

О. В. Пономарева, кандидат технических наук, доцент
Ижевский государственный технический университет

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ *

Рассматривается вопрос статистической устойчивости оценок энергетического спектра случайного дискретного процесса, вычисленного методом параметрического дискретного преобразования Фурье. Рассматриваются также дискретные процессы со скрытыми периодичностями.

Ключевые слова: дискретный случайный процесс, параметрическое дискретное преобразование Фурье, скрытые периодичности, статистическая устойчивость, число степеней свободы

Развитие методов и средств вычислительной техники значительно расширило приложения цифровых спектральных методов к обработке информации во многих областях научных исследований, таких, например, как радиолокация, сейсмология, навигация, гидролокация и связь.

Отметим, что дискретное преобразование Фурье (ДПФ) занимает важное место в цифровом спектральном анализе, что объясняется рядом его полезных свойств, подробно исследованных в работах [1–4]. Кроме того, ДПФ может быть получено с помощью алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), что резко сокращает объем требуемых вычислений. Обобщением ДПФ является параметрическое дискретное преобразование Фурье (ДПФ-П), использующее разложение по системе параметрических дискретных экспоненциальных функций [5]

$$\text{defp}(k, n, \theta) = \exp\left[-j \frac{2\pi}{N}(k + \theta)n\right], \quad n = \overline{0, N-1}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad 0 \leq \theta < 1.$$

Пара преобразований ДПФ-П задается следующими соотношениями:

$$S(k, \theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \exp\left[-j \frac{2\pi}{N}(k + \theta)n\right], \quad (1)$$

$$X(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} S(k, \theta) \exp\left[-j \frac{2\pi}{N}(k + \theta)n\right], \quad (2)$$

где $S(k, \theta)$ – коэффициенты ДПФ-П. Из определения ДПФ-П следует, что в отличие от стандартного ДПФ набор анализируемых частот не является фиксированным, а варьируется параметром θ .

ДПФ-П позволяет эффективно оценивать спектр процесса $X(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, на единичной окружности в Z – плоскости как на целых, так и на дробных частотах. С такой задачей приходится сталкиваться в различных областях научных исследований, например в статистической радиофизике – при анализе линейных систем с периодически меняющимися параметрами [6], в виброакустической и медицинской диагностике – при оценке информативных диагностических признаков [3, 4], в анализе промышленных случайных процессов – при оценке точности характеристик объекта.

© Пономарева О. В., 2010

* Работа выполнена в рамках реализации проекта 13.G25.31.0094 между ОАО «Элеконд» и Министерством образования и науки Российской Федерации.

Цель данной работы – исследование вероятностных свойств оценки энергетического спектра стационарного дискретного процесса, полученного с помощью ДПФ-П.

Рассмотрим стохастические свойства коэффициентов ДПФ-П процесса $X(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, который представляет собой белый дискретный шум с нормальной плотностью распределения и параметрами

$$M[X(n)] = 0, \quad \text{var}[X(n)] = D.$$

С учетом того, что процесс является действительной последовательностью $X(n)$, оценку энергетического спектра $g(k, \theta)$ представим в следующем виде:

$$g(k, \theta) = a_c^2(k, \theta) + a_s^2(k, \theta),$$

$$\text{где } a_c(k, \theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k+\theta)n\right], \quad a_s(k, \theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \sin\left[\frac{2\pi}{N}(k+\theta)n\right],$$

$$k = \overline{0, N/2-1}.$$

В общем случае случайные величины $a_c(k, \theta)$, $a_s(k, \theta)$ зависимы, и их совместная плотность распределения задается следующим соотношением [7]:

$$\omega(A) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det T}} \exp\left(-\frac{1}{2} A^T T^{-1} A\right), \quad (3)$$

где $A = [a_c(k, \theta), a_s(k, \theta)]$, T – корреляционная матрица вектора A ,

$$T = M[A^T A] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}.$$

Используя тригонометрические тождества

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos 2nx = \cos[x(N-1)] \sin(Nx) / \sin x,$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin 2nx = \sin[x(N-1)] \sin(Nx) / \sin x,$$

несложно установить, что

$$M[a_c(k, \theta)] = M[a_s(k, \theta)] = 0, \quad (5)$$

$$t_{11} = \frac{D}{2} \left\{ 1 + F(k+\theta) \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k+\theta)(N-1)\right] \right\},$$

$$t_{12} = t_{21} = \frac{D}{2} F(k+\theta) \sin\left[\frac{2\pi}{N}(k+\theta)(N-1)\right],$$

$$t_{22} = \frac{D}{2} \left\{ 1 - F(k+\theta) \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k+\theta)(N-1)\right] \right\},$$

где (рис. 1) $F(x) = \sin 2\pi x / \left(N \sin \frac{2\pi}{N} x \right)$.

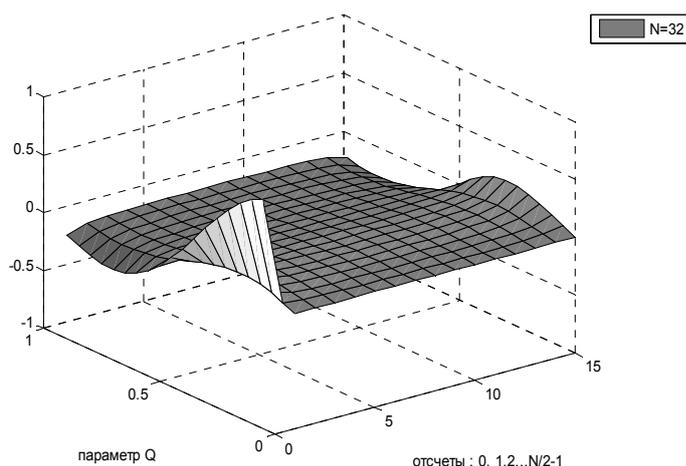


Рис. 1. Функция $F(x) = \sin(2\pi(k + Q)/N) / (\sin(2\pi(k + Q)/N))$

Из соотношений (5) непосредственно следует, что при значениях параметра $\theta = 0, 1/2$ элементы корреляционной матрицы t_{21} , t_{12} равны нулю и, следовательно, случайные величины $a_c(k, \theta)$ и $a_s(k, \theta)$ независимы, а их дисперсии равны $D/2$.

С учетом того, что при значении параметра $\theta = 0$, ДПФ-П переходит в обычное ДПФ, полученный результат для $\theta = 0$ не является неожиданным. В то же время можно доказать, что при $\theta = 1/2$ относительно случайных величин

$$g_l(k, 1/2) = \frac{2g(k, 1/2)}{\text{var}[X(n)]}, \quad k = \overline{1, N-1}.$$

Также справедливы следующие утверждения:

1. Случайные величины $g_l(k, 1/2)$ имеют χ^2 распределение с двумя степенями свободы.
2. Случайные величины $g_l(k, 1/2)$ и $g_l(l, 1/2)$ взаимно независимы при $k \neq l$.

Рассмотрим данный вопрос более подробно.

В спектральном анализе статистическую устойчивость энергетического спектра принято характеризовать числом степеней свободы

$$\nu(k, \theta) = \frac{2M^2[g(k, \theta)]}{\text{var}[g(k, \theta)]}.$$

Найдем моменты случайной величины $g(k, \theta)$, воспользовавшись методом производящих функций

$$\varphi(u)M[\exp\{ug(k, \theta)\}] = \iint \omega(A) \exp(u | A |^2) dA = \frac{1}{(\det[I - 2uT])^{1/2}},$$

где I – единичная матрица.

Подставляя (3) в (6) и используя интеграл вида [7]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int e^{-(1/2)\psi(x,y)} dx dy = \frac{2\pi}{\sqrt{I_2}} e^{-I_3/2I_2},$$

где $\psi(x, y) = d_{11}x^2 + 2d_{12}xy + d_{22}y^2 + 2d_{13}x + 2d_{23}y + d_{33}$,

$$I_2 = \det \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, \quad I_3 = \det \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Нетрудно установить, что

$$\varphi(u) = 1/\sqrt{1 - 2u(t_{11} + t_{22}) + 4u^2(t_{11}t_{22} - t_{12}^2)}.$$

Вычисляя первую и вторую производные производящей функции, найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $g(k, \theta)$:

$$M[g(k, \theta)] = \left. \frac{d\varphi(u)}{du} \right|_{u=0} = \frac{t_{11} + t_{22} - 4(t_{11}t_{22} - t_{12}^2)u}{\sqrt{[1 - 2u(t_{11} + t_{22}) + 4u^2(t_{11}t_{22} - t_{12}^2)]^3}} \Big|_{u=0} = \quad (8)$$

$$= \text{var}[g(k, \theta)] = \left[\frac{d^2\varphi(u)}{du^2} - \left(\frac{d\varphi(u)}{du} \right)^2 \right] \Big|_{u=0} = D^2 [1 + F^2(k = \theta)], \quad (9)$$

откуда

$$v(k, \theta) = \frac{2}{1 + \frac{\sin^2 2\pi(k + \theta)}{N^2 \sin^2(2\pi/N(k + \theta))}}. \quad (10)$$

Из выражения (10) непосредственно следует, при $\theta = 0, 1/2$ число степеней свободы в точности равно двум. На рис. 2, 3 представлено относительное изменение числа степеней свободы $W(K, \theta) = V(K, \theta)$ в зависимости от нормализованной частоты $f_n = (k + \theta)/N$ для последовательности длиной в $N = 128$ отсчетов (при различных $\theta = q$).

Как и следовало ожидать, при $\theta = 1/2$ число степеней свободы в точности равно двум. Отметим, что значения относительного изменения числа степеней свободы при $0,25 < f_n < 0,5$ представляет собой зеркальное отображение относительно $f_n = 0,25$. Оценка энергетического спектра белого шума является несмещенной, в то же время она не является состоятельной, так как дисперсия оценки $g(k, \theta)$ не стремится к нулю. Например, при $\theta = 1/2$ дисперсия оценки равна квадрату оцениваемой величины, что непосредственно следует из формулы (10).

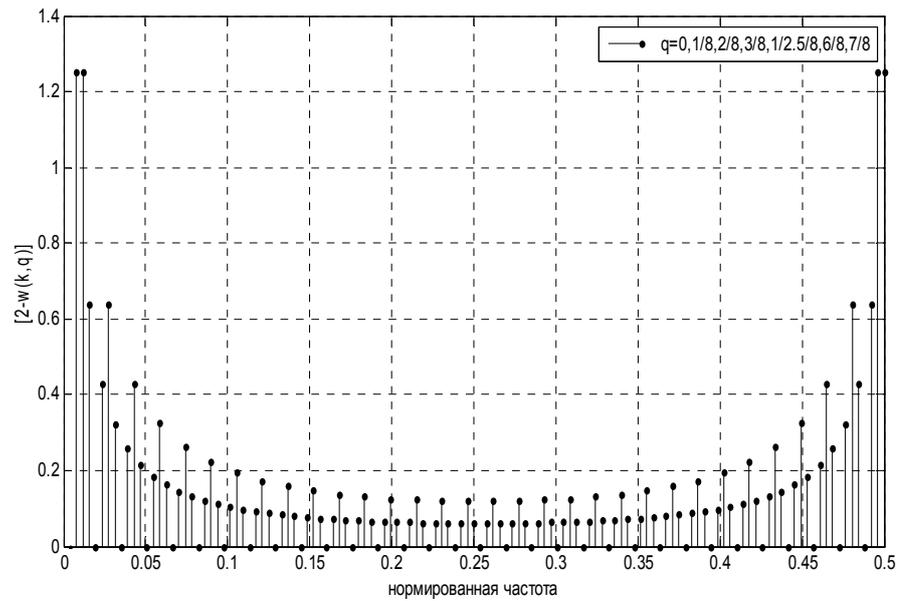


Рис. 2. Зависимость числа степеней свободы w от нормированной частоты (при $q = 0, 1/8, 2/8, 3/8, 1/2, 5/8, 6/8, 7/8$)

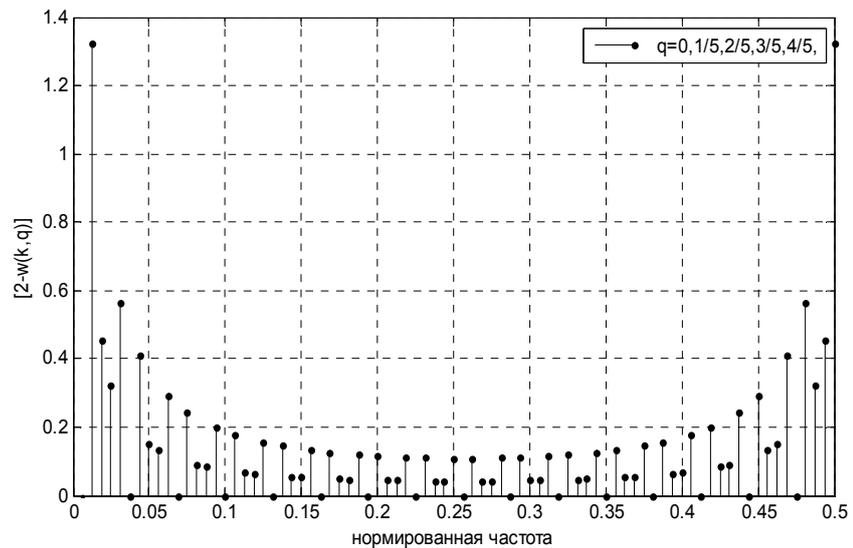


Рис. 3. Зависимость числа степеней свободы w от нормированной частоты (при $q = 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5$)

Полученные результаты могут быть использованы при анализе случайных процессов со скрытыми периодичностями, например в задачах пассивной гидролокации, виброакустической диагностики машин. При обнаружении и классификации

кораблей главным образом используется структура тональных компонент (тональные компоненты в спектрах возникают за счет работы механизмов судна). При виброакустической диагностике машин используется тот факт, что акустические сигналы многих машин характеризуются наличием гармонических рядов разнообразной природы. Так, в вибрационном или шумовом сигнале редуктора можно выделить ряды из гармоник оборотной, зубцовой, циклической частот [8]. Используя выражения (1) и (2), можно найти оценку спектра практически на любой частоте и согласно (10) определить ее статистическую устойчивость. Для иллюстрации на рис. 4 приведены спектры, полученные с помощью ДПФ (а) и ДПФ-П (б), записи акустического шума редуктора судового двигателя ординат (нормированные частоты гармоник – 0,08; 0,16; 0,32). Нетрудно увидеть, что применение ДПФ-П резко улучшает условия различения синусоидальных компонент.

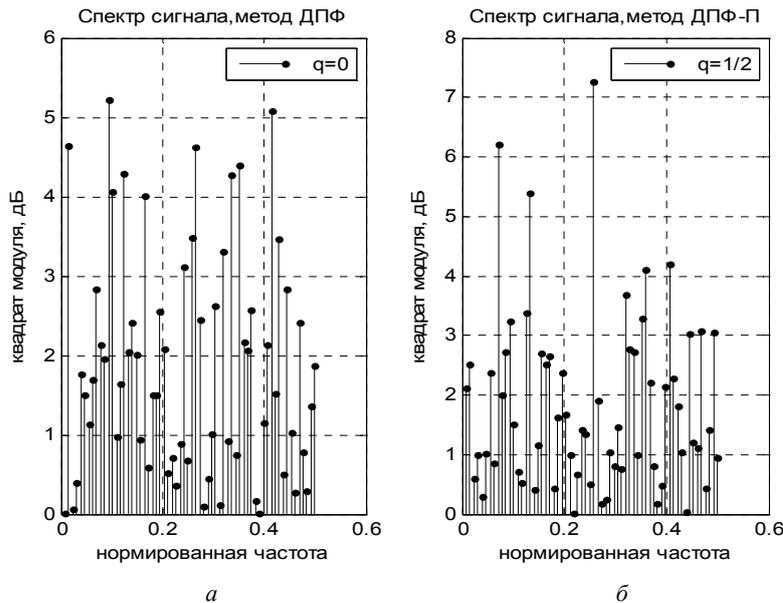


Рис. 4. Спектры, полученные с помощью ДПФ (а) и ДПФ-П (б)

Таким образом, предлагаемый подход к анализу стационарных дискретных процессов, заданных на конечных интервалах и содержащих гармонические компоненты, позволяет устранить паразитную амплитудную модуляцию спектра, используя вариацию параметра в ДПФ-П. При этом по сравнению со стандартным методом, с одной стороны, уменьшается требуемый объем памяти, с другой – существенно сокращается время обработки.

Список литературы

1. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения : вып.1–2. – М. : Мир, 1971–1972.
2. Хеннан Э. Многомерные временные ряды. – М. : Мир, 1974.
3. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. – М. : Мир, 1976.
4. Бриллиджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. – М. : Мир, 1980.

5. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач интерполяции и свертки функций // Радиотехника и электроника. – 1984. – Т. 29, № 8. – С. 1561–1570.

6. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. – М. : Наука. 1976. – Ч. 1. Случайные процессы. – 496 с.

7. Левин Б. П. Теоретические основы статистической радиотехники. – М. : Совет. радио, 1969. – Т. 1. – 752 с.

8. Артоболевский И. И., Бобровицкий Ю. И., Генкин М. Д. Введение в акустическую динамику машин. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 296 с.

* * *

O. V. Ponomareva, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Izhevsk State Technical University

Stochastic Properties of Spectral Estimations Received by Parametrical Discrete Fourier Transformation

The statistical stability of estimations of a power spectrum of the casual discrete process calculated by a method of parametrical discrete Fourier transformation is considered. Discrete processes with the latent periodicity are also regarded.

Keywords: statistical stability, power spectrum, discrete process, parametrical discrete Fourier transformation

Получено 12.10.10

УДК 519.866

Л. В. Степанов, кандидат технических наук
Институт менеджмента, маркетинга и финансов, г. Воронеж

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЫНОЧНЫХ БАРЬЕРОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДОЛОГИИ ИСКУССТВЕННЫХ ИММУННЫХ СИСТЕМ

Выявленное подобие между биологическими и экономическими системами позволило адаптировать принципы функционирования иммунитета к моделированию рыночных барьеров. Предложенная совокупность математических моделей не только формирует искусственную иммунную систему рынка, но и близко повторяет процессы в биологических системах.

Ключевые слова: рынок, рыночные барьеры, иммунитет, искусственная иммунная система

Введение

Базовыми признаками, лежащими в основе классификации конкурентных структур, являются количество производителей на рынке, количество покупателей, тип продукта, рыночные барьеры.

Первые два признака заданы для любого сформировавшегося рынка и могут изменяться только по истечении определенного времени. Протяженность этого периода нельзя установить заранее. Она зависит от реальной экономической ситуации на рынке. Третий признак вообще предопределен для каждой рыночной системы. Таким образом, единственным регулируемым признаком из названных являются рыночные барьеры.