

8. Фокусирующая система (варианты) : пат. 2427056 Рос. Федерация / Е. А. Морозов, И. Н. Ефимов ; заявл. 20.08.11.
9. Устройство создания ионных потоков : пат. 2389105 Рос. Федерация / Е. А. Морозов, И. Н. Ефимов ; заявл. 10.05.10.
10. Горизонты петаваттных лазерных комплексов / А. В. Коржиманов, А. А. Гonosков, Е. А. Хазанов и др. // Успехи физ. наук. – 2011. – Т. 181. – С. 9–32.

E. A. Morozov, DSc in Engineering, Professor, Tchaikovsky Technological Institute, Branch of Kalashnikov Izhevsk State Technical University

E. S. Kosov, Post-graduate, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Capability of high-precision focusing of high power ion beams

Capabilities of focus systems for generating high energy and power ion beams in microvolumes are analyzed. Advantage of applying linearly extended ion sources and axial symmetric magnetic focus fields is substantiated.

Keywords: ion source, ion gun, field-emission ion source, high-precision focusing, ion beams, ion implantation, electron optics

Получено: 19.03.12

УДК 519.95

Д. В. Пархоменко, аспирант

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

СПЕКТРАЛЬНАЯ АВТОМАТНАЯ ФУНКЦИЯ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЮ РЕГУЛЯРНЫЕ ЯЗЫКИ

Введено понятие спектральной автоматной функции и рассмотрены некоторые ее свойства. Изучено свойство этой функции порождать языки. Исследованы свойства множеств с кратностями, возникающих на выходе детерминированных автоматов. Все эти множества оказываются регулярными, «продолжаемыми» и образуют систему вложенных друг в друга регулярных языков.

Ключевые слова: спектральная автоматная функция, мультимножества на выход детерминированных автоматов, выходные языки детерминированных автоматов

Основные определения и результаты

Рассмотрит конечные алфавиты A, B : $A = \{a_1, \dots, a_{|A|}\}$, $B = \{b_1, \dots, b_{|B|}\}$. Тогда конечным детерминированным инициальным [1] автоматом V с входным алфавитом A и выходным алфавитом B назовем шестерку

$$V = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0),$$

где Q – конечное множество состояний автомата; φ – функция переходов, что $\varphi: A \times Q \rightarrow Q$, ψ – функция выходов: $\psi: A \times Q \rightarrow B$, а через q_0 обозначено начальное состояние автомата.

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a(t)) \\ b(t) = \psi(q(t), a(t)) \end{cases}$$

Заданный автомат порождает ограниченно детерминированную словарную функцию

$$f_V: A^* \rightarrow B^*$$

по следующему правилу: $f_V(\alpha) = \bar{\psi}(q_0, \alpha)$, где словарная функция $\bar{\psi}(q_0, \alpha)$ определяется по рекуррентному правилу

$$\bar{\psi}(q_0, \alpha a) = \bar{\psi}(q_0, \alpha) \psi(\varphi(q_0, \alpha), a),$$

для произвольных $a \in A$, $\alpha \in A^*$.

Для простоты изложения автор ограничился рассмотрением случая ¹ $|A|=|B|>1$.

Определение 1:

Пусть задан конечный детерминированный инициальный автомат V . Спектральной автоматной функцией автомата V назовем функцию $\kappa_V: B^* \rightarrow N \cup \{0\}$, определенную по правилу:

$$\kappa_V(\beta) = |\{\alpha \in A^* \mid f_V(\alpha) = \beta\}|.$$

Сформулируем основные свойства спектральной автоматной функции.

Утверждение 1:

Для любого конечного детерминированного инициального автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ его спектральная автоматная функция κ_V удовлетворяет:

- 1) $\sum_{\beta \in B^N} \kappa_V(\beta) = |A|^N$, для любого натурального N ;
- 2) для любого $\beta \in B^*$, $\kappa_V(\beta) = 1$, тогда и только тогда, когда f_V – биективная функция.

Спектральная автоматная функция первоначально исследовалась как средство для распознавания множеств слов, через синтез детерминированного автомата. О применении спектральной автоматной функции, к распознаванию образов можно прочесть в статье [2]. В данной работе исследуется свойство спектральной автоматной функции порождать языки.

Далее под языком в алфавите B будем понимать произвольное множество слов этого алфавита. Язык L алфавита B называется *автоматно перечислимым* [1], если найдется автомат $V = (C, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, что $L = \{\bar{\psi}(q_0, \alpha) \mid \alpha \in C^*, \alpha \neq \Lambda\}$.

Определение 2:

Произвольный непустой язык L алфавита B назовем *продолжаемым*, если для каждого слова $\beta \in B^*$ найдется буква $b \in B$, что $\beta b \in B^*$.

В работе [1] установлено, что язык является автоматно-перечислимым в том и только том случае, когда он регулярный, префиксный (замкнут относительно операции взятия собственных начал слов) и продолжаемый.

¹ В случае $|A| \neq |B|$ получаются аналогичные результаты.

Расширим вопрос о структуре множества выходных слов автомата. Рассмотрим произвольный конечный автомат. Обозначим через

$$L_1 = \{ \beta \in B^* \mid \exists \alpha \in A: \bar{\psi}(\alpha) = \beta \}$$

множество всех выходных слов автомата.

Определение 3:

Для произвольного конечного детерминированного автомата V обозначим

$$L_i(V) = \{ \beta \in B^* \mid \kappa_i(\beta) \geq i \}.$$

Очевидно, $L_i \subseteq L_{i-1}$, для всех $i \geq 2$. Справедливы

Теорема 1:

Для любого конечного инициального автомата V и для всякого $i > 0$, $L_i(V)$ – регулярный язык.

Теорема 2:

Для любого конечного инициального автомата V и для всякого $i \geq 1$, $L_i(V)$ – продолжаемый язык.

Следствие 1:

Для любого конечного инициального автомата V и для всякого $i \geq 1$, $L_i(V)$ – либо бесконечное, либо пустое множество.

Таким образом, каждый конечный детерминированный инициальный автомат V задает, в общем случае, бесконечную цепочку вложенных регулярных, продолжаемых языков:

$$L_1(V) \supseteq L_2(V) \supseteq L_3(V) \supseteq \dots$$

Полагая фиксированными алфавиты A, B , введем класс языков типа $\mathbf{Li}$.

Определение 4:

$\mathbf{Li} = \{ L_i(V) \mid V \in K(A, B) \}$, где $K(A, B)$ – класс всех автоматов вида $(A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$.

Теорема 1 утверждает, что для любого натурального i любой язык $L \in \mathbf{Li}$ является регулярным. Однако класс языков $\mathbf{Li}$ не совпадает с классом регулярных языков: $\mathbf{Li} \neq \text{Reg}$. Рассмотрим, к примеру, над алфавитом E_2 регулярный язык $\{00, 01, 10, 11\}$. Из мощностных соображений он не принадлежит классу языков $\mathbf{Li}$ ни для какого $i > 1$. В самом деле, принадлежность данного регулярного языка к классу $\mathbf{Li}$ означает, что существует конечный детерминированный W автомат вида $W = (E_2, Q, E_2, \varphi, \psi, q_0)$, что каждое слово из набора $\{00, 01, 10, 11\}$ имеет не менее двух прообразов при автоматном отображении f_W , что противоречиво, так как мощность множества прообразов (E_2^2) равна 4.

Справедливы

Теорема 3:

Для любых натуральных $i \neq j$ выполнено: $\mathbf{Li} \not\subseteq \mathbf{Lj}$.

Утверждение 2:

1) $\mathbf{L1}$ замкнут относительно операций $\cup$ и взятия автоматной функции и итерации. Но не замкнут относительно $\cap$ и конкатенации.

2) $\mathbf{Li}$ не замкнут относительно операций $\cup, \cap$, но замкнут относительно операции взятия автоматной функции, для $i > 1$.

Желающим более подробно познакомиться с введенными языками и вопросами их сложности можно порекомендовать работу [3]. В данной же работе будет изучен вопрос о взаимном расположении данных языков.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору, доктору физико-математических наук Д. Н. Бабину за постоянное внимание к работе и ценные советы.

Доказательства

Доказательство Теоремы 1:

Зафиксируем произвольный конечный автомат $R = (A, Q, B, \phi, \psi, q_0)$. И рассмотрим L_2 – множество слов, встречающихся на выходе автомата R не менее двух раз. Сопоставим каждой букве b алфавита B квадратную целочисленную матрицу $M_b = \{m_{ij}\}$ размера $|Q| \times |Q|$, $0 \leq m_{ij} \leq |A|$, по правилу:

- 1) m_{ij} = числу способов перейти из i -го в j -е состояние R , выдав букву b ;
- 2) $m_{ij} = 0$, если таких способов нет.

Произвольному слову β из B^* сопоставим произведение матриц, сопоставленных каждой букве этого слова, причем порядок сомножителей в произведении естественным образом совпадает с порядком букв в слове β . Таким образом, каждому слову из выходного алфавита сопоставлена некоторая квадратная матрица M_β . Заметим, что при таком сопоставлении (i, j) -й элемент матрицы M_β – суть число способов перейти из i в j состояние автомата R , выдав слово β .

Пусть τ – квадратная матрица размера $|Q| \times |Q|$ (*). Пусть элементы этой матрицы принимают значения $-1, 0, 1$. Разобьем множество целочисленных матриц размера $|Q| \times |Q|$ на непересекающиеся классы:

$$M_\tau = \{M = \{m_{ij}\} \mid m_{ij} > 1, \text{ если } \tau_{ij} = -1, m_{ij} = \tau_{ij} \text{ иначе}\},$$

где $i, j \leq |Q|$. Так как матриц τ конечное число, то различных классов M_τ также конечно. Очевидно, что любая квадратная целочисленная матрица размера $|Q| \times |Q|$ лежит в каком-то классе, причем только в одном.

Построим источник, представляющий язык L_2 . Предъявим его в виде дерева.

Состояния источника – это классы M_τ .

Переход между состояниями осуществляется по правилу:

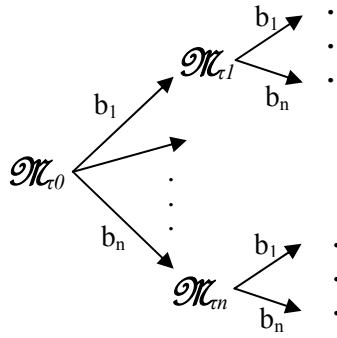
- 1) M_{τ_1} переходит в M_{τ_2} по b , если $M_{\tau_1} * M_b \subseteq M_{\tau_2}$;

2) вершина дерева – суть единичная матрица размера $|Q| \times |Q|$, где M_b – матрица, соответствующая символу b алфавита B .

Установим корректность первого пункта. Необходимо удостовериться, что все матрицы из класса M_{τ_1} при умножении на целочисленную матрицу M с неотрицательными элементами переходят в какой-то класс M_{τ_2} . Скажем, что матрица $M_1 \leq M_2$, если для всех возможных $i, j: m_{ij}^1 \leq m_{ij}^2$. Ясно, что каждый класс имеет минимальный элемент, с которым сравнимы все остальные элементы класса. Обозначим минимальный элемент класса M_{τ_1} через M_{τ_1} . Пусть $M_{\tau_1} * M = N \in M_{\tau_2}$. Для любой матрицы $M_1 \in M_{\tau_1}$ выполнено $N \leq M_1 = M_1 * M$, значит, $N \in M_{\tau_2}$. Что и требовалось.

Построим источник по данному дереву. Объявим финальными те состояния, которым соответствуют матрицы, у которых в первой строке есть элементы > 1 . Данный источник представляет L_2 , так как наличие в первой строке матрицы элемента > 1 эквивалентно тому, что слово, сопоставленное этой матрице, выдается > 1 раза.

Совершенно аналогичные рассуждения позволяют сделать вывод и о регулярности L_i для $i > 2$. Достаточно изменить множество квадратных матриц τ (*), добавив к ним недостающие элементы (2 для L_3 , 3 для L_4 и т. д.). Теорема доказана.

Рис. 1. Дерево источника, представляющего L_2 *Доказательство теоремы 2:*

Рассмотрим произвольный детерминированный автомат A с функцией переходов $\phi(\cdot, \cdot)$ и выходов $\psi(\cdot, \cdot)$, обозначим входной алфавит автомата A через $\{a_1, \dots, a_n\}$, а выходной — $\{b_1, \dots, b_m\}$, $m \leq n$. Пусть $\beta \in L_i(A)$, тогда найдется i входных слов $\alpha_1, \dots, \alpha_i$, которые переводят автомат в состояния $q_1', \dots, q_i'$ (некоторые могут совпадать) и на выходе дают данное β . Для каждого состояния q_k' из набора выходная функция $\psi(q_k', \cdot)$ принимает не более m значений. Рассмотрим $i \times n$ матрицу M , у которой p , r -й элемент суть выходная буква $\psi(q_p', a_r)$. Тогда легко видеть, что существует буква выходного алфавита b , которая встречается в выходе

$$\{\psi(q_1', a_1), \dots, \psi(q_1', a_n), \psi(q_2', a_1), \dots, \psi(q_2', a_n), \dots, \psi(q_i', a_n)\}$$

автомата A из состояний $q_1', \dots, q_i'$ не менее i раз. Если бы таковой не существовало, то матрица M состояла бы не более чем из $(i-1) \cdot m$ элементов, но $m \leq n$, следовательно, $(i-1) \cdot m < i \cdot n$, что невозможно. Данная буква b задает искоемое $\beta b \in L_i(A)$.

Для доказательства теоремы 3 потребуется ввести понятие расстояния по дереву, изученное в [2]. Рассмотрим функцию $\rho_d: B^* \cdot B^* \rightarrow N \cup \{0\}$, которая каждой паре слов одинаковой длины сопоставляет разность длины слова и номера первой буквы, в которой они отличаются. Для пар слов с разной длиной считаем функцию неопределенной. Если для натурального n рассмотреть дерево глубины n , а листьям дерева естественным образом приписать слова из B^n , то для двух произвольных $\alpha, \beta \in B^n$, $\rho_d(\alpha, \beta)$ есть глубина минимального полного поддерева, содержащего листья α и β . Иными словами, $\rho_d(\alpha, \beta)$ — суть половина длины кратчайшего пути, ведущего из α в β . Например, для слов $001, 101$: $\rho_d(001, 101)=3$ и для 010 и 222 : $\rho_d(010, 222)=3$.

Рассмотрим цепочку лексикографически упорядоченных множеств $A, A^2, A^3, \dots, A^m, \dots$ слов. Для каждого множества рассмотрим набор R_k попарных расстояний по дереву между соседними словами: $A^k = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_P\}$: $R_k = \{\rho_d(\alpha_1, \alpha_2), \rho_d(\alpha_2, \alpha_3), \dots, \rho_d(\alpha_{P-1}, \alpha_P)\} = \{r_1^k, r_2^k, \dots, r_{P-1}^k\}$, где $P = p^k$. Ясно, $R_k = R_{k-1}, k, R_{k-1}, k, R_{k-1}, \dots, k, R_{k-1}$, где число k входит в набор R_k ровно $(p-1)$ раз. Тем самым, получим «треугольник расстояний по дереву»:

$$\begin{aligned}
 R_1: & \quad I, I, \dots, I. \\
 R_2: & \quad R_1, 2, R_1, 2, R_1, \dots, 2, R_1 \\
 R_3: & \quad R_1, 2, R_1, 2, \dots, 2, R_1, 3, R_1, 2, R_1, \dots, 2, R_1, \dots, 3, R_1, 2, R_1, 2, \dots, 2, \\
 & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
 \end{aligned}$$

Отметим одну интересную особенность треугольника расстояний. Легко видеть, что для любого его «уровня», начиная с некоторого, число, большее и равное 2, присутствует на каждой p -й позиции; число, большее и равное 3, присутствует на каждой p^2 -й позиции; вообще для некоторого допустимого k число, большее и равное k , присутствует на каждой p^{k-1} -й позиции. Этот факт является прямым следствием определения расстояния по дереву ρ_d (см. 2.1). Для ссылок сформулируем его в виде:

Утверждение 1:

Для любых натуральных p, k и для всех R_i , где $i \geq k$ выполнено:

Числа большие или равные k встречаются в R_i на позициях, кратных p^{k-1} и только на них.

Пусть $L_T = \{\beta_1(y_1), \dots, \beta_M(y_M)\} = \{\beta_1, \beta_1, \dots, \beta_1, \beta_2, \beta_2, \dots, \beta_2, \dots, \beta_M, \beta_M, \dots, \beta_M\}$ – некоторое упорядоченное мультимножество слов длины n алфавита E_p . Мультимножеству L_T однозначно соответствует набор S длины $(\sum_{i=1}^M y_i - 1)$ попарных расстояний между соседними словами.

$$\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{y_1 - 1} \underbrace{\rho_d(\beta_1, \beta_2), 0, \dots, 0}_{y_2} \dots \underbrace{\rho_d(\beta_{M-1}, \beta_M), 0, 0, \dots, 0}_{y_M}$$

Рис. 2. Набор попарных расстояний между словами упорядоченного мультимножества слов

Скажем, что набор чисел S не превосходит другого набора чисел R , если эти наборы имеют одинаковую длину и каждый элемент набора S меньше либо равен соответствующего элемента набора R .

Утверждение 2:

Пусть заданы произвольные натуральные p, M, n и мультимножество $L_T = \{\beta_1(y_1), \dots, \beta_M(y_M)\}$ слов из E_p^n , такое, что $|L_T| = |E_p^n|$. Пусть L_T соответствует набор S расстояний между соседними словами. Тогда если S не превосходит R_n , то существует детерминированная словарная функция $f: E_p(n) \rightarrow E_p(n)$, что $f(E_p^n) = L_T$.

Доказательство теоремы 3:

Случай 1: $\mathbf{Li} \not\subseteq \mathbf{Lj}$.

Пусть даны натуральные $i < j = I + k$ для некоторого k . Пусть $E_p = \{a_1, \dots, a_p\}$, где $p > 1$. Покажем, что существует язык $L' \in \mathbf{Li}$: $L' \notin \mathbf{Lj}$. Для этого предъявим конечный детерминированный автомат $V = (E_p, Q_V, E_p, \phi_V, \psi_V, q_V)$, что $L' = L_i(V)$, и для любого автомата W вида $W = (E_p, Q_W, E_p, \phi_W, \psi_W, q_W)$: $L' \neq L_j(W)$.

Через f_V обозначим выходную функцию автомата V , а через L мультимножество $L = \{f_V(E_p^*)\}$. Обозначим мультимножество слов длины n в L через $L|_n = \{\alpha \in L \mid |\alpha| = n\}$. Пусть теперь множество $L|_n = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ состоит из подряд идущих слов, начиная с $\alpha_1 = a_1 \dots a_l$, где $E_p = \{a_1, \dots, a_p\}$, очевидно, такое существует для некоторого s . Здесь $s = s(n)$ может принимать конечное число значений S . Выберем s максимальным среди всех возможных из S .

Вышеприведенные рассуждения удобно представлять на информационном дереве со степенями вершин $p+1$. Действительно, так как f_V детерминированная функция и $L|_n(V) = \{\alpha \in f_V(E_p^n) \mid \kappa_V(\alpha) \geq i\}$, то каждому листу дерева E_p^n приписано либо слово из $L|_n$, либо слово кратности меньшей i . Пусть η_t – число вершин дерева, которым не приписано ни одно слово из $L|_n$, но вершине сверху и вершине снизу приписаны α_t и α_{t+1} соответственно.

Оценим $s(n)$ для произвольного n . Из того, что $|L|_n| \leq p^n$, вытекает $s(n) \leq \left\lceil \frac{p^n}{i} \right\rceil$.

Покажем, что найдется натуральное $n = n(p, i)$, что верхняя оценка достигается:

$s(n) = \left\lceil \frac{p^n}{i} \right\rceil$ для любых p, i . Для этого заметим, что набор расстояний S , соответствующий мультимножеству $L|_n$, обладает свойством: любое натуральное j , которое встречается в этом наборе, встречается только на позиции, кратной p^{j-1} . Этот факт вытекает из следующего рассуждения. Если слова α_t, α_{t+1} из $L|_n$ таковы, что $\rho_d(\alpha_t, \alpha_{t+1}) = j$, то $t = rp^{j-1}$, по построению $L|_n$, где r – некоторое натуральное. Следовательно, данное j может встречаться в наборе S только на позиции с номером irp^{j-1} . Поэтому, если $L|_n = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$, где $s = s(n)$ – максимальное число различных наборов, то набор S , соответствующий $L|_n$, будет меньше или равен набору R_n , согласно утверждению 3.2. Следовательно, согласно утверждению 3.3, для $L|_n$ существует детерминированная словарная функция $f: E_p(n) \rightarrow E_p(n)$, что $f(E_p^n) = L|_n$. Итак,

$$s(n(p, i)) = \left\lceil \frac{p^{n(p, i)}}{i} \right\rceil, \text{ для любых } p, i.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любых $i < j$ найдется натуральное m : $\left\lceil \frac{p^m}{i} \right\rceil > \left\lceil \frac{p^m}{j} \right\rceil$. Действительно, из неравенства будет следовать существование языка $L = \{\alpha_1, \dots, \alpha_w\}$, где $w = \left\lceil \frac{p^m}{i} \right\rceil$, что $L \in Li$, но $L \notin Lj$. Пользуясь неравенством $\left\lceil \frac{p^m}{i} \right\rceil = \frac{p^m}{i} - \left\{ \frac{p^m}{i} \right\} > \frac{p^m}{i} - 1$, покажем более сильное утверждение: для любых i, j найдется m :

$$\frac{p^m}{i} - 1 > \frac{p^m}{j}, \text{ откуда будет следовать } \left\lceil \frac{p^m}{i} \right\rceil > \frac{p^m}{i} - 1 > \frac{p^m}{j} > \left\lceil \frac{p^m}{j} \right\rceil.$$

$$p^m(j-i) > ij, \text{ что, очевидно, выполнено для } m > \left\lceil \log_p \left(\frac{ij}{j-i} \right) \right\rceil + 1.$$

Первая часть доказана.

Случай 2: $Lj \not\subset Li$.

Пусть даны натуральные $i < j = i + k$ для некоторого k . Покажем, что найдется язык L' , что $L' \in Lj$, но $L' \notin Li$. Пусть язык L , составленный из некоторого числа s подряд идущих слов длины n является подмножеством языка $L' \in Lj$, $L = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$. Тогда существует автоматная функция $f: E_p^* \rightarrow E_p^*$, и соответствующая ей спектральная автоматная функция $\kappa_f: E_p^* \rightarrow N \cup \{0\}$, что $\kappa_f(\alpha_t) \geq j$, $t = 1, \dots, s$. Обозначим через F дерево, соответствующее ограниченно-детерминированной функции f . Ясно, что n -му уровню дерева приписано не менее js слов. Следовательно, $(n - 1)$ -му уровню дерева F приписано не менее $\left\lfloor \frac{j \cdot s + 1}{p} \right\rfloor$ слов. Вообще, из детерминированности вы-

текает, что на каждом следующем уровне будет не менее $\left\lfloor \frac{x + 1}{p} \right\rfloor$ слов, где x – число слов на текущем уровне дерева. Обобщая это правило, составим табл. 1.

Таблица 1. Минимальное число слов на уровнях дерева F , если $\kappa_f(\alpha_t) \geq j$

Уровень №	n	$(n-1)$	...	$(n-m_2)$	...	1
Минимальное число слов	js	$\left\lfloor \frac{j \cdot s + 1}{p} \right\rfloor$	...	l_f	...	1

Рассмотрим два неотрицательных целых числа m_1, m_2 , что $n = m_1 + m_2$.

Предположим теперь, что $L' \in Li$. Тогда найдется автоматная функция $g: E_p^* \rightarrow E_p^*$, и соответствующая ей спектральная автоматная функция $\kappa_g: E_p^* \rightarrow N \cup \{0\}$, что $\kappa_g(\alpha_t) \geq i$, $t = 1, \dots, s$. Обозначим через G дерево, соответствующее ограниченно-детерминированной функции g . Ясно, что n -му уровню дерева приписано не менее is слов. Аналогично построим таблицу и для дерева G .

Таблица 2. Минимальное число слов на уровнях дерева G , если $\kappa_g(\alpha_t) \geq i$

Уровень №	n	$(n-1)$	...	$(n-m_2)$	...	1
Минимальное число слов	is	$\left\lfloor \frac{i \cdot s + 1}{p} \right\rfloor$	...	l_g	...	1

Покажем теперь, что найдутся числа s, m_1, m_2 , что $l_g = i$, но $l_f = j - 1$. Это будет выполнено, если (системы возникают из рассмотрения табл. 1 и 2):

$$\begin{cases} js \leq p^{m_2} (j - 1) \\ js \geq p^{m_2} (j - 1) - p^{m_2} + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} is \leq p^{m_2} \cdot i \\ is \geq p^{m_2} \cdot i - p^{m_2} + 1 \end{cases}$$

Откуда, используя $j = i + k$, и комбинируя системы, получаем:

$$\begin{cases} s \leq \frac{p^{m_2} (i + k - 1)}{i + k} \\ s \geq p^{m_2} \frac{i + k - 1}{i + k} - \frac{p^{m_2} - 1}{i + k} \\ s \geq p^{m_2} - \frac{p^{m_2} - 1}{i} \end{cases}$$

Пусть $s = \left\lceil \frac{p^{m_2}(i+k-1)}{i+k} \right\rceil$. Тогда первое неравенство, очевидно, выполнено.

Второе также будет выполнено, если $m_2 \geq \log_p(i+k+1)$, так как

$$\left\lceil \frac{p^{m_2}(i+k-1)}{i+k} \right\rceil \geq \frac{p^{m_2}(i+k-1)}{i+k} - 1 \geq p^{m_2} \frac{i+k-1}{i+k} - \frac{p^{m_2}-1}{i+k},$$

если $p^{m_2}(i+k-1) - i - k \geq p^{m_2}(i+k-1) - p^{m_2} + 1$, что эквивалентно $p^{m_2} \geq i+k+1$.

Третье неравенство окажется выполненным при

$m_2 \geq \log_p(i+1) + \log_p(i+k) - \log_p(k)$, так как

$$s \geq p^{m_2} - \frac{p^{m_2}-1}{i} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p^{m_2}(i+k-1)}{i+k} - 1 \geq p^{m_2} - \frac{p^{m_2}-1}{i} \quad \Leftrightarrow$$

$$p^{m_2}(i+k-1)i - i^2 - ik \geq p^{m_2}(i+k)i - (p^{m_2}-1)(i+k) \quad \Leftrightarrow$$

$$p^{m_2}k \geq (i+k)i + (i+k), \text{ что выполнено при } p^{m_2} \geq \frac{(i+k)(i+1)}{k}.$$

Итак, при заданных s, m_2 , выполняется $l_g = i$ и $l_f = j-1$. Важно отметить, что установленное в предыдущей теореме условие $s \leq \left\lceil \frac{p^n}{j} \right\rceil$ выполняется, если положить

$p^{m_1} \geq i+k-1$. Резюмируя, при следующих условиях:

$$m_2 \geq \max(\log_p(i+1) + \log_p(i+k) - \log_p(k), \log_p(i+k+1)),$$

$m_1 \geq \log_p(i+k+1)$, $s = \left\lceil \frac{p^{m_2}(i+k-1)}{i+k} \right\rceil$, будет существовать слово $\alpha^0 \in E_p^{m_1}$, которое

сопоставлено ровно $i+k-1$ вершинам уровня m_1 дерева F , т. е. $\kappa(\alpha^0) = i+k-1$ ($\{\alpha^0\} \notin L'$). Ясно, что α^0 – суть общее начало слов $\alpha_1, \dots, \alpha_{s1}$, где $s_1 \leq s$. Сопоставим теперь вершинам уровня m_1 дерева F , которым не сопоставлены слова, любые, отличные от α^0 слова и доопределим по детерминированности язык L' . Заметим теперь, что $\kappa_g(\alpha^0) = i$, по построению. Значит, если $L' \in \mathbf{Li}$ и L подмножество L' , то $\{\alpha^0\} \in L'$, противоречие. Следовательно, $L' \notin \mathbf{Li}$. Теорема доказана.

Доказательство утверждения 2:

Для произвольного множества слов A через $[A]$ обозначим множество всех непустых начал слов, принадлежащих A . Из описания класса автоматно-перечислимых множеств в [1] следует, что для любых множеств слов $A, B \in \mathbf{L1}$, выполнено $[A] \subseteq A$, $[B] \subseteq B$. Откуда $[A \cup B] \subseteq [A] \cup [B] \subseteq A \cup B$. Более того, любое слово $\alpha \in A \cup B$ является началом некоторого другого слова $\alpha' \in A$ или $\alpha' \in B$, т. е. оно будет началом слова $\alpha' \in A \cup B$. Учитывая регулярность A, B , имеем $\mathbf{L1}$ замкнуто, относительно объединения. Так как произведение автоматных функций автоматно, имеем $A \in \mathbf{L1}$, следовательно, $A = f(E_2^*)$, $g(A) = g(f(E_2^*)) = h(E_2^*)$. Поэтому для произвольной автоматной функции g : $g(A) \in \mathbf{L1}$.

Принимая во внимание тот факт, что, вообще говоря, $[AB]$ не содержится в AB , получаем незамкнутость $\mathbf{L1}$ относительно конкатенации. Аналогично получаем замкнутость $\mathbf{L1}$ относительно операции итерации. Далее заметим, что любое мно-

жество $A \in \mathbf{L1}$ является бесконечным (так как автоматное отображение сохраняет длину слова). Пусть $A = \{a_1, a_1(a_1)^*\}$, $B = \{a_1, a_1(a_2)^*\}$, где $E_p = \{a_1, \dots, a_p\}$. Очевидно $A, B \in \mathbf{L1}$. Но $A \cap B = \{a_1\} \notin \mathbf{L1}$.

Для доказательства второго пункта рассмотрим $n: p^n > i \geq p^{n-1}$, где $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что найдутся два автомата A, B , что $L_i(A) \cup L_i(B) \neq L_i(C)$ для любого автомата C . Рассмотрим лексикографически упорядоченное множество слов $E_p^n = \{a_1^n, a_1^{n-1}a_2, \dots, a_p^n\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p^n}\}$, где $E_p = \{a_1, \dots, a_p\}$. Пусть s_1 – суть максимальное число подряд идущих слов из E_p^n , которое может принадлежать $L_i(A)$. Число s_1 можно определить, воспользовавшись алгоритмом из работы [2]. Ясно, что $s_1 < p^n$, так как у каждого слова из $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s_1}\}$ должен быть прообраз, и, следовательно $is_1 \leq p^n$. Аналогично, s_2 – максимальное число подряд идущих слов, начиная с конца E_p^n , которое может принадлежать $L_i(B)$, для некоторого автомата B . Пусть автоматы A и B таковы, что $L_i(A), L_i(B)$ содержат $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s_1}\}$ и $\{\alpha_{p^n-s_2+1}, \alpha_{p^n-s_2+2}, \dots, \alpha_{p^n}\}$ соответственно. Тогда $L_i(A) \cup L_i(B)$ содержит $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s_1}, \alpha_{p^n-s_2+1}, \alpha_{p^n-s_2+2}, \dots, \alpha_{p^n}\}$. Из неравенства $s_1 < p^n$ вытекает, что $\rho_d(\alpha_{s_1}, \alpha_{p^n}) \geq \rho_d(\alpha_{s_1}, \alpha_{s_1+1})$. Следовательно, если предположить, что найдется автомат C , что $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s_1}, \alpha_{p^n-s_2+1}, \alpha_{p^n-s_2+2}, \dots, \alpha_{p^n}\} \subseteq L_i(C)$, то должен найтись автомат C' , что $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s_1}, \alpha_{s_1+1}\} \subseteq L_i(C')$, согласно теореме о сжимающем отображении. Тем самым s_1 не является максимальным. Противоречие.

Покажем теперь, что найдутся два автомата A, B , что $L_i(A) \cap L_i(B) \neq L_i(C)$ для любого автомата C . Пусть теперь $L_i(A) = \{\alpha, \alpha\beta_1, \alpha\beta_2, \dots\}$, $L_i(B) = \{\alpha, \alpha\gamma_1, \alpha\gamma_2, \dots\}$, где для любого натурального j , слово β_j не содержит a_1 , а γ_j содержит хотя бы одну букву a_1 , где $a_1 \in E_p = \{a_1, \dots, a_p\}$. Легко видеть, что такие автоматы существуют. По построению $L_i(A) \cap L_i(B) = \{\alpha\}$. Однако, из теоремы 3 следует, что для любого автомата D : $L_i(D)$ является бесконечным множеством, либо пустым. Тем самым $\mathbf{L1}$ не замкнут относительно операции $\cap$.

Библиографические ссылки

1. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. – М.: Наука, 1985. – 320 с.
2. Пархоменко Д. В. Метод распознавания множества слов через синтез детерминированного автомата // Интеллектуал. системы. – 2011. – Т. 15, вып. 1–4.
3. Суханов Е. В., Шур А. М. Об одном классе формальных языков // Алгебра и логика. – 1998. – Т. 37, № 4. – С. 478–492.
4. Пархоменко Д. В. Особенности моделирования графиков вероятностными источниками // Интеллектуал. системы. – 2010. – Т. 14, вып. 1–4.

D. V. Parkhomenko, Post-graduate, Lomonosov Moscow State University

Spectral function of finite automata and related regular languages

The concept of spectral automaton function is introduced and its certain properties are considered. Ability of this function to generate language is studied. Properties of sets with multiplicities,

appearing at finite automata output, are investigated. All these sets are regular and “continuable” and they generate a system of regular languages, nested in each other.

Keywords: spectral function of finite automata, output multi-sets of finite automata, output languages of finite automata

Получено: 10.05.12

УДК 621.791.72

Д. Н. Трушников, кандидат технических наук, доцент;
В. Я. Бельский, доктор технических наук, профессор;
В. Е. Щавлев, аспирант;
А. Л. Пискунов, аспирант;
А. Н. Лялин, аспирант

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВТОРИЧНО-ЭМИССИОННОГО СИГНАЛА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ПРОПЛАВЛЕНИЕМ ПРИ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ СВАРКЕ *

Исследованы возможности использования параметров тока несамостоятельного разряда в плазме в зоне электронно-лучевой сварки как сигнала для контроля сквозного проплавления. В экспериментах производилась осцилляция электронного пучка и регистрировались составляющие вторично-эмиссионного сигнала с различными частотами. Показана возможность создания систем автоматического контроля при электронно-лучевой сварке со сквозным проплавлением и описана модель такой системы.

Ключевые слова: электронно-лучевая сварка, вторично-эмиссионный сигнал, контроль проплавления

Технология электронно-лучевой сварки (ЭЛС) является эффективным способом соединения металлов и сплавов. Высокая концентрация мощности в сварочном электронном пучке и возможность его глубокого проникновения в металл позволяют обеспечить минимальные деформации свариваемого изделия.

Несмотря на значительные достижения в исследовании процессов, протекающих при взаимодействии мощного электронного пучка с металлом при сварке, в теории и практике ЭЛС остается целый ряд нерешенных проблем. К их числу можно отнести задачу стабилизации формирования сварного шва при ЭЛС с полным проплавлением. Большинство работ в этом направлении связано с регистрацией сквозного тока, возникающего при этом режиме обработки [1–4]. Проведенные исследования показали принципиальную возможность использования для этой цели вторично-эмиссионных сигналов, регистрируемых датчиками, расположенными над зоной сварки [5–7]. Однако сообщения о появлении работоспособных систем, получающих информацию с помощью таких датчиков, отсутствуют, что говорит

© Трушников Д. Н., Бельский В. Я., Щавлев В. Е., Пискунов А. Л., Лялин А. Н., 2012

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ-Урал № 11-08-96016 и при финансовой поддержке Министерства образования Пермского края.