(t_0), i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Следует отметить, что точка фазового пространства $M_0$ соответствует началу планового периода (наличию изделий каждого номенклатурного типа на момент времени $t_0$).

При возникновении возмущения в процессе выполнения плана процесс будем разделять на две части. Пусть возмущение произошло в момент времени $t_p$. При этом первая (*невозмущенная*) часть процесса соответствует интервалу времени $[t_0, t_p]$, а вторая часть, соответствующая *возмущенному* процессу выполнения ПП, в интервале $[t_p, t_n]$ (рис. 2). Отметим, что невозмущенная часть процесса не будет иметь значения, так как до момента возмущения процесс выполнения плана полностью соответствовал невозмущенному плану производства и все запланированные объемы изготовленной продукции были успешно произведены. В связи с этим рассматривается только вторая (возмущенная) часть процесса. При этом задача устойчивого выполнения плана сводится к задаче отыскания такой функции управления, которая бы обеспечила устойчивое выполнение возмущенного ПП.

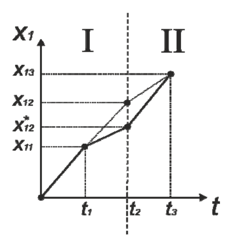


*Рис. 2.* Разделение процесса выполнения ПП после возникновения возмущения

Возмущения любой природы в процессе выполнении плана влекут за собой изменение объемов произведенных изделий. Объем изготовленной продукции после возникновения возмущения:

$$\begin{aligned} t = t_p : \tilde{M}_p(\tilde{X}_1^p, ..., \tilde{X}_i^p); \tilde{X}_1^p = \tilde{F}_1(t_p) + \tilde{\varepsilon}_1, ..., \\ \tilde{X}_n^p = \tilde{F}_n(t_p) + \tilde{\varepsilon}_n, i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\tilde{\varepsilon}_i$ – возмущение по $i$-му номенклатурному типу (разница между запланированным объемом продукции и реально произведенным).

Точка $\tilde{M}_p$ фазового пространства является начальной точкой (начальным условием) для возмущенного производственного плана.

Введем следующее определение: если в плане $X$ для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ можно найти такое положительное $\delta(\varepsilon)$, что при всяких возмущениях $\tilde{\varepsilon}_i$, удовлетворяющих условию $\left\|\tilde{M}^p\right\| \le \delta$ и при любом $t \ge t_p$ будет выполняться неравенство $\left\|\tilde{M}^t\right\| \le \varepsilon$, то процесс выполнения плана $X$ является *устойчивым*. В противном случае выполнение плана $X$ – процесс *неустойчивый*.

Графически это определение интерпретировано на рис. 3, где $M$ – изображающая точка отклонения плана; $M^0$ – точка, соответствующая невозмущенному плану, с *нулевыми* отклонениями; $M^p$ – точка возникновения возмущения в $t_p$; $M^t$ – конечная точка процесса; $\epsilon$ – величина возмущения.

Данное определение устойчивости ПП сводится к следующему: если возмущение ($\epsilon$) не превосходит некоторого критического значения ($\delta$), то план будет успешно выполнен с отклонением на конечном этапе, не превосходящем максимально допустимое ($\varepsilon$). Допустимое отклонение в данном случае – это такой объем невыпущенной продукции, при котором план можно считать выполненным. Это отклонение определяется стратегией и контрактными обязательствами предприятия. Критическое значение отклонения, при котором план остается устойчивым, определяется, по существу, текущими мощностями предприятия – чем больше мощности, тем больше может быть возмущение.

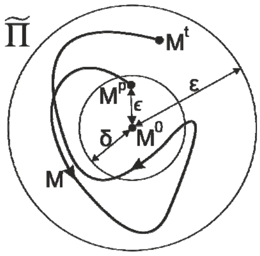


*Рис. 3.* Графическое представление устойчивости ПП

Можно сформулировать следующую теорему (аналог теоремы Ляпунова об устойчивости движения) для определения устойчивости производственного плана [6].

Т е о р е м а. Если для дифференциальных уравнений, описывающих возмущенный процесс выполнения ПП, можно найти знакоопределенную функцию управления $U$, производная которой $U'$ была бы знакопостоянной функцией противоположного знака с $U$ или тождественно равна нулю, то производственный план будет *устойчивым*.

Теорема является критерием возможности исправления плана при возникновении возмущений. Если условие теоремы выполняется, то можно сделать вывод о *принципиальном* существовании возможности успешно выполнить план при текущих ограничениях на производственные ресурсы и, следовательно, об устойчивости плана.

В качестве простейшего примера рассмотрим план $X$ с одной номенклатурной группой. Пусть в момент времени $t_2$ произошло возмущение и вместо 20 ($X_1^2$) изделий было изготовлено 15 ($X_1^{*2}$). Найдем такую функцию управления, при которой процесс выполнения возмущенного плана $X^*$ останется устойчивым (для максимального отклонения $\varepsilon = 1$). Для вычисления отклонения планов будем пользоваться нормой вида $d(X, X^*) = \max\{\left|X_1 - X_1^*\right|, ..., \left|X_n - X_n^*\right|\}$. Исходные данные и результаты расчетов приведены в таблице.

**Исходные данные и результаты расчетов**

| | $X_1$ | $X_1^*$ | $u$ | $\left\|X_1 - X_1^*\right\|$ |
|---|---|---|---|---|
| $t_1$ | 10 | 10 | – | 0 |
| $t_2$ | 20 | 15 | – | 5 |
| $t_3$ | 30 | 27 | 2 | 2 |
| $t_4$ | 40 | 39 | 2 | 1 |

Проанализируем полученные результаты. Очевидно, что самое простое управление планом сводится к увеличению объемов выпускаемой продукции. В связи с этим выберем простейшую функцию управления в виде $u(t) = a = \text{const}$, соответствующую увеличению объемов на константную величину $a$. Взяв в качестве примера $a = 2$, получим устойчивый процесс выполнения плана. Другими словами, речь идет о том, что процесс выполнения плана будет устойчивым, если мощности предприятия позволяют увеличить выпуск продукции ($X_1$) на 2 единицы.

## Выводы

В работе предложена методика исследования устойчивости производственного плана при возникновении возмущений (поломка оборудования, срыв поставок сырья и т. п.). Вводится специальное пространство, определяемое совокупностью изменяющихся состояний изготовления всех необходимых изделий в процессе их производства. На основе математической теории устойчивости формулируется определение устойчивого производственного плана и теорема об устойчивости процесса его выполнения.

Предложенный подход позволяет отслеживать выполнение производственного плана и оценивать его устойчивость при возникающих возмущениях.

### Библиографические ссылки

1. *Sabuncuoglu I., Goren S.* Hedging production schedules against uncertainty in manufacturing environment with a review of robustness and stability research // International Journal of Computer Integrated Manufacturing. – 2009. – Vol. 22. – Pp. 138–157.

2. Matchup Scheduling with Multiple Resources, Release Dates and Disruptions / J. C. Bean, J. R. Birge, J. Mittenthal, C. E. Noon // Operations Research. – 1991. – Vol. 39.3. – Pp. 470–483.
3. *Arkturk M. S., Gorgulu E.* Match-up scheduling under a machine breakdown // European Journal of Operational Research. – 1999. – Vol. 112. – Pp. 81–97.
4. *Abumaizar R. J., Svestka J. A.* Resheduling Job Shops under Disruptions // International Journal of Production Researches. – 1997. – Vol. 35. – Pp. 2065–2082.
5. *Вожаков А. В., Гитман М. Б., Федосеев С. А.* Комплексное оценивание при выборе оптимального плана производства на тактическом уровне с учетом нечетких критериев и ограничений // Управление большими системами. – 2010. – Вып. 30. – С. 164–179.
6. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. – М. : Наука, 1967. – 223 с.

* * *

*M. B. Gitman*, DSc (Physics and Mathematics), Perm National Research Polytechnical University
*A. S. Eliseev*, Post-graduate, Perm National Research University

**The issue of sustainable management of production plan**

*The paper deals with the research of the process stability of the production schedule executing at a special space of states. Definitions of a stable process and theorem of production process stability are introduced. Based on the stated theorem, an example of controlling the plan execution process is considered.*

**Keywords:** production scheduling, stability, plan execution control

Получено: 22.10.12

УДК 622.673.6

*Е. А. Калентьев*, аспирант;
*В. В. Тарасов*, доктор технических наук, профессор;
Институт механики Уральского отделения РАН
*В. Н. Новиков*, старший преподаватель;
Ижевская государственная сельскохозяйственная академия
*Ю. В. Пузанов*, кандидат технических наук, доцент
Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

# РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО КОНТАКТА СПИРАЛЬНОГО КАНАТА ТИПА «ВАРРИНГТОН»

*Получены новые решения системы уравнений линейного контакта спирального каната типа «Варрингтон» не требующие применения метода последовательных приближений.*

**Ключевые слова:** система уравнений, линейный контакт, спиральный канат

На основе метода последовательных приближений в работе М. Ф. Глушко (Стальные подъемные канаты. Киев : Техника, 1966) было получено решение системы уравнений линейного контакта (1) проволок спирального каната типа «Варрингтон» (рис. 1). Высокая трудоемкость этого метода ограничивает его применение и почти всегда требует какой-либо программной реализации. Кроме того, остается открытым вопрос относительно сходимости итерационного процесса. Учитывая вышесказанное, получим новые решения системы (1).

На рис. 1 обозначено: $r_1$, $r_2$, $r_3$ – радиусы слоев проволок «1», «2», «3» соответственно; $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ – диаметры проволок слоев «1», «2», «3» соответственно; $\lambda_1$, $\lambda_{12}$, $\lambda_{23}$ – полярные углы контакта проволок «1», «1-2», «1-3» соответственно.

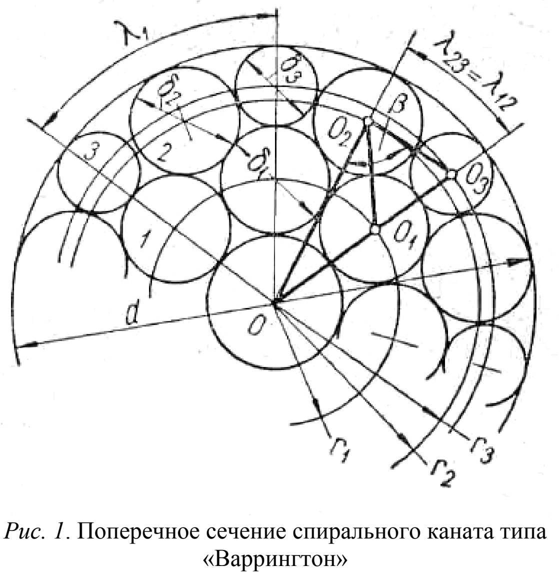


*Рис. 1*. Поперечное сечение спирального каната типа «Варрингтон»