

УДК 532.522.2

В. А. Тенев, доктор физико-математических наук, профессор  
 А. А. Калинин, кандидат технических наук, доцент  
 Ю. В. Турыгин, доктор технических наук, профессор  
 А. В. Свинов, аспирант  
 Ижевский государственный технический университет

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МНОГОФАЗНОЙ СТРУИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ ДВИЖУЩЕГОСЯ ПРОМЫВАЕМОГО ПОЛОТНА

Представлена математическая модель натекания жидкой струи на движущуюся преграду, основанная на уравнениях гидродинамики в трехмерной постановке при соответствующих граничных условиях. Результаты численного исследования показали существенное влияние скорости движения преграды на характер растекания жидкости по поверхности преграды. Струя отклоняется по ходу движения преграды, и пятно растекания становится вытянутым.

**Ключевые слова:** течение струи, пористый материал, математическая модель, движущееся полотно

Струйная промывка широко используется в целлюлозно-бумажной промышленности (ЦБП) для очистки загрязняющихся при производстве бумаги движущихся технологических полотен [1, 2]. Моющие устройства в виде многоструйных и комбинированных водно-воздушных агрегатов применяют для поддержания в работоспособном состоянии технологической одежды – сукон и сеток. В процессе работы происходит постепенное загрязнение полотен одежды различными частицами и вязкими субстанциями, переходящими в него из бумажной массы, что приводит к снижению эксплуатационных характеристик технологических полотен и требует проведения их периодической очистки.

Схема промывки сукна с использованием моющих агрегатов высокого давления показана на рис. 1.

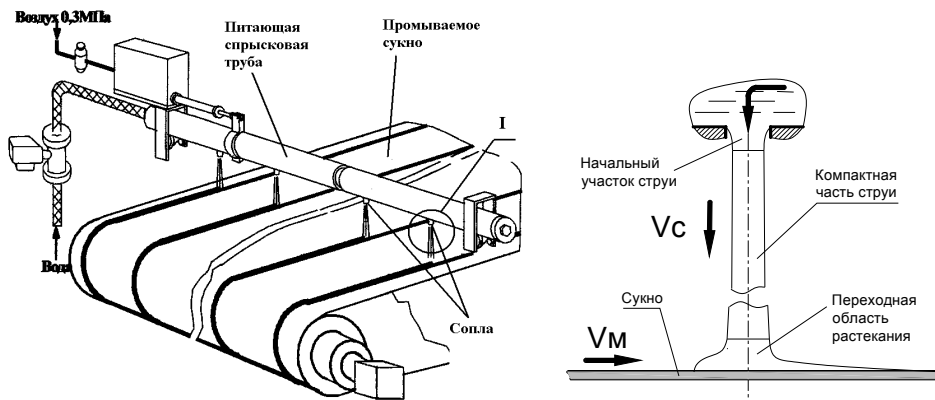


Рис. 1. Схема промывки технологических полотен (сукон) бумагоделательных машин

Для эффективной работы данной техники важно правильно выбрать параметры струйного течения, которые предопределяют характер воздействия на обрабатываемые предметы: в одних случаях струя только удаляет с поверхности предметов загрязняющие частицы, а в других случаях способна разрезать сам предмет на части. Поэтому важно установить особенности процесса взаимодействия струи с промываемым полотном, определить наиболее важные параметры и характеристики ее соударения, растекания и в последующем обоснованно назначать режимы промывки, а также повысить эффективность и качество проектирования самих устройств промывки.

При встрече с препятствием поток жидкости растекается по его поверхности (рис. 1). Участок струи, прилегающий к поверхностному растекающемуся слою, дополнительно расширяется, поскольку в нем происходит резкое снижение скорости течения. Движение промываемого полотна (сукна) будет вызывать смещение области соприкосновения струи с поверхностью (а также, вероятно, и самой струи). Характер смещения будет зависеть от соотношения скоростей  $V_c$  и  $V_m$ . Силовое воздействие струи на полотно пропорционально скорости, величине объемного расхода и плотности жидкости. Создаваемая струей сила будет в какой-то степени деформировать полотно, т. к. оно обладает определенной податливостью.

При взаимодействии с промываемым материалом создаваемая моющая способность струи во многом зависит от того, какую форму и гидродинамические характеристики они приобрели на дистанции распространения от источника. Здесь в первую очередь важны следующие характеристики: скоростной напор  $\rho u^2$  струи (здесь  $\rho$ ,  $u$  - плотность жидкости и скорость струи в момент соприкосновения с поверхностью), а также степень турбулизованности жидкости в теле струи.

Определенное влияние на движение жидкости в струе и ее структуру оказывает трение при соприкосновении с воздухом. Воздух, окружающий струю, за счет трения увлекается движущейся жидкостью, и таким образом формируется многофазный поток. Это требует несколько иного подхода к моделированию процесса, нежели просто принятие границы струи в виде свободной поверхности.

#### **Математическая модель натекания жидкостной струи круглого сечения на движущуюся преграду**

Рассматривается задача натекания круглой жидкой струи на преграду, расположенную по нормали к оси струи. Скорость истечения струи  $U$  из сопла радиусом  $R$ . Преграда может двигаться в направлении, нормальном к скорости истечения струи из сопла с некоторой постоянной во времени скоростью  $V$ .

Уравнения гидродинамики взяты в общем виде в криволинейной ортогональной системе координат  $x_1, x_2, x_3$  из работы [3].

Уравнение сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho q_i \frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} \right) = 0,$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;  $q_1, q_2, q_3$  – проекции вектора скорости на оси координат  $x_1, x_2, x_3$ ;  $H_1, H_2, H_3$  – коэффициенты Лямэ.

Уравнения сохранения импульса

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial q_k}{\partial t} + \rho \sum_{i=1}^3 \left( \frac{q_i}{H_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{q_i^2}{H_i H_k} \frac{\partial H_i}{\partial x_k} + \frac{q_i q_k}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x_i} \right) = \\ & = \frac{1}{H_k} \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{H_1 H_2 H_3 H_k}{H_i} P_{ik} \right) - \frac{P_{ik}}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x_k} \right], \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Компоненты тензора напряжений  $\mathbf{P}$  выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{11} &= -p + \frac{4}{3} \mu \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{q_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \frac{q_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \right) - \\ & - \frac{2}{3} \mu \left[ \frac{1}{H_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial q_3}{\partial x_3} + \frac{q_1}{H_1} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{H_2 H_3} \left( q_2 \frac{\partial H_3}{\partial x_2} + q_3 \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right) \right], \\ P_{22} &= -p + \frac{4}{3} \mu \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{q_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \frac{q_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right) - \\ & - \frac{2}{3} \mu \left[ \frac{1}{H_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial q_3}{\partial x_3} + \frac{q_2}{H_2} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{H_1 H_3} \left( q_1 \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + q_3 \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \right) \right], \\ P_{33} &= -p + \frac{4}{3} \mu \left( \frac{1}{H_3} \frac{\partial q_3}{\partial x_3} + \frac{q_1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + \frac{q_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right) - \\ & - \frac{2}{3} \mu \left[ \frac{1}{H_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{q_3}{H_3} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{H_1 H_2} \left( q_1 \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + q_2 \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right) \right], \\ P_{12} = P_{21} &= \mu \left[ \frac{1}{H_2} \frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial q_2}{\partial x_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \left( q_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + q_2 \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) \right], \\ P_{23} = P_{32} &= \mu \left[ \frac{1}{H_3} \frac{\partial q_2}{\partial x_3} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial q_3}{\partial x_2} - \frac{1}{H_2 H_3} \left( q_2 \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + q_3 \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right) \right], \\ P_{13} = P_{31} &= \mu \left[ \frac{1}{H_3} \frac{\partial q_1}{\partial x_3} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial q_3}{\partial x_1} - \frac{1}{H_1 H_3} \left( q_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + q_3 \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right) \right], \end{aligned}$$

где  $p$  – давление;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости.

Для стационарного несжимаемого течения уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} & \rho \sum_{i=1}^3 \left( \frac{q_i}{H_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{q_i^2}{H_i H_k} \frac{\partial H_i}{\partial x_k} + \frac{q_i q_k}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x_i} \right) = \\ & = \frac{1}{\rho H_k} \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{H_1 H_2 H_3 H_k}{H_i} P_{ik} \right) - \frac{P_{ik}}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x_k} \right], \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 P_{11} &= -p + 2\mu \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{q_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \frac{q_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} \right), \\
 P_{22} &= -p + 2\mu \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{q_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \frac{q_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right), \\
 P_{33} &= -p + 2\mu \left( \frac{1}{H_3} \frac{\partial q_3}{\partial x_3} + \frac{q_1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + \frac{q_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} \right).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Для трехмерного течения в цилиндрической системе координат примем обозначения:

$x_1 = x, x_2 = r, x_3 = \varphi$  – координатные линии;

$q_1 = u, q_2 = v, q_3 = w$  – проекции вектора скорости на оси координат;

$H_1 = 1, H_2 = 1, H_3 = r$  – коэффициенты Лямэ.

При наличии в потоке двух фаз записывается уравнение переноса величины  $f$  (признака переносимого вещества) [4]:

$$\frac{\partial}{\partial x}(ruf) + \frac{\partial}{\partial r}(rvf) + \frac{\partial}{\partial r}(wf) = 0, \tag{2}$$

где  $f = 1$  – вода;  $f = 0$  – воздух.

Плотность и вязкость в расчетной области определялись с использованием величины  $f$ :

$$\rho = \rho_1 f + (1-f)\rho_0, \quad \nu = \nu_1 f + (1-f)\nu_0, \quad \mu = \rho \nu.$$

Индекс 0 соответствует воздуху, 1 – воде.

Граничные условия, соответствующие данной постановке задачи, имеют следующий вид.

1. Левая граница области ( $x = 0$ ):

$$v = 0, w = 0, \quad u = \begin{cases} U, & r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad f = \begin{cases} 1, & r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

2. Правая граница области ( $x = L$ ):

$$u = 0, \quad v = V \cos(\varphi), \quad w = -V \sin(\varphi), \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

3. Цилиндрическая граница, удаленная от оси ( $r = r_\infty, \frac{r_\infty}{R} \gg 1$ ):

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad f = 0, \quad p = P_\infty.$$

4. Плоскость симметрии ( $\varphi = 0; \varphi = \pi$ ):

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0.$$

### Результаты численного моделирования

Уравнения гидродинамики (1), (2) решались численно с применением алгоритма «SIMPLE» [5]. Расчетная сетка в плоскости  $(x, r)$  приведена на рис. 2.

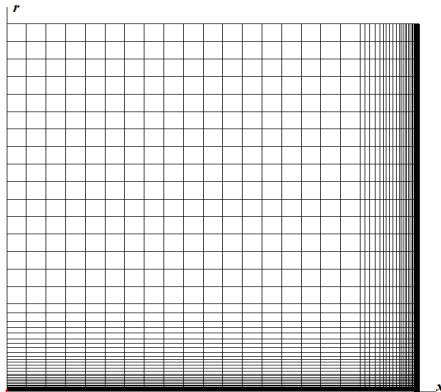


Рис. 2. Расчетная сетка

По угловой координате вводится равномерная сетка  $\varphi_k = k\Delta\varphi$ ,  $\varphi_k \in [0, \pi]$ . Разностная сетка имеет размерность  $51 \times 57 \times 31$ . В плоскости  $(x, r)$  производится сгущение сетки к оси струи и к преграде, на которую происходит натекание.

Расчеты проведены для значений: скорость истечения струи  $U = 50 \dots 100$  м/с; скорость движения преграды  $V = 0 \dots 50$  м/с; радиус сопла  $R = 0,5 \dots 1$  мм. В результате было получено трехмерное векторное поле натекания струи на движущуюся преграду. Визуализация трехмерного поля оказалась затрудненной в связи с многочисленными наложениями нескольких областей течения. Поэтому для дальнейшего анализа выполнялось построение картин течения в плоскостях  $(x, r)$  при

$$\left(\varphi = 0, \varphi = \pi\right); \quad \left(\varphi = \frac{\pi}{8}, \varphi = \pi + \frac{\pi}{8}\right); \quad \left(\varphi = \frac{2\pi}{8}, \varphi = \pi + \frac{2\pi}{8}\right); \quad \left(\varphi = \frac{3\pi}{8}, \varphi = \pi + \frac{3\pi}{8}\right);$$

$$\left(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{3\pi}{2}\right).$$

На рис. 3 представлено поле течения в сечении  $(\varphi = 0, \varphi = \pi)$  при скорости истечения  $U = 100$  м/с и скорости движения преграды  $V = 50$  м/с в крупномасштабном виде.

На этом рисунке видна существенно несимметричная структура течения. При натекании струи жидкость тормозится и разворачивается в радиальных направлениях. В направлении движения преграды жидкость и воздух ускоряются движущейся поверхностью, а с противоположной стороны замедляются. В результате с передней стороны струи (по движению преграды) образуется возвратное течение.

Структура течения, полученная при визуализации в сечениях  $\left(\varphi = \frac{\pi}{8}, \varphi = \pi + \frac{\pi}{8}\right); \left(\varphi = \frac{2\pi}{8}, \varphi = \pi + \frac{2\pi}{8}\right); \left(\varphi = \frac{3\pi}{8}, \varphi = \pi + \frac{3\pi}{8}\right)$ , оказалась примерно аналогичной той, что приведена на рис. 3.

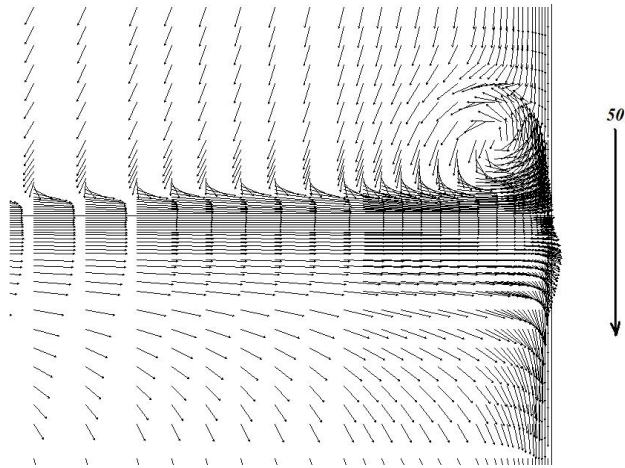


Рис. 3. Детализированное поле течения в сечении ( $\varphi = 0, \varphi = \pi$ ),  $V = 50$  м/с

В данном разрезе течение, как и предполагалось, оказалось симметричным. Картины течения (рис. 3, 4) показывают, что в области натекания струи на движущуюся преграду формируется подковообразный вихрь.

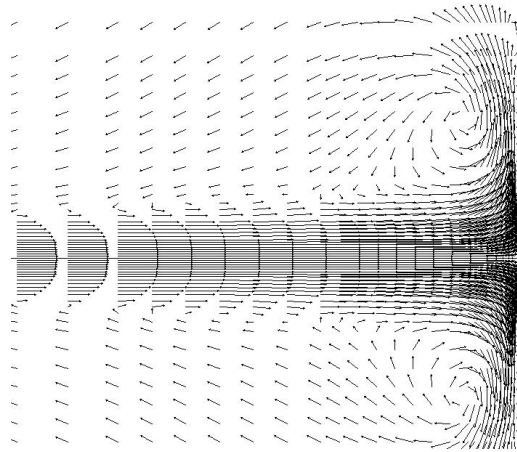


Рис. 4. Поле течения в сечении  $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{3\pi}{2}\right)$ ,  $V = 50$  м/с

При анализе результатов обнаружилось некоторое отклонение тела струи от начального направления. Это отклонение показано в виде условных границ струи в сечении, совпадающем с направлением движения преграды на рис. 5, а.

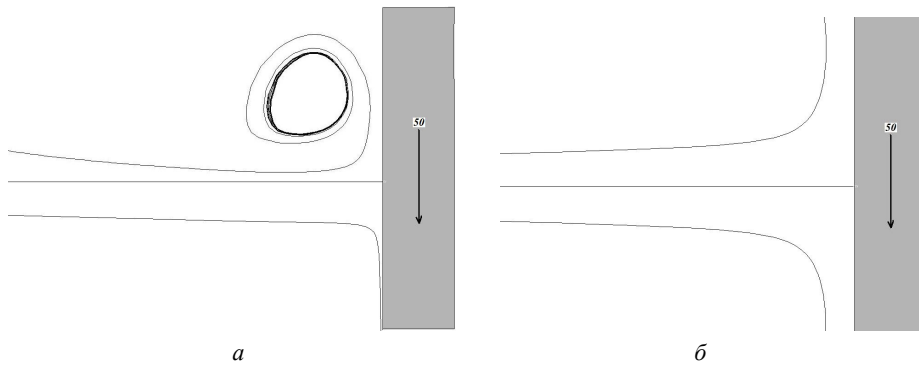


Рис. 5. Отклонение потока жидкости в струе (а) в сечении  $(\varphi = 0, \varphi = \pi)$ ,  $V = 50$  м/с и картина симметричного положения (б) границ жидкости в сечении  $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{3\pi}{2}\right)$

Как видно на рис. 3, жидкость увлекается по ходу движения поверхности преграды. Замедление потока жидкости в струе с передней стороны приводит к утолщению слоя растекания с последующим отрывом от преграды. Циркуляционное движение жидкости соответствует разрушению водяного слоя. Положение границ струи смещается почти на половину диаметра от оси по ходу движения преграды.

В перпендикулярном движении преграды сечении (рис. 5, б) картина растекания иная и границы струи расположены симметрично.

Таким образом, численное моделирование процесса натекания струи на движущуюся поверхность показывает, что при скорости движения преграды, соизмеримой со скоростью истечения струи, картина натекания имеет выраженный трехмерный характер. Пятно растекания струи в точке встречи с преградой вытянуто по ходу движения. В направлении, обратном движению, пятно растекания также распространяется и имеет конечные размеры.

Линии равного давления (изобары) приведены на рис. 6.

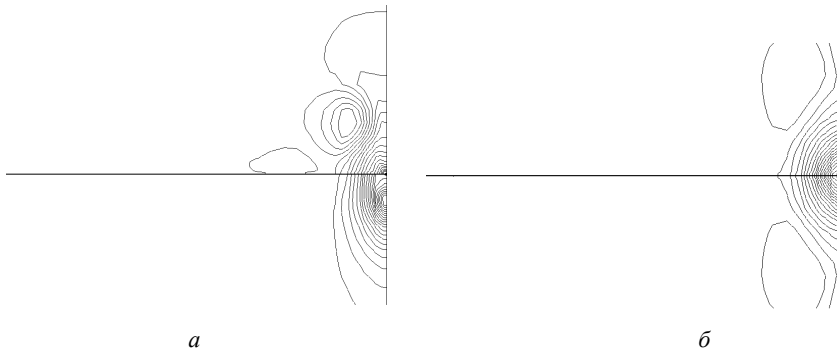


Рис. 6. Изобары в сечении  $(\varphi = 0, \varphi = \pi)$ ,  $V = 50$  м/с (а) и изобары в сечении

$$\left(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{3\pi}{2}\right), V = 50 \text{ м/с (б)}$$

Эти рисунки также демонстрируют трехмерный характер течения при высоких скоростях движения преграды.

Был также выполнен численный анализ процесса натекания струи при движении преграды с меньшей скоростью движения преграды ( $V = 10$  м/с). По результатам анализа можно отметить, что завихрение и обратное растекание в точке встречи струи с преградой также проявляется, но в значительно меньшей степени.

Несимметричный характер течения при движении преграды с высокой скоростью приводит к несимметричному распределению давления в окрестности соударения струи с поверхностью (рис. 7).

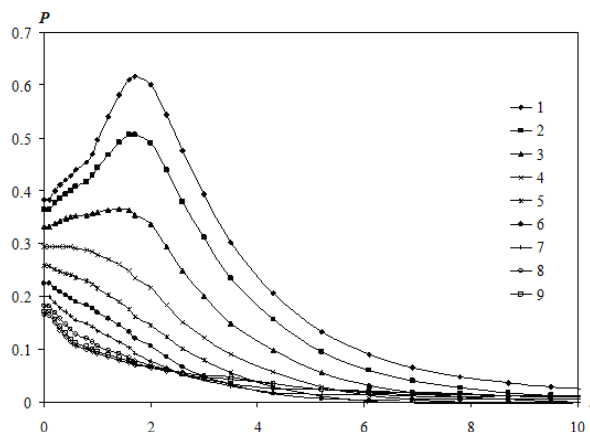


Рис. 7. Распределение давления на твердой движущейся поверхности,  $V = 50$  м/с

На рис. 7 приведено изменение относительного давления  $P = \frac{p}{\rho U^2 / 2}$  в зависимости от относительного радиуса  $\frac{r}{R}$ . Номера зависимостей соответствуют сечениям:

$$1 - \varphi = 0; 2 - \varphi = \frac{\pi}{8}; 3 - \varphi = \frac{\pi}{4}; 4 - \varphi = \frac{3\pi}{8}; 5 - \varphi = \frac{\pi}{2}; 6 - \varphi = \frac{5\pi}{8}; 7 - \varphi = \frac{6\pi}{8};$$

$$8 - \varphi = \frac{7\pi}{8}; 9 - \varphi = \pi.$$

Движение преграды приводит к смещению жидкой струи по ходу движения, поэтому в сечениях  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{8}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  максимум давления смещен по отношению к линии распространения (оси) струи. Величины этих максимумов больше, чем для сечений в задней части пятна растекания.

Уменьшение скорости движения преграды выравнивает профили давления по сечениям (рис. 8).



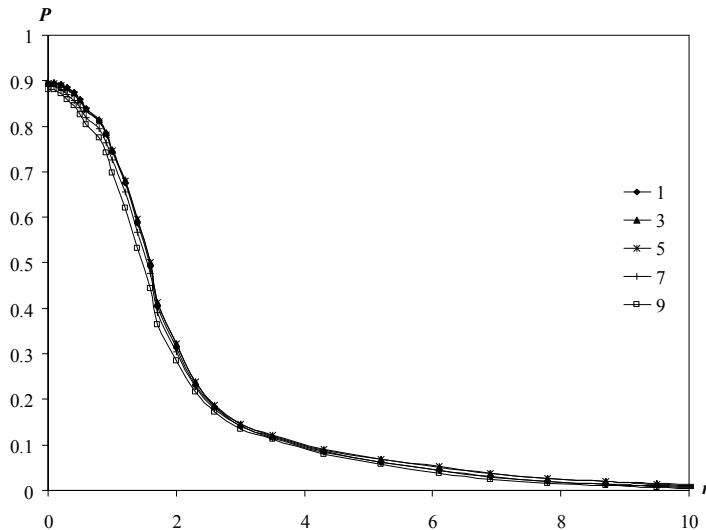


Рис. 8. Распределение давления на твердой движущейся поверхности,  $V = 10$  м/с

Результаты численного моделирования натекания жидкой струи на движущуюся преграду показывают на необходимость решения задачи в трехмерной постановке при скоростях движения, соизмеримых со скоростью истечения струи из сопла  $\left(\frac{V}{U} \geq 0,1\right)$ . При меньшей скорости движения ( $V = 10$  м/с) с некоторой погрешностью возможно решение задачи в осесимметричной постановке.

#### Заключение

Разработана математическая модель натекания жидкой струи на движущуюся преграду, основанная на уравнениях гидродинамики в трехмерной постановке при соответствующих граничных условиях.

Численное исследование показало существенное влияние скорости движения преграды на характер растекания жидкости по поверхности преграды. С передней стороны струи по ходу движения преграды формируется возвратное движение жидкости, приводящее к отрыву жидкого слоя. Струя отклоняется по ходу движения преграды, и пятно растекания становится вытянутым.

При соотношении скоростей движения преграды и истечения из сопла  $\frac{V}{U} < 0,1$  для численного моделирования можно применить осесимметричную постановку задачи.

#### Библиографические ссылки

1. Руфф Х. Для очистки одежды машин // Целлюлоза, бумага, картон. – 2002. – № 6. – С. 26–28.
2. Альшиц С. Д. Современные конструкции sprысков бумаго- и картоноделательных машин. – М. : ВНИПИЭИЛеспром, 1974. – С. 3–60.
3. Моисеев М. Г., Савельев Ю. П., Циркунов Ю. М. Трение и теплообмен в аэродинамике летательных аппаратов. Уравнения Навье – Стокса и ламинарного пограничного слоя. – Л. : ЛМИ, 1986. – 116 с.

4. *Ferziger J. H., Peric M.* Computational Methods for Fluid Dynamics. – Springer, 2002. – P. 423.
5. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М. : Энергоиздат, 1984. – 150 с.

Данная работа выполнена при поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 года)», проект № 2.1.2/11299 (2.1.2/2690).

\*\*\*

*V. A. Tenenyeu*, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Izhevsk State Technical University

*A. A. Kalinkin*, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Izhevsk State Technical University

*Yu. V. Turygin*, Doctor of Technical Sciences, Professor, Izhevsk State Technical University

*A. V. Svinov*, Postgraduate Student, Izhevsk State Technical University

#### **Modelling of Polyphase Jet Interaction with a Moving Cloth Surface during Ablution Process**

*The mathematical model of the liquid jet leakage on a porous moving barrier is presented. The model is based on 3D hydrodynamics equations with appropriate boundary conditions. The numerical investigation showed an essential dependence of the barrier velocity on characteristics of the liquid spreading. The results can be applied in organization of the ablation process of porous materials.*

**Keywords:** liquid flow, porous materials, mathematical model

Получено: 28.11.11