Из рис. 2 видно, что предложенный метод адаптивной совместной фильтрации дискретного и непрерывных параметров сигнала позволяет получить за счет статистической избыточности дискретного параметра сигнала достаточно точные оценки непрерывных параметров сигнала. Проигрыш адаптивной фильтрации составляет в исследовавшемся случае не более 0,5 дБ.

Список литературы

1. *Петров, Е. П.* Алгоритм совместной фильтрации дискретного параметра, амплитуды и задержки последовательности импульсных коррелированных сигналов / Е. П. Петров, Д. Е. Прозоров, П. Н. Кишмерешкин // сб. тр. XI МНТК «Радиолокация, навигация, связь». – Воронеж, 2005. – В 3 т. Т. 1. – С. 178–184.

2. *Прозоров, Д. Е.* Совместная фильтрация дискретного параметра, амплитуды и задержки многоуровневых импульсных коррелированных сигналов / Д. Е. Прозоров, П. Н. Кишмерешкин // сб. тр. РНТОРЭС им. А. С. Попова. Сер. «Цифровая обработка сигналов и ее применение». – М., 2006. – Т. 1. – С. 94–97.

3. *Макс, Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. В 2 т. / пер. с франц. – М. : Мир, 1983. – Т. 1. – 312 с.

УДК 519.95+535.8

Е. Н. Дудник, кандидат физико-математических наук, доцент
Удмуртский государственный университет;
С. В. Клишин, кандидат физико-математических наук, доцент
Ижевский государственный технический университет

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕДУКЦИИ ОПЕРАТОРАМИ С ЛЕНТОЧНЫМИ ТЕПЛИЦЕВЫМИ МАТРИЦАМИ К ОБРАБОТКЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрены математические методы цифровой обработки размытых изображений, повышающей их резкость, для случая ограниченного носителя аппаратной функции.

Данная работа является развитием и логическим продолжением работы [1] применительно к случаю, когда выходной сигнал представляет собой изображение на выходе оптической системы. Ухудшение резкости (размытие) изображений обусловлено целым рядом причин. Принципиальным пределом разрешающей способности оптического микроскопа служит длина световой волны. Очертания деталей, размер которых сравним с длиной световой волны (например, очертания коллоидных частиц), в оптическом микроскопе будут выглядеть размытыми. В ряде случаев дифракционные явления, обусловленные конечными размерами зрачка оптической системы, приводят к заметному ухудшению резкости изображений [2; 3]. Кроме того, практически все оптические системы, даже самые высококачественные, формирующие изображения, в той или иной степени подвержены разного рода аберрациям.

Если при формировании изображения свет проходит через облако рассеивателей [4; 5], то это также способствует размытию изображения.

Бесспорно, проблема повышения резкости изображений имеет важное значение. Технологические способы ее решения либо неосуществимы, либо сопряжены с дополнительными трудностями. При аэрофотосъемке, например, для повышения резкости надо устранить рассеяние света в атмосфере, но это невозможно. В микроскопии для решения той же проблемы можно вместо оптического микроскопа использовать электронный, но это сопряжено с дополнительными трудностями (специальная подготовка образца, создание вакуума вокруг этого образца и т. д.).

Таким образом, зачастую вместо технологических методов повышения резкости изображений бывает удобнее использовать математические методы. В этой статье обсуждается возможность использования (применительно к задаче повышения резкости изображений) метода редукции такими операторами, структура которых схожа со структурой операторов с ленточными теплицевыми матрицами.

Характерная схема преобразования изображения изопланарной оптической системой $\mathring{A}$ имеет вид

$$\mathring{A} f = \left(\mathring{A} f\right)(x, y) = \int_{X_1}^{X_{N'}} \int_{Y_1}^{Y_{N''}} a\left(x - x', y - y'\right) f\left(x', y'\right) dx'dy' , \qquad (1)$$

где $f = f\left(x', y'\right)$ и $\left(\mathring{A} f\right) = \left(\mathring{A} f\right)(x, y)$ – изображения на входе и выходе оптической системы соответственно; $a(x, y)$ – аппаратная функция (импульсный отклик) системы; $\prod = \left[x_1, x_{N'}\right] \times \left[y_1, y_{N''}\right]$ – прямоугольник, на котором располагаются изображения.

Схему получения цифрового изображения ξ_{ij} с учетом (1) и шумовой добавки v_{ij} можно представить в виде

$$\xi_{ij} = \left(\mathring{A} f\right)_{ij} + v_{ij} = \int_{X_1}^{X_{N'}} \int_{Y_1}^{Y_{N''}} a(x_i - x', y_j - y') f(x', y') dx'dy' + v_{ij} , \qquad (2)$$

где $\left(\mathring{A} f\right)_{ij} = \left(\mathring{A} f\right)\left(x_i, y_j\right)$, $i = 1, \ldots, N'$, $j = 1, \ldots, N''$. Если ввести обозначения

$$Af = \begin{bmatrix} \left(\mathring{A} f\right)_{11} & . \; . \; . & \left(\mathring{A} f\right)_{1N''} \\ . & . \; . \; . & . \\ \left(\mathring{A} f\right)_{N'1} & . \; . \; . & \left(\mathring{A} f\right)_{N'N''} \end{bmatrix}; \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_{11} & . \; . \; . & \xi_{1N''} \\ . & . \; . \; . & . \\ \xi_{N'1} & . \; . \; . & \xi_{N'N''} \end{bmatrix};$$

$$v = \begin{bmatrix} v_{11} & . \; . \; . & v_{1N''} \\ . & . \; . \; . & . \\ v_{N'1} & . \; . \; . & v_{N'N''} \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

то схема (2) может быть записана кратко:

$$\xi = Af + \nu , \qquad (4)$$

где $f \in \Re$; $\xi, \nu \in \tilde{\Re}$; $A = \left(\Re \to \tilde{\Re} \right)$; $\overset{\circ}{A} \in \left(\Re \to \Re \right)$; $\Re$ – бесконечномерное гильбертово пространство функций двух переменных, заданных на прямоугольнике $\Pi = \left[x_1, x_{N'} \right] \times \left[y_1, y_{N''} \right]$; $\tilde{\Re}$ – конечномерное евклидово пространство, элементами которого являются двумерные матрицы вида (3), $\dim \Re = N', N''$.

Допустим, исследователя не устраивает резкость цифрового изображения ξ, полученного прибором $A \in \left(\Re \to \tilde{\Re} \right)$, обладающим недостаточно высокой разрешающей способностью. Тогда возникает необходимость вычисления оценки $U \hat{f}$ цифрового изображения Uf на выходе высококачественного прибора $U \in \left(\Re \to \tilde{\Re} \right)$. Здесь оператор U определяется соотношением

$$Uf = \begin{bmatrix} \left(\overset{\circ}{U} f \right)_{11} & . \; . \; . & \left(\overset{\circ}{U} f \right)_{1N''} \\ . & . \; . \; . & . \\ \left(\overset{\circ}{U} f \right)_{N'1} & . \; . \; . & \left(\overset{\circ}{U} f \right)_{N'N''} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где

$$\left(\overset{\circ}{U} f \right)_{ij} = \left(\overset{\circ}{U} f \right) \left(x_i, y_j \right) =$$

$$= \int_{X_1}^{X_{N'}} \int_{Y_1}^{Y_{N''}} u\left(x_i - x', y_j - y' \right) f\left(x', y' \right) dx' dy' + \nu_{ij} \; ; \tag{6}$$

$i = 1, \ldots, N'$; $j = 1, \ldots, N''$; $\overset{\circ}{U} \in \left(\Re \to \Re \right)$.

Будем считать, что аппаратная функция $u\left(x, y \right)$ имеет носитель конечного размера. Обозначим

$$\Pi_u = \left[x_{u1}, x_{u2} \right] \times \left[y_{u1}, y_{u2} \right]$$

прямоугольник с минимально возможными размерами, целиком содержащий в себе носитель supp u. Что касается аппаратной функции $a(x, y)$ реальной оптической системы $\overset{\circ}{A}$, то эта функция, строго говоря, имеет носитель бесконечного размера [2–4]. Однако во многих случаях значения функции $a(x, y)$ достаточно велики по абсолютному значению лишь в конечной области плоскости $0xy$. Поэтому, не внося слишком большую погрешность, истинную аппаратную функцию с бесконечным носителем можно заменить усеченной аппаратной функцией с носителем конечного размера. В дальнейшем для этой функции будет использоваться то же самое обозначение $a(x, y)$. Обозначим

$$\Pi_a = [x_{a1}, x_{a2}] \times [y_{a1}, y_{a2}]$$

прямоугольник с минимально возможными размерами, целиком содержащий в себе носитель supp a.

В случае если прямоугольники Π_a и Π_u и их объединение $\Pi_a \cup \Pi_u$ малы по сравнению с прямоугольником Π, выполняются неравенства

$$\begin{aligned} &x_1 - x_{N'} < x_{a1} < x_{a2} < x_{N'} - x_1; \; y_1 - y_{N''} < y_{a1} < y_{a2} < y_{N''} - y_1; \\ &x_1 - x_{N'} < x_{u1} < x_{u2} < x_{N'} - x_1; \; y_1 - y_{N''} < y_{u1} < y_{u2} < y_{N''} - y_1, \end{aligned} \tag{7}$$

а также корреляционный оператор Σ шума v определяется матрицей

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} k_{i-\hat{e}}^{j-l} & \text{при } k_1' \le i - \hat{e} \le k_2' \text{ и } k_1'' \le j - l \le k_2'', \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{8}$$

можно ожидать достаточно высокую точность редукции оператором $V \in V_T \subset \left(\tilde{\Re} \to \tilde{\Re} \right)$, где V_T – множество операторов с четырехмерными матрицами вида

$$v_{ijkl} = \begin{cases} b_{i-\hat{e}}^{j-l} & \text{при } K_1' \le i - \hat{e} \le K_2' \text{ и } K_1'' \le j - l \le K_2'', \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{9}$$

Здесь k'_1, k'_2, k''_1, k''_2, K'_1, K'_2, K''_1, K''_2 – фиксированные целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$1 - N' \le k_1' \le k_2' \le N' - 1; \; 1 - N'' \le k_1'' \le k_2'' \le N'' - 1;$$

$$1 - N' \le K_1' \le K_2' \le N' - 1; \; 1 - N'' \le K_1'' \le K_2'' \le N'' - 1 .$$

Кроме этих неравенств целые числа K'_1, K'_2, K''_1, K''_2 должны удовлетворять неравенствам

$$K_1' \le \min\{L_1', M_1', k_1'\}; \; K_2' \ge \max\{L_2', M_2', k_2'\};$$

$$K_1'' \le \min\{L_1'', M_1'', k_1''\}; \; K_2'' \ge \max\{L_2'', M_2'', k_2''\},$$

где

$$\begin{aligned} &L_1' = [x_{u1}/\Delta'], \; M_1' = [x_{a1}/\Delta']; \\ &L_2' = [x_{u2}/\Delta'], \; M_2' = [x_{a2}/\Delta']; \\ &L_1'' = [x_{u1}/\Delta''], \; M_1'' = [x_{a1}/\Delta'']; \\ &L_2'' = [x_{u2}/\Delta''], \; M_2'' = [x_{a2}/\Delta'']; \end{aligned} \tag{10}$$

$\Delta' = x_{i+1} - x_i$ и $\Delta'' = y_{j+1} - y_j$ – шаги разбиения в схеме (2); $[\cdot]$ – символ целой части вещественного числа. Множество V_T – это подпространство операторного пространства $\left(\tilde{\Re} \to \tilde{\Re} \right)$: $\dim V_T = (K_2' - K_1' + 1)(K_2'' - K_1'' + 1)$; $\dim \tilde{\Re} = N'N''$;

$\dim\left(\tilde{\Re}\to\tilde{\Re}\right)=\left(N'N''\right)^2$. Необходимо заметить, что пространство $\tilde{\Re}$, элементами которого являются двумерные матрицы, здесь рассматривается как евклидово пространство, в котором используются следующие определения:

1) скалярное произведение элементов $p, z\in\tilde{\Re}$

$$\left(p,z\right)=\sum_{i=1}^{N'}\sum_{j=1}^{N''}p_{ij}z_{ij}\ ;$$

2) норма элемента $z\in\tilde{\Re}$

$$\left\|z\right\|=\left(z,z\right)^{1/2};$$

3) произведение операторов $V, W\in\left(\tilde{\Re}\to\tilde{\Re}\right)$

$$\left(VW\right)_{ij\kappa l}=\sum_{m=1}^{N'}\sum_{n=1}^{N''}v_{ijmn}w_{mn\kappa l}\ ;$$

4) оператор $W^*\in\left(\tilde{\Re}\to\tilde{\Re}\right)$, сопряженный оператору $W\in\left(\tilde{\Re}\to\tilde{\Re}\right)$, имеет следующие матричные элементы

$$w^*_{ij\kappa l}=w_{\kappa lij}\,;$$

5) след оператора $W\in\left(\tilde{\Re}\to\tilde{\Re}\right)$

$$\mathrm{tr}W=\sum_{i=1}^{N'}\sum_{j=1}^{N''}w_{ijij}\ ;$$

6) норма Гильберта–Шмидта оператора W

$$\left\|W\right\|_2=\left(\mathrm{tr}WW^*\right)^{1/2};$$

7) единичный (тождественный) оператор $I\in\left(\tilde{\Re}\to\tilde{\Re}\right)$ имеет следующие матричные элементы:

$$i_{ij\kappa l}=\delta_{i\kappa}\delta_{jl}\,,$$

где $\delta_{i\kappa}$ и δ_{jl} – символы Кронекера.

Для дальнейшего удобно преобразовать матрицу b_α^β, фигурирующую в формуле (2), в вектор b_λ путем перехода от пары индексов α, β к одному индексу:

$$\lambda=t\alpha+\beta\,, \qquad (11)$$

где $t = K_2'' - K_1'' + 1$; $\alpha = K'_1, \ldots, K'_2$; $\beta = K''_1, \ldots, K''_2$; $\lambda = K_1, \ldots, K_2$; $K_1 = tK_1' - K_1''$, $K_2 = tK_2' - K_2''$.

Можно доказать, что обратный переход от одного индекса λ к паре индексов α, β, обеспечивающий однозначное соответствие, осуществляется с помощью формул

$$\beta = \beta(\lambda) = \begin{cases} \lambda - [\lambda/t]t & \text{при } K_1'' \le \lambda - [\lambda/t]t \le K_2''; \\ \lambda - ([\lambda/t]-1)t & \text{при } \lambda - [\lambda/t]t < K_1''; \\ \lambda - ([\lambda/t]+1)t & \text{при } \lambda - [\lambda/t]t > K_2''; \end{cases} \tag{12}$$

$$\alpha = \alpha(\lambda) = (\lambda - \beta(\lambda))/t, \tag{13}$$

где квадратные скобки – символ выделения целой части вещественного числа. В соответствии с (9) и (11) матрицу оператора $V \in V_T$ можно представить в виде

$$v_{ij\kappa l} = \begin{cases} b_{t(i-\kappa)+(j-l)} & \text{при } K_1' \le i-\kappa \le K_2' \text{ и } K_1'' \le j-l \le K_2'', \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{14}$$

Для модели $[A, \Sigma]$ задача редукции размытого изображения ξ к резкому Uf ставится следующим образом:

$$\inf\left\{ \|V'A - U\|_2^2 \,\middle|\, V' \in V_T \right\} = \|VA - U\|_2^2 = g\ . \tag{15}$$

<u>Теорема 1.</u> Пусть значения K'_1, K'_2, K''_1, K''_2, определяющие пространство V_T, удовлетворяют неравенствам

$$1 - N' \le K_1' \le K_2' \le N' - 1;\ 1 - N'' \le K_1'' \le K_2'' \le N'' - 1,$$

и невырождена матрица S, состоящая из элементов

$$s_{\lambda\mu} = \begin{cases} \sum_{i=n_1'}^{n_2'} \sum_{j=n_1''}^{n_2''} \left(a_{i-\alpha(\lambda)}^{j-\beta(\lambda)}, a_{i-\gamma(\mu)}^{j-\delta(\mu)} \right) & \text{при } |\alpha-\gamma| \le M_2' - M_1' \text{ и } |\beta-\delta| \le M_2'' - M_1'', \\ 0 & \text{при } |\alpha-\gamma| > M_2' - M_1' \text{ или } |\beta-\delta| > M_2'' - M_1'', \end{cases}$$

где

$$\left(a_{i-\alpha}^{j-\beta}, a_{i-\gamma}^{j-\delta} \right) = \begin{cases} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} a(x_{i-\alpha} - x', y_{j-\beta} - y')\, a(x_{i-\gamma} - x', y_{j-\delta} - y')\, dx'dy' \\ \qquad \text{при } \tau_2 > \tau_1 \text{ и } \theta_2 > \theta_1, \\ 0 \qquad \text{при } \tau_2 \le \tau_1 \text{ или } \theta_2 \le \theta_1; \end{cases}$$

$$n_1' = \max\{1, 1+\alpha, 1+\gamma\},\quad n_2' = \min\{N', N'+\alpha, N'+\gamma\};$$

$$n_1'' = \max\left\{1, 1+\beta, 1+\delta\right\},\ \ n_2'' = \min\left\{N'', N''+\beta, N''+\delta\right\};$$

$$\tau_1 = \max\left\{x_1, x_{i-\alpha} - x_{a2}, x_{i-\gamma} - x_{a2}\right\},\ \ \tau_2 = \min\left\{x_{N'}, x_{i-\alpha} - x_{a1}, x_{i-\gamma} - x_{a1}\right\};$$

$$\theta_1 = \max\left\{y_1, y_{j-\beta} - y_{a2}, y_{j-\delta} - y_{a2}\right\},\ \ \theta_2 = \min\left\{y_{N''}, y_{j-\beta} - y_{a1}, y_{j-\delta} - y_{a1}\right\};$$

здесь $\beta(\lambda)$ и $\alpha(\lambda)$ вычисляются по формулам (12), (13); похожие формулы используются при вычислении $\delta(\mu)$ и $\gamma(\mu)$ соответственно:

$$\lambda, \mu = K_1, \ldots, K_2;\ \ \alpha, \gamma = K'_1, \ldots, K'_2;\ \ \beta, \delta = K''_1, \ldots, K''_2.$$

Тогда решение вариационной задачи (15) существует и единственно. Четырехмерная матрица оператора V выражается через вектор $b = S^{-1}q$ по формуле (14). Компоненты вектора q имеют вид

$$q_\lambda = \begin{cases} \sum\limits_{i=n'_3}^{n'_4} \sum\limits_{j=n''_3}^{n''_4} \left(u_i^j, a_{i-\alpha(\lambda)}^{j-\beta(\lambda)}\right) & \text{при } L'_1 - M'_2 \le \alpha \le L'_2 - M'_1 \\ & \text{и } L''_1 - M''_2 \le \beta \le L''_2 - M''_1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$\left(u_i^j, a_{i-\alpha}^{j-\beta}\right) = \begin{cases} \int\limits_{\tau_3}^{\tau_4} \int\limits_{\theta_3}^{\theta_4} a\left(x_{i-\alpha} - x', y_{j-\beta} - y'\right) u\left(x_i - x', y_j - y'\right) dx'dy' & \\ & \text{при } \tau_4 > \tau_3 \text{ и } \theta_4 > \theta_3, \\ 0 & \text{при } \tau_4 \le \tau_3 \text{ или } \theta_4 \le \theta_3; \end{cases}$$

$$n'_3 = \max\left\{1, 1+\alpha\right\},\ \ n'_4 = \min\left\{N', N'+\alpha\right\};$$

$$n''_3 = \max\left\{1, 1+\beta\right\},\ \ n''_4 = \min\left\{N'', N''+\beta\right\};$$

$$\tau_3 = \max\left\{x_1, x_{i-\alpha} - x_{a2}, x_i - x_{u2}\right\},\ \ \tau_4 = \min\left\{x_{N'}, x_{i-\alpha} - x_{a1}, x_i - x_{u1}\right\};$$

$$\theta_3 = \max\left\{y_1, y_{j-\beta} - y_{a2}, y_j - y_{u2}\right\},\ \ \theta_4 = \min\left\{y_{N''}, y_{j-\beta} - y_{a1}, y_j - y_{u1}\right\}.$$

В случае модели $[A, F, f_0, \Sigma]$ схему формирования изображения (4) удобнее переписать в виде

$$\kappa = A\varphi + \nu, \tag{16}$$

где $\varphi = f - f_0$; $\kappa = \xi - Af_0$. Постановка задачи редукции к оптической системе $U \in \left(\Re \to \tilde{\Re}\right)$ оператором $V \in V_T \subset \left(\tilde{\Re} \to \tilde{\Re}\right)$ имеет вид

$$\inf\left\{\mathrm{E}\left\|V'\kappa - U\varphi\right\|^2 \middle| V' \in V_T\right\} = \mathrm{E}\left\|V\kappa - U\varphi\right\|^2 = h. \qquad (17)$$

Теорема 2. Пусть целые числа K'_1, K'_2, K''_1, K''_2, определяющие пространство $V_T \subset \left(\tilde{\Re} \to \tilde{\Re}\right)$, удовлетворяют неравенствам $1 - N' \le K'_1 \le K'_2 \le N' - 1$; $1 - N'' \le K''_1 \le K''_2 \le N'' - 1$, и не выраждена матрица S, состоящая из элементов

$$s_{\lambda\mu} = \sum_{i=n'_1}^{n'_2} \sum_{j=n''_1}^{n''_2} \left(\left(a_{i-\alpha(\lambda)}^{j-\beta(\lambda)}, (Fa)_{i-\gamma(\mu)}^{j-\delta(\mu)}\right) + \sigma_{i-\alpha(\lambda), j-\beta(\lambda), i-\gamma(\mu), j-\delta(\mu)}\right),$$

где

$$\left(a_{i-\alpha}^{j-\beta}, (Fa)_{i-\gamma}^{j-\delta}\right) = \begin{cases} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} a\left(x_{i-\alpha} - x', y_{j-\beta} - y'\right)(Fa)\left(x_{i-\gamma} - x', y_{j-\delta} - y'\right)dx'dy' \\ \qquad\qquad \text{при } \tau_2 > \tau_1 \text{ и } \theta_2 > \theta_1, \\ 0 \qquad\qquad \text{при } \tau_2 \le \tau_1 \text{ или } \theta_2 \le \theta_1; \end{cases}$$

$$n'_1 = \max\{1, 1+\alpha, 1+\gamma\};\ n'_2 = \min\{N', N'+\alpha, N'+\gamma\};$$

$$n''_1 = \max\{1, 1+\beta, 1+\delta\};\ n''_2 = \min\{N'', N''+\beta, N''+\delta\};$$

$$\tau_1 = \max\{x_1, x_{i-\alpha} - x_{a2}\};\ \tau_2 = \min\{x_{N'}, x_{i-\alpha} - x_{a1}\};$$

$$\theta_1 = \max\{y_1, y_{j-\beta} - y_{a2}\};\ \theta_2 = \min\{y_{N''}, y_{j-\beta} - y_{a1}\};$$

σ_{ijkl} – матричные элементы корреляционного оператора шума Σ; $\beta(\lambda)$ и $\alpha(\lambda)$ вычисляются по формулам (12) и (13), $\delta(\mu)$ и $\gamma(\mu)$ – по аналогичным формулам:

$$\lambda, \mu = K_1, \ldots, K_2;\ \alpha, \gamma = K'_1, \ldots, K'_2;\ \beta, \delta = K''_1, \ldots, K''_2.$$

Тогда решение задачи (17) существует и единственно. Четырехмерная матрица оператора V выражается через вектор $b = S^{-1}q$ по формуле (14). Компоненты вектора q имеют вид

$$q_\lambda = \sum_{i=n'_3}^{n'_4} \sum_{j=n''_3}^{n''_4} \left(u_i^j, (Fa)_{i-\alpha(\lambda)}^{j-\beta(\lambda)}\right),$$

где

$$\left(u_i^j, (Fa)_{i-\alpha}^{j-\beta}\right) = \begin{cases} \int\limits_{\tau_3}^{\tau_4}\int\limits_{\theta_3}^{\theta_4} u\left(x_i - x', y_j - y'\right)(Fa)\left(x_{i-\alpha} - x', y_{j-\beta} - y'\right)dx'dy' \\ \qquad\qquad\qquad \text{при } \tau_4 > \tau_3 \text{ и } \theta_4 > \theta_3, \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{при } \tau_4 \le \tau_3 \text{ или } \theta_4 \le \theta_3; \end{cases}$$

$$n_3' = \max\{1, 1+\alpha\};\ n'_4 = \min\{N', N'+\alpha\};$$

$$n_3'' = \max\{1, 1+\beta\};\ n_4'' = \min\{N'', N''+\beta\};$$

$$\tau_3 = \max\{x_1, x_i - x_{u2}\};\ \tau_4 = \min\{x_{N'}, x_i - x_{u1}\};$$

$$\theta_3 = \max\{y_1, y_j - y_{u2}\};\ \theta_4 = \min\{y_{N''}, y_j - y_{u1}\}.$$

Доказательство теорем 1 и 2 проводится путем рассуждений аналогичных тем, которые использовались при доказательстве теорем в работе [1].

Компьютерные программы, созданные на основе изложенного метода повышения резкости изображений, обеспечивают высокое быстродействие и не требуют большого объема памяти. Это обусловлено тем, что во многих практически важных случаях размерность $\dim V_T = \left(K_2' - K_1' + 1\right)\left(K_2'' - K_1'' + 1\right)$ может быть довольно малой, несмотря на большую размерность $\dim\left(\tilde{\mathfrak{R}} \to \tilde{\mathfrak{R}}\right) = \left(N'N''\right)^2$. Такой метод может быть успешно реализован не только на специальных сверхбыстрых ЭВМ, но и на персональных компьютерах.

Список литературы

1. *Дудник*, *Е. Н.* Приближенный метод редукции измерений операторами с ленточными теплицевыми матрицами / Е. Н. Дудник, С. В. Клишин // Информационные технологии в инновационных проектах : тр. III Междунар. науч.-тех. конф. (Ижевск, 23-24 мая 2001 г.). Ч. 2. – Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2001. – С. 32–35.

2. *Гудмен, Дж.* Введение в Фурье-оптику. – М. : Мир, 1970. – 364 с.

3. *Парыгин*, *В. Н.* Оптическая обработка информации / В. Н. Парыгин, В. И. Балакшин. – М. : Изд-во МГУ, 1987. – 144 с.

4. *Исимару*, *А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах / А. Исимару. – В 2 т. – М. : Мир, 1981.

5. *Гудмен, Дж.* Статистическая оптика. – М. : Мир, 1988. – 528 с.