УДК 004.03:514.122.2

А. Г. Ложкин, кандидат технических наук, доцент
Ижевский государственный технический университет

НАИБОЛЕЕ СЛОЖНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ДВУХ ЭЛЛИПСОВ

Рассматривается первичная цепочка преобразований, приводящая к нахождению такого преобразования, в результате которого эллипсы бы находились в одном неортогональном базисе. Для двух эллипсов таким преобразованием является одновременный сдвиг окружности и повернутого относительно координатной оси эллипса.

Точность геометрического моделирования, влияющая на все характеристики разрабатываемого изделия, при использовании в САПР ограничивается современным состоянием геометрической теории. Геометрия последние десятилетия развивается исключительно в неэвклидовых пространствах. Для увеличения эксплуатационных характеристик предлагается новый метод расчета точек пересечения сложных геометрических примитивов, таких как эллипс, парабола, гипербола, эвольвенты, эпициклоиды и т. д. Все эти кривые принадлежат к одному классу жордановых кривых и могут быть описаны параметрической системой уравнений $\begin{cases} x = F_x(t) \\ y = F_y(t) \end{cases}$, где $x, y, t \in R$. Функции $F_x(t)$ и $F_y(t)$ кусочно-непрерывные.

1. Предварительные сведения

Основой геометрического моделирования в САПР на евклидовой плоскости в декартовой системе координат являются цепочки последовательных преобразований [1]. Первые два шага всегда одинаковы – это параллельный перенос в центр одной из фигур и поворот данной фигуры таким образом, чтобы она была симметрична относительно декартовой системы координат.

Следующим шагом является приведение данной фигуры к нетрансформированному виду. Фигура называется нетрансформированной, если функции $f_v(t)$, где $v \in \{x, y\}$, описывающие фигуру, имеют действительный множитель равный единице. Данное преобразование осуществляется матрицей $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Преобразование сложное и может не иметь решений в аппарате аналитической геометрии.

При исследовании сложных преобразований, описанных в статьях, опубликованных в журнале «Вестник ИжГТУ» (№ 2–4, 2008) были получены результаты:

1. Параметры сложного преобразования, определяемого матрицей $\begin{pmatrix} a & h \\ g & b \end{pmatrix}$, получаются по формулам [2]: $\operatorname{tg} 2\beta = \dfrac{2(ah + bg)}{((a^2 - h^2) - (b^2 - g^2))}$,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\left(bh + ag\right)}{\left(a^2 + h^2\right) - \left(b^2 + g^2\right)}, \tag{1}$$

$$\tilde{k}_{11}=k_1(a\cos\beta+h\sin\beta)/\cos\alpha,\ \ \tilde{k}_{12}=k_1(b\sin\beta+g\cos\beta)/\sin\alpha,$$

$$\tilde{k}_{12}=k_2(a\sin\beta-h\cos\beta)/\sin\alpha,\ \ \tilde{k}_{22}=k_2(b\cos\beta-g\sin\beta)/\cos\alpha,$$

где β – первый угол вектора СНОП базиса; α – угол поворота фигуры (угол второго вектора базиса); k_i – множители трансформированных функций параметрической системы; $\tilde{k}_{i1,2}$ – новые множители трансформированных функций.

2. Если параметры α, $\tilde{k}_{i1,2}$ существуют, то они равны. Если в результате выкладок получились неравные значения параметров, то в процессе постановки задачи или ее решения допущена ошибка.

3. Параметры произвольно преобразованной по матрице $\begin{pmatrix} a & h \\ g & b \end{pmatrix}$ фигуры Ф с параметрическим уравнением $\begin{cases} x=k_1 f_x \\ y=k_2 f_y \end{cases}$ не зависят от вида нетрансформированных функций.

4. Угол поворота произвольной фигуры и угол поворота системы двух линейных параметрических уравнений с тригонометрическими функциями в каноническом виде [3] при произвольном преобразовании с матрицей преобразования $\begin{pmatrix} a & h \\ g & b \end{pmatrix}$ равны.

Следующий шаг цепочки преобразований – это приведение случая пересечения двух эллипсов к случаю пересечения эллипса и окружности. Первый эллипс находится в центре осей координат и его легко преобразовать к окружности. Параметрическое уравнение эллипса из нетрансформированных функций будет $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$, для окружности – $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$. Следовательно, матрица преобразования $\begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 \\ 0 & b_1^{-1} \end{pmatrix}$. Второй эллипс должен быть преобразован с помощью матрицы $\begin{pmatrix} a & h \\ g & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 \\ 0 & b_1^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ по формулам из пункта 1. В результате (рис. 1) получим окружность $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ и эллипс $E_2 \equiv \langle x_2^1, y_2^1, a_2^1, b_2^1, \alpha_2^1 \rangle$, где x_i, y_i – точки центра эллипса; a_i, b_i – длины полуосей; α_i – угол наклона относительно оси X; $x_i, y_i, a_i, b_i, \alpha_i \in R$, $i=1,2$.

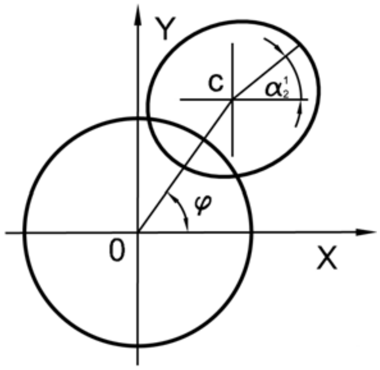

Рис. 1. Окружность и эллипс

2. Выбор вида преобразования

Рассмотрим неортогональный собственный базис (рис. 2). Исходя из принадлежности симметрии $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (переставная симметрия) к синтаксическому правилу построения плоскости, доказано, что для собственного ортогонального базиса $0e_1e_2$ должен существовать симметричный репер $0e_1'e_2'$ относительно прямой AB. Исходя из свойства $\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ переставной симметрии для тригонометрических функций для вектора $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, базис $0e_1'e_2'$ будет симметричен $0e_1e_2$. Базис $0e_1'e_2'$ является ортогональным, но совокупность векторов реперов даст четыре неортогональных базиса: $0e_1e_1'$, $0e_1e_2'$, $0e_2e_1'$, $0e_2e_2'$. Из них особенно интересны два первых, так как вектор e_1 определяет угол наклона фигуры.

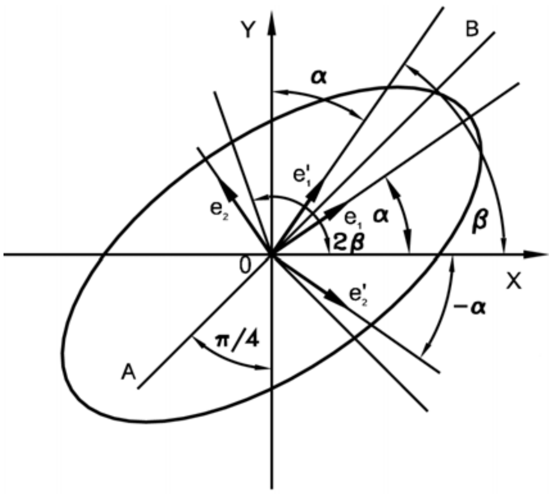

Рис. 2. СНОП базис

Проведено исследование на существование неортогонального базиса для именных преобразований. Результаты можно кратко сформулировать в нескольких предложениях. Для простых преобразований (гомотетия, поворот) СНОП базис не существует, но в близких преобразованиях принимает значения, сохраняющие основные свойства данных трансформаций. Для более сложных (сжатие) базис вырожден, но существует. Для самых сложных (сдвиг) – без базиса иногда невозможно получить параметры, но обязательно возникает проблема двойного увеличения возникающих значений параметров, которая, впрочем, позволяет проверять правильность найденных коэффициентов.

Для решения задачи необходимо найти такой случай, когда две фигуры будут принадлежать единому базису. Исходя из результатов, можно сделать вывод, что применение сжатия для случаев эллипс и окружность неприменимо, так как базисы всегда будут разные (0 и ненулевой). Для двух повернутых эллипсов может существовать одинаковый базис, но тогда более простой случай пересечения эллипса с окружностью надо искусственно преобразовывать к более сложному – эллипс – эллипс. Другие простые преобразования неприменимы из-за того, что они не изменяют форму фигуры. Общее преобразование неприменимо, так как не имеет физического смысла и не предполагает разложения по именным аффинным преобразованиям, в чем заключается метод разложения сложного преобразования на цепочку простых.

Преобразование сдвиг с матрицей преобразования $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{pmatrix}$ удовлетворяет обоим случаям пересечений.

3. Выбор случаев расположения фигур для пересечения для преобразования сдвиг

Определение

Назовем преобразование избыточным, если оно включает в себя как минимум два перехода к новому базису (преобразование поворота [4]).

Лемма 1

Преобразование сдвиг состоит из взаимосвязанных преобразований сжатие и поворот [5].

Лемма 2

К единому СНОП базису можно прейти только через одно именное преобразование «сдвиг», исходя из рассуждений параграфа 2.

Лемма 3

Евклидова плоскость над действительным кольцом в декартовой системе координат не имеет разрывов, связанных с комплексным кольцом. Доказательство исходя из аксиоматики евклидовой области.

Теорема

Общий СНОП базис существует для двух жордановых кривых только для избыточного преобразования одного из них для преобразования сдвиг.

Доказательство

Исходя из леммы 2, рассмотрим преобразование с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Доказательство для преобразования с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{pmatrix}$ доказывается аналогично.

1. Случай пресечения двух нетрансформированных фигур.

Каждое преобразование представляет матрицей $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Подставляем значения коэффициентов в формулу (1): $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\left(1\times h + 0\times 1\right)}{\left(1^2 + h^2\right) - \left(1^2 + 0^2\right)}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2h}{h^2} = \dfrac{2}{h}$. Получаем уравнение $2/h = 2/h$, которое выполняется для любого значения h. Следовательно, параметр преобразования получить невозможно.

2. Случай пересечения нетрансформированной фигуры и фигуры, произвольно сжатой вдоль осей координат.

Преобразование произвольно сжатой вдоль осей координат фигуры, с учетом сдвига, представляется произведением матриц $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & bh \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Для первой фигуры угол поворота жордановой кривой будет $\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \dfrac{2}{h}$. Для нахождения преобразования для второй подставляем в формулу (1): $\operatorname{tg} 2\alpha_2 = \dfrac{2\left(bbh + a0\right)}{\left(a^2 + b^2h^2\right) - \left(b^2 + 0^2\right)}$, $\operatorname{tg} 2\alpha_2 = \dfrac{2b^2h}{a^2 + b^2(h^2 - 1)}$. Приравниваем по углу α и получаем уравнение: $\dfrac{2}{h} = \dfrac{2b^2h}{a^2 + b^2(h^2-1)}$, $1 = \dfrac{b^2h^2}{a^2 + b^2(h^2-1)}$, $a^2 + b^2h^2 - b^2 = b^2h^2$, $a^2 - b^2 = 0$, что выполняется только для гомотетии и сводится к случаю 1.

3. Случай пересечения нетрансформированной фигуры и фигуры, произвольно сжатой вдоль осей координат и произвольно, повернутой относительно оси X на угол φ.

Преобразование трансформированной фигуры, с учетом сдвига, представляется произведением матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\cos\varphi & -b\sin\varphi \\ a\sin\varphi & b\cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a\cos\varphi - ha\sin\varphi & -b\sin\varphi + hb\cos\varphi \\ a\sin\varphi & b\cos\varphi \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} a(\cos\varphi - h\sin\varphi) & b(h\cos\varphi - \sin\varphi) \\ a\sin\varphi & b\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Подставляем в формулу (1):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\left(b^2\cos\varphi(h\cos\varphi - \sin\varphi) + a^2(\cos\varphi - h\sin\varphi)\sin\varphi\right)}{\left(a^2(\cos\varphi - h\sin\varphi)^2 + b^2(h\cos\varphi - \sin\varphi)^2\right) - \left(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi\right)} \quad \text{или}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2V_1}{V_2 - V_3}.$$

Рассмотрим выражение V_1:

$$V_1 = b^2\cos\varphi(h\cos\varphi - \sin\varphi) + a^2(\cos\varphi - h\sin\varphi)\sin\varphi,$$

$$V_1 = b^2h\cos^2\varphi - b^2\cos\varphi\sin\varphi + a^2\cos\varphi\sin\varphi - a^2h\sin\varphi\sin\varphi,$$

$$V_1 = h(b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi) + (a^2 - b^2)\cos\varphi\sin\varphi.$$

Рассмотрим выражение V_2:

$$V_2 = a^2(\cos\varphi - h\sin\varphi)^2 + b^2(h\cos\varphi - \sin\varphi)^2,$$

$$V_2 = a^2(\cos^2\varphi - 2h\sin\varphi\cos\varphi + h^2\sin^2\varphi) + b^2(h^2\cos^2\varphi - 2h\cos\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi),$$

$$V_2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + h^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) - 2h\sin\varphi\cos\varphi(a^2 + b^2).$$

Вычтем из V_2 V_3 и получим V_4:

$$V_4 = V_2 - V_3,$$

$$V_4 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + h^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) - h\sin 2\varphi(a^2 + b^2) - b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi,$$

$$V_4 = a^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi + h^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) - h\sin 2\varphi(a^2 + b^2),$$

$$V_4 = a^2\cos 2\varphi - b^2\cos 2\varphi + h^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) - h\sin 2\varphi(a^2 + b^2),$$

$$V_4 = (a^2 - b^2)\cos 2\varphi + h^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) - h\sin 2\varphi(a^2 + b^2).$$

Отсюда $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2h(b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi) + (a^2 - b^2)\sin 2\varphi}{(a^2 - b^2)\cos 2\varphi + h^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) - h\sin 2\varphi(a^2 + b^2)}$. Введем обозначения $v_1 = (a^2 - b^2)$, $v_2 = b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi$, $v_3 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi$, $v_4 = a^2 + b^2$. Тогда угол можно выразить $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2hv_2 + v_1\sin 2\varphi}{v_1\cos 2\varphi + h^2v_3 - h\sin 2\varphi v_4}$.

Приравниваем $\alpha_1 = \alpha_2$:

$$\frac{2}{h} = \frac{2hv_2 + v_1\sin 2\varphi}{v_1\cos 2\varphi + h^2v_3 - h\sin 2\varphi v_4},$$

$$\frac{1}{h} = \frac{hv_2 + v_1\sin 2\varphi/2}{v_1\cos 2\varphi + h^2v_3 - h\sin 2\varphi v_4},$$

$$h^2v_2 + hv_1\sin 2\varphi/2 = v_1\cos 2\varphi + h^2v_3 - h\sin 2\varphi v_4,$$

$$h^2(v_3 - v_2) - 2h\sin 2\varphi(v_1 + 2v_4) + v_1\cos 2\varphi = 0.$$

Вычисляем выражение $v_5 = v_3 - v_2$:

$$v_5 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi - (b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi), \quad v_5 = 2a^2\sin^2\varphi.$$

Вычисляем выражение $v_6 = v_1 + 2v_4$:

$$v_6 = a^2 - b^2 + 2(a^2 + b^2) = 3a^2 + b^2.$$

Таким образом, общий вид уравнения будет:

$$h^2 2a^2 \sin^2 \varphi - 2h \sin 2\varphi (3a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)\cos 2\varphi = 0,$$

$$h^2 - \frac{2h \sin 2\varphi (3a^2 + b^2)}{2a^2 \sin^2 \varphi} + \frac{(a^2 - b^2)\cos 2\varphi}{2a^2 \sin^2 \varphi} = 0,$$

$$h^2 - 2h \operatorname{ctg} 2\varphi (3 + b^2 / a^2) + (1 - b^2 / a^2)(\operatorname{ctg}^2 2\varphi - 1)/2 = 0,$$

$$(h - \operatorname{ctg} 2\varphi (3 + b^2 / a^2))^2 = \operatorname{ctg}^2 2\varphi (3 + b^2 / a^2)^2 - (1 - b^2 / a^2)(\operatorname{ctg}^2 2\varphi - 1)/2.$$

Уравнение имеет два корня, исследованием которых в данной статье заниматься не будем. Но так как по лемме 2 сдвиг может быть выражен комбинацией поворота и сжатия, а один поворот участвовал в вычислениях, получаем два не связанных один с другим поворота (базиса). Преобразование оказалось избыточным, что и требовалось доказать.

Следствие

Для нахождения единого базиса двух фигур необходимо рассмотреть случай, когда первая фигура представлена нетрансформированными функциями, а вторая – трансформированными и повернутыми функциями.

Для случая эллипсов это будет окружность и повернутый относительно оси X эллипс.

Список литературы

1. Математика и САПР : в 2-х кн. Кн. 1. Основные методы. Теория полюсов / П. Шенен, М. Коснар, И. Гардан и др. – М. : Мир, 1988. – 204 с.

2. *Ложкин, А. Г.* Прямой аналитический метод линейных преобразований фигур на плоскости / А. Г. Ложкин // Вестн. СамГУ. Естеств. науки. Математика. – 2008. – № 3. – С. 64–69.

3. Канонические формулы при исследовании системы двух линейных параметрических уравнений с тригонометрическими функциями / А. Г. Ложкин, М. С. Масленникова, Е. А. Горбашева и др. // Вестн. ИжГТУ. – 2007. – № 3. – С. 123–128.

4. *Александров, П. С.* Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры / П. С. Александров. – М. : Наука, 1968. – 912 с.

5. *Ложкин, А. Г.* Собственный неортогональный постоянный базис квадратичной формы / А. Г. Ложкин, И. Б. Гетманюк // Вестн. ИжГТУ. – 2008. – № 3.