

N. V. Kozlovskaja, Candidate of Science (Biology), Associate Professor, Izhevsk State Technical University

T. L. Zubko, Izhevsk State Technical University

Processing of Images of Biological Objects for Ecological Monitoring Problems

Necessity for parameters definition automation of bio objects at monitoring of potentially dangerous objects is shown. The offered extent model of cluster for damage rate definition by the bio object colour image is described. The example of the program realization is presented.

Keywords: bioindicators, colour characteristics, cluster extent, segmentation

Получено: 18.11.11

УДК 532.3, 519.6, 519.635.8

В. А. Тенев, доктор физико-математических наук, профессор

Е. В. Ветчанин, аспирант

Ижевский государственный технический университет

УПРАВЛЯЕМОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА В ЖИДКОСТИ ПРИ ВОЗВРАТНО-ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ВНУТРЕННЕЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Проведено численное решение задачи о движении тела с переменной геометрией масс в вязкой жидкости. Для схемы возвратно-поступательного перемещения внутренней материальной точки поставлена задача управления движением тела по заданной траектории. Получены результаты решения задачи оптимального управления генетическим алгоритмом.

Ключевые слова: движение тела, переменная геометрия масс, оптимальное управление, генетические алгоритмы

Введение

Рассматриваемая задача имеет название «жук на плоту» («bug on a raft») [1]. Тело массой M имеет жесткие границы. Внутри тела перемещается одна или несколько материальных точек с массами m_k . Если материальная точка («жук») движется возвратно-поступательно, то в невязкой жидкости тело будет совершать колебательное движение относительно центра масс. Если траекторию материальной точки задать по какому-либо закону, то возможно перемещение тела на любое расстояние даже в идеальной жидкости. Как установлено в работах [2, 3], тело должно иметь несимметричные коэффициенты присоединенных масс. Для симметричного тела траектория движения за счет переменной геометрии масс в идеальной жидкости будет замкнутой. В вязкой жидкости движущееся тело имеет силу сопротивления, зависящую от скорости движения, и траектория симметричного тела может стать незамкнутой [4]. В вязкой жидкости также возможно и неограниченное перемещение тела при возвратно-поступательном движении внутренней точки. В этом случае появляется задача управления движением тела для обеспечения требуемой траектории движения.

Уравнения движения

Рассмотрим плоское движение тела, имеющего форму круглого цилиндра с одной внутренней точкой. Тело имеет материальную оболочку неизменной формы

и массу M . Движение тела и материальной точки относится к двум декартовым системам координат: неподвижной Oxy и подвижной $O_1\xi\eta$ (рис. 1). Точка O_1 является центром масс оболочки – тела. Уравнения движения, описывающие движение данной материальной системы, приведены в работе [5]. Движение всей системы начинается из состояния покоя.

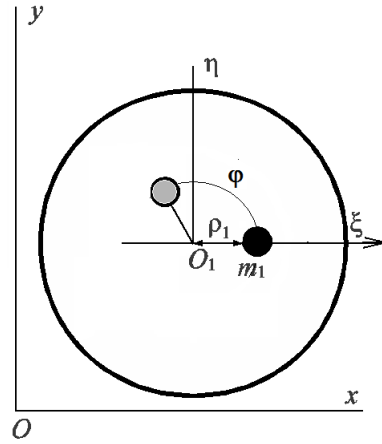


Рис. 1. Системы координат и внутренние точки

Пусть внутренняя точка с массой m_1 перемещается по некоторому заданному закону $\mathbf{p}_1(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \eta_1(t) \end{pmatrix}$. Плоское движение тела в вязкой жидкости описывается двумя системами уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} - \omega P_2 &= F_1, \\ \frac{dP_2}{dt} + \omega P_1 &= F_2, \\ \frac{dK}{dt} + u_b P_2 - v_b P_1 &= G, \\ \frac{dx}{dt} &= u_b \cos(\varphi_0) - v_b \sin(\varphi_0), \\ \frac{dy}{dt} &= u_b \sin(\varphi_0) + v_b \cos(\varphi_0), \\ \frac{d\varphi_0}{dt} &= \omega, \end{aligned} \tag{1}$$

$$P_1(0) = P_2(0) = K(0) = x(0) = y(0) = \varphi_0(0) = 0,$$

где $P_1 = (A_1 + m_1)u_b + m_1(\dot{\xi}_1(t) - \omega\eta_1(t))$, $P_2 = (A_2 + m_1)v_b + m_1(\dot{\eta}_1(t) + \omega\xi_1(t))$ – проекции вектора импульса в подвижной системе координат; $K = B\omega - m_1(u_b\eta_1 - v_b\xi_1) - m_1(\dot{\xi}_1(t) - \omega\eta_1)\eta_1 + m_1(\dot{\eta}_1(t) + \omega\xi_1)\xi_1$ – кинетический момент; $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ – сила, действующая со стороны жидкости на тело; G – момент этой вязкой силы; $A_1 = M + \lambda_1$, $A_2 = M + \lambda_2$, $B = J + \lambda_3$; M, J – масса тела и момент инерции без учета материальных точек; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – коэффициенты присоединенных масс; ω – угловая скорость вращения; $\mathbf{U}_b = (u_b, v_b)$ – вектор скорости движения тела (точки O_1); $u_1 = \dot{\xi}_1(t)$, $v_1 = \dot{\eta}_1(t)$ – проекции скорости движения материальных точек в подвижной системе координат; φ_0 – угол поворота подвижной системы координат $O_1\xi_1\eta_1$ относительно неподвижной $Oxyz$.

Для определения вязкой силы решается вторая система уравнений Навье – Стокса. В подвижной системе координат уравнения имеют вид

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot ((\mathbf{V} - \mathbf{W})\mathbf{V}) = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V},$$

где $\mathbf{V} = (u, v)$ – вектор абсолютной скорости жидкости; p, ρ, ν – давление, плотность и кинематический коэффициент вязкости.

Для системы уравнений (2) задавались граничные условия:

- на поверхности тела

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{U}_b + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{n}; \quad \mathbf{n} \times \mathbf{V} = \mathbf{n} \times (\mathbf{U}_b + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_s);$$

- на бесконечности $\mathbf{V} = 0$.

Здесь $\mathbf{W} = \mathbf{U}_b + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_1$ – вектор переносной скорости частицы жидкости в точке \mathbf{r}_1 ; $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \omega)^T$ – вектор угловой скорости. Силы реакции жидкости на тело и момент вязких сил определяются интегралами по поверхности [6, 7]:

$$\mathbf{F}_R(t) = \int_S [-p\mathbf{I} + \rho\nu(\nabla\mathbf{V} + {}^T\nabla\mathbf{V})] \cdot \mathbf{n} ds, \quad (3)$$

$$\mathbf{G}_R(t) = \int_S \mathbf{r}_s \times [-p\mathbf{I} + \rho\nu(\nabla\mathbf{V} + {}^T\nabla\mathbf{V})] \cdot \mathbf{n} ds.$$

Система уравнений (1) решалась методом Рунге – Кутты. Для решения уравнений (2) в криволинейной системе координат применялся проекционный метод [8].

Введем обозначения:

$$\mathbf{C} = \nabla \cdot ((\mathbf{V} - \mathbf{W})\mathbf{V}) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V},$$

$$\mathbf{D} = \nu \nabla^2 \mathbf{V}.$$

Разностная схема записывается на неразнесенной разностной сетке для переменных, определенных в центрах ячеек:

$$\frac{\mathbf{V}^* - \mathbf{V}^k}{\Delta t} + \frac{1}{2}(3\mathbf{C}^k - \mathbf{C}^{k-1}) = -\frac{\nabla p^k}{\rho} + \frac{1}{2}(\mathbf{D}^* + \mathbf{D}^k). \quad (4)$$

Скорости на гранях ячейки обозначим $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix}$. Для вычисления этих величин и градиента давления применяется следующая процедура осреднения:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{V}} &= \mathbf{V}^* + \Delta t \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right)_{cc}, \\ (\tilde{U}_x)_{i+\frac{1}{2},j} &= I(\tilde{u}_{i,j}, \tilde{u}_{i+1,j}), \\ (\tilde{U}_y)_{i,j+\frac{1}{2}} &= I(\tilde{u}_{i,j}, \tilde{u}_{i,j+1}), \\ \mathbf{U}^* &= \tilde{\mathbf{U}} - \Delta t \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right)_{fc}, \end{aligned}$$

где I – оператор интерполирования величин из соседних центров ячеек на общую грань; индексы cc и fc обозначают градиенты давления, вычисленные в центре и на грани ячейки соответственно; i, j – номера узлов сетки. С использованием условия

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^{k+1} = 0$$

уравнение для поправки к давлению принимает вид

$$\nabla(\nabla p') = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \mathbf{U}^*$$

с граничными условиями Неймана на всех границах. После решения многосеточным методом уравнения для поправки к давлению вычисляются параметры в центрах ячеек и на гранях:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{k+1} &= \mathbf{V}^* - \Delta t \left(\frac{\nabla p'}{\rho} \right)_{cc}, \\ \mathbf{U}^{k+1} &= \mathbf{U}^* - \Delta t \left(\frac{\nabla p'}{\rho} \right)_{fc}. \end{aligned}$$

Разностные уравнения (4) решаются совместно с системой уравнений (1). Уравнения (1) и (4) связаны между собой через граничные условия на поверхности тела и через правые части уравнений (1), определяемые интегралами (3).

Расчет движения тела в вязкой жидкости

Применяемый метод имеет второй порядок точности по времени и по пространственным координатам. Для проверки решалась задача о движении круглого цилиндра в жидкости для числа Рейнольдса $Re = 200$. Цилиндр приобретает скорость $V = 1$ при $t = 0$. На рис. 2 показано векторное поле течения около цилиндра.

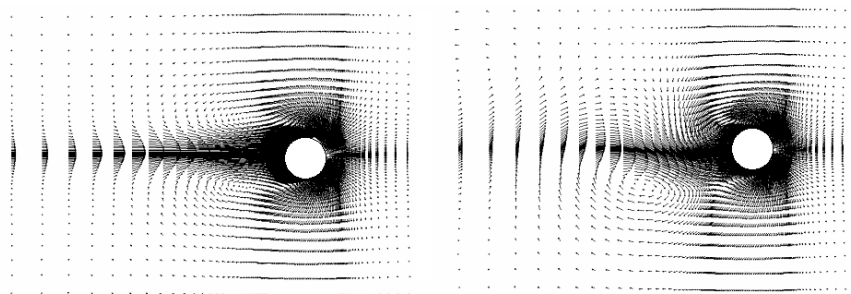


Рис. 2. Векторное поле течения при $t = 10$ и при $t = 100$

Левая часть рисунка соответствует моменту времени $t = 10$, и сначала течение около движущегося цилиндра симметричное и стационарное. С времени $t = 45$ начинаются существенные колебания продольной и поперечной сил сопротивления. Это связано с нестационарным характером отрыва вихрей от цилиндра. На рис. 3 показаны изолинии завихренности ($rot \mathbf{V}$) около движущегося цилиндра при $t = 55$ (слева) и при $t = 60$ (справа). С увеличением времени нарастает неустойчивость течения жидкости и вихри сходят с цилиндра поочередно с каждой стороны. Правая часть рис. 2 изображает несимметричное поле течения, соответствующее моменту времени $t = 100$.

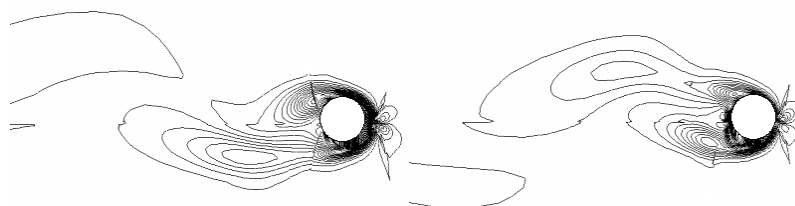


Рис. 3. Поле завихренности около движущегося цилиндра ($t = 55$, $t = 60$)

Образуется известная «дорожка Кармана». Несимметричные отрывы вихрей приводят к сильным колебаниям поперечной силы. Течение является несимметричным, но упорядоченным с постоянной частотой. Число Струхала $S = 0,18$ соответствует известным экспериментальным [9] и расчетным [10] значениям.

Средняя по времени величина коэффициента лобового сопротивления $C_D = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{F_1(t)}{\rho V^2 R} dt$ также согласуется с известными экспериментальными и расчетными данными. При $Re = 200$ $C_D = 1,25$, для $Re = 2000$ $C_D = 1,03$.

Выберем следующую схему движения внутренних масс, предназначенную для перемещения тела в жидкости. Внешняя оболочка имеет форму круглого цилиндра (см. рис. 1). Масса оболочки равна M . Внутренняя точка массой m_1 движется возвратно-поступательно по закону $\mathbf{p}_1(t) = (\xi_1(t), \eta_1(t))^T$, где

$$\xi_1(t) = \begin{cases} \rho_1 \sin^2(\omega_1 \tau), & \tau < \frac{\pi}{2\omega_1}, \\ \rho_1 \cos^2\left(\tau - \frac{\pi}{2\omega_1}\right), & \tau \geq \frac{\pi}{2\omega_1}, \quad \eta_1(t) = 0; \end{cases}$$

$$\tau = t - \left(\left\lfloor \frac{t}{T_0} \right\rfloor\right) T_0, \quad T_0 = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{\omega_1}\right).$$

Операция $(\lfloor \cdot \rfloor)$ соответствует целой части числа.

Внутренняя материальная точка предназначена для организации движения тела. В идеальной жидкости тело будет совершать колебательное движение с постоянной амплитудой при любых значениях ω_1 . При движении тела с переменной скоростью в вязкой жидкости сила сопротивления зависит от скорости нелинейно. В результате при $\omega_1 > 1$ колебания тела будут несимметричными и за один период времени T_0 произойдет смещение тела на величину x_c . На рис. 4 показаны результаты расчетов перемещения тела по оси x в вязкой жидкости для случая $\omega_1 = 4$.

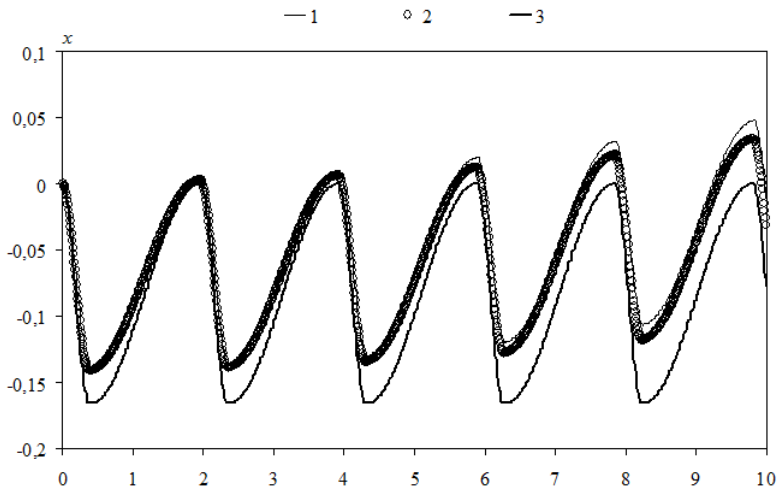


Рис. 4. Перемещение тела при возвратно-поступательном движении внутренней точки

В расчетах принято: коэффициент вязкости жидкости $\nu = 10^{-6}$; радиус кругового цилиндра $r_s = 0,1$. Зависимость 2 соответствует решению уравнений Навье – Стокса (2), зависимость 3 получена для идеальной жидкости (рис. 4). Как видно из рисунка, движение тела имеет колебательный характер. Частота в первой части

периода выше, чем во второй. Величина максимального смещения за период x_c возрастает с течением времени для случая движения в вязкой жидкости. В идеальной жидкости такого увеличения x_c не происходит. Изменение во времени скорости движения тела представлено на рис. 5. При положительном перемещении внутренней точки тело смещается в обратную сторону. Скорость движения тела в несколько раз выше, чем при движении в обратную сторону.

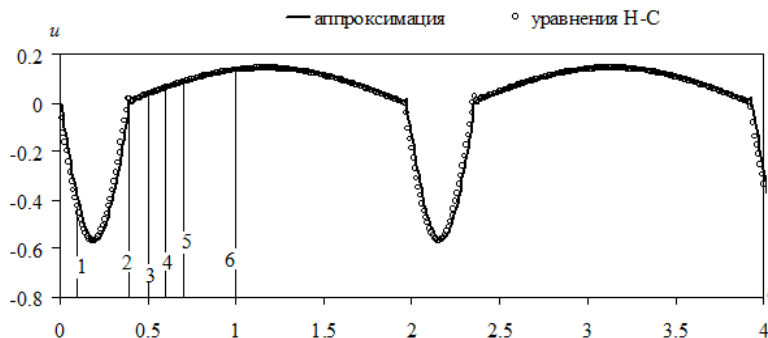


Рис. 5. Возвратно-поступательная скорость движения тела

Разные скорости и ускорения тела приводят к изменению силы сопротивления. Начало движения тела характеризуется большим значением силы сопротивления F в направлении движения (рис. 6).

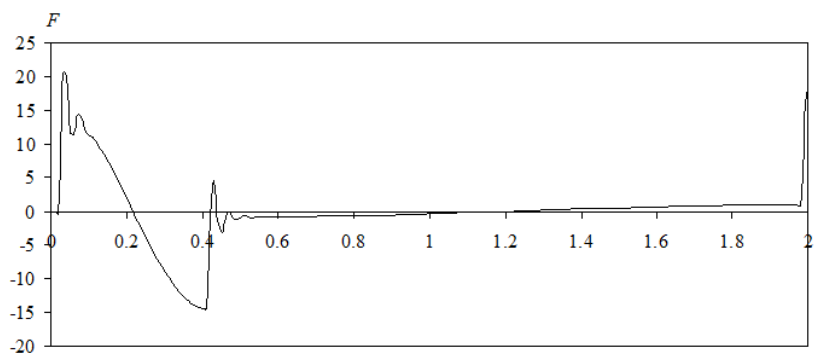


Рис. 6. Сила сопротивления при движении тела

Резкое изменение скорости при смене направления движения приводит к сильному увеличению силы сопротивления. В период времени движения материальной точки с медленной скоростью тело также движется с малой скоростью. Сила сопротивления при этом более чем на порядок меньше, по сравнению с первой частью периода T_0 .

Рассмотрим гидродинамическую картину течения около колеблющегося тела. На рис. 7 отмечены моменты времени и для этих моментов времени показаны линии тока около движущегося тела.

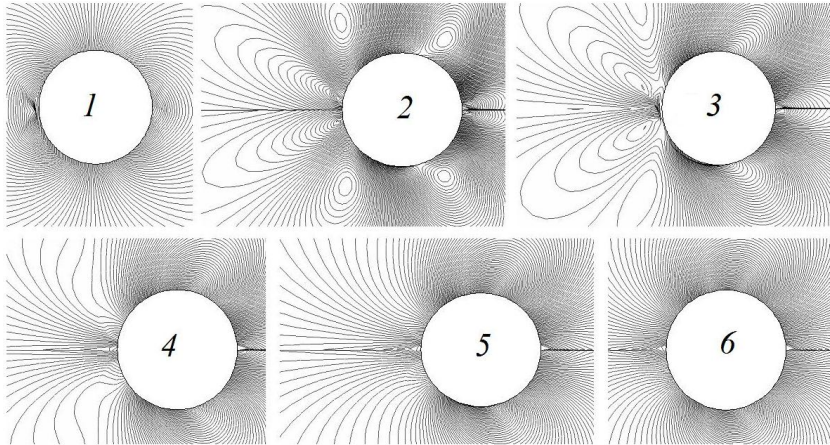


Рис. 7. Линии тока около движущегося тела: 1 – $t = 0,1$; 2 – $t = 0,4$; 3 – $t = 0,5$; 4 – $t = 0,6$; 5 – $t = 0,7$; 6 – $t = 1$

В течение времени $0 < t < 0,4$ тело движется в направлении $x < 0$, как показано на рис. 8 слева.

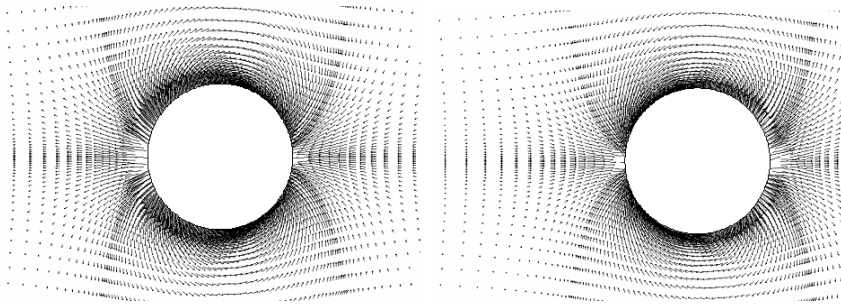


Рис. 8. Поле течения около движущегося тела: $t = 0,1$; $t = 1$

Замкнутые линии тока при этом не образуются. При смене направления движения (время $t \geq 0,4$) тело движется в возмущенной жидкости, в результате чего появляются замкнутые линии тока. С течением времени $t \geq 0,7$ картина течения жидкости становится более однородной. В правой части рис. 8 показано поле скоростей при движении тела в положительном направлении.

Управление движением тела

Управлять направлением движения тела можно поворотом оси, вдоль которой перемещается материальная точка m_1 на угол φ (см. рис. 1), относительно оси ξ подвижной системы координат. Поворот направления колебаний на угол φ не означает, что тело будет двигаться в этом направлении. Обозначим через θ угол направления перемещения внутренней точки. Величина этого угла равна сумме углов φ и φ_0 : $\theta = \varphi + \varphi_0$. Примем величину угла θ за управляющую функцию для обеспечения движения по заданной траектории. Следовательно, для обеспечения дви-

жения тела в жидкости по заданной траектории необходимо решать задачу оптимального управления типа Лагранжа. В качестве критерия оптимальности примем минимальное значение среднеквадратического отклонения траектории тела $\mathbf{r}(t)$ от заданной $\mathbf{Y}(t)$:

$$J = \int_0^T |\mathbf{r}(t) - \mathbf{Y}(t)| dt \rightarrow \min.$$

Управляемый процесс описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1) и уравнениями Навье – Стокса (2). Для возможности многократного решения уравнений (1) необходимо выразить силу сопротивления через параметры движения в явном виде. Для установления такой связи проведены расчеты возвратно-поступательного движения тела в диапазонах изменения величин: $1 < \omega_1 \leq 10$; $200 \leq \text{Re} \leq 10000$. Полученная зависимость силы сопротивления в направлении движения от параметров движения тела в жидкости имеет вид

$$\mathbf{F} = q_1 \mathbf{A}^{k-1} + q_2 \frac{C_D |\mathbf{U}_b| \mathbf{U}_b}{2},$$

$$C_D = \frac{q_3}{\text{Re}} (1 + q_4 \text{Re}^\gamma),$$

$$\mathbf{A}^{k-1} = \frac{\mathbf{U}_b^{k-1} - \mathbf{U}_b^{k-2}}{\Delta t}; q_1 = -3,2; q_2 = 0,57; q_3 = 7; q_4 = 0,6; \gamma = 0,87.$$

В плоскости x, y зададим некоторую траекторию $y_0 = y_0(x)$. Будем считать, что траектория тела характеризуется точками x_c, y_c , являющимися координатами тела в конце каждого периода времени T_0 . Необходимо продвинуться около траектории $y_0 = y_0(x)$ с минимальными отклонениями. Параметр $\omega_1 > 1$ на данной траектории принимается постоянным. Управляющей функцией является угол поворота вектора ρ_1 . Тогда функционал в задаче оптимального управления принимает вид

$$J(\theta) = \int_0^T [y_c(t) - y_0(x_c(t))]^2 dt \rightarrow \min. \quad (5)$$

Задача оптимального управления (1), (5) решалась численно с применением гибридного генетического алгоритма [11].

В качестве примера зададим траекторию

$$y_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ x-1, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x, \end{cases}$$

нанесенную на рис. 9 линией 3.

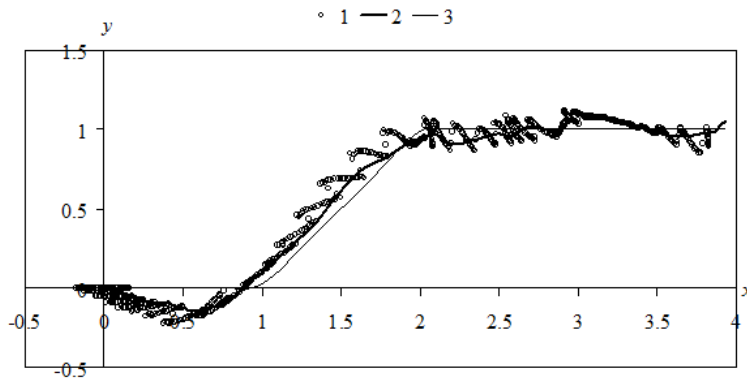


Рис. 9. Траектория управляемого движения тела

Рассчитанная траектория точек x_c, y_c показана на рис. 9 – зависимость 2. Положение центра масс тела описывается точками 1. Движение начинается из точки с координатами $x = 0, y = 0$ с нулевым углом $\varphi_0 = 0$.

Изменение управляющей функции во времени $\theta(t)$ приведена на рис. 10 (зависимость 2).

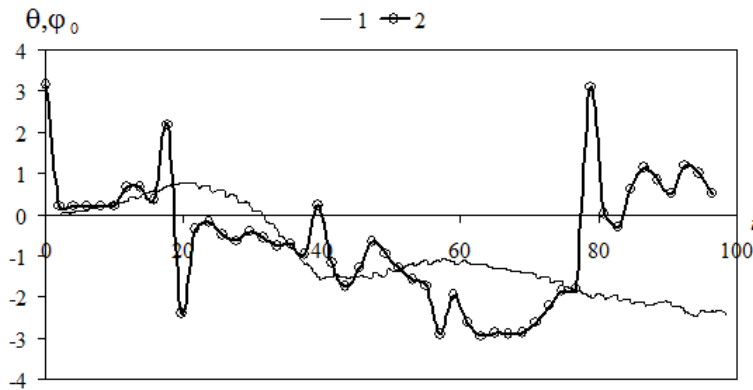


Рис. 10. Управляющая функция $\theta(t)$ и угол $\varphi_0(t)$

Движение по линии $y = 0$ осуществляется непродолжительное время. Для того чтобы повернуть и двигаться по наклонному участку траектории, необходимо опуститься ниже оси $y = 0$. При поворотах требуется большая амплитуда поворота направляющего угла. Само тело, т. е. подвижная система координат, разворачивается на 130° (зависимость 1 на рис. 10).

Проведенные расчеты показали, что управление движением тела, осуществляемым за счет перемещения внутренних масс, является довольно сложным. Тем не менее возможно достижение произвольной точки пространства при выборе соответствующей программы движения. Для установления некоторых правил органи-

зации управления следует провести обширные параметрические исследования для разных видов траекторий движения тела при различных критериях управления.

Библиографические ссылки

1. *Stephen Childress, Saverio E. Spagnolie, Tadashi Tokieda.* A bug on a raft: recoil locomotion in a viscous fluid // *J. Fluid Mech.* – 2011. – Vol. 669. – P. 527–556.
2. *Козлов В. В., Рамоданов С. М.* О движении изменяемого тела в идеальной жидкости // *ПММ.* – 2001. – Т. 65, вып. 4. – С. 592–601.
3. *Козлов В. В., Онищенко Д. А.* О движении в идеальной жидкости тела, содержащего внутри себя подвижную сосредоточенную массу // *ПММ.* – 2003. – Т. 67, № 4. – С. 620–633.
4. *Рамоданов С. М., Тенев В. А.* Движение тела с переменной геометрией масс в безграничной вязкой жидкости // *Нелинейная динамика.* – 2011. – Т. 7, № 3. – С. 635–648.
5. *Козлов В. В., Рамоданов С. М.* О движении изменяемого тела в идеальной жидкости.
6. *Mougin G., Magnaudet J.* The generalized Kirchhof equations and their application to the interaction between a rigid body and an arbitrary time-dependent viscous flow // *Int. Journal of Multiphase Flow*, 28, (2002), pp.1837–1851.
7. *Howe M. S.*, 1995. On the force and moment on a body in an incompressible fluid, with application to rigid bodies and bubbles at high and low Reynolds numbers // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 48, 401–426.
8. A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries / *R. Mittal, H. Dong, M. Bozkurtas, F. M. Najjar, A. Vargas, A. von Loebbecke* // *J. of Computational Physics*, 227 (2008), pp.4825–4852.
9. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. – М. : Наука, 1974. – 711 с.
10. A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries / *R. Mittal, H. Dong, M. Bozkurtas, F. M. Najjar, A. Vargas, A. von Loebbecke.*
11. *Тенев В. А., Якимович Б. А.* Генетические алгоритмы в моделировании систем. – Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2010. – 308 с.

Работа выполнена в рамках гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. № 11.G34.31.0039).

V. A. Tenenev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Izhevsk State Technical University

E. V. Vetchanin, Postgraduate Student, Izhevsk State Technical University

The Controlled Movement of an Object in Liquid at Reciprocating Motion of an Internal Point Particle

The numerical solution of a problem of object movement with variable mass geometry in a viscous liquid is presented. The problem of the prescribed trajectory movement control is set for the reciprocating motion of an internal point particle. The optimum control results of the problem solution with use of the genetic algorithm are presented.

Keywords: object movement, variable mass geometry, optimum control, genetic algorithm

Получено: 16.11.11