10. *Hirt*, *C. W.* Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free Boundaries / C. W. Hirt, B. D. Nichols // J. Comput. Physics. – 1981. – Vol. 39. – P. 201–225.

11. *Сиов*, *Б. Н.* Истечение жидкости через насадки. – М. : Машиностроение, 1968. – С. 9–28.

УДК 519.863

В. А. Тененев, доктор физико-математических наук, профессор
Ижевский государственный технический университет

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ГЕНЕТИЧЕСКИМИ АЛГОРИТМАМИ

На основе генетического алгоритма с вещественным кодированием предложен метод решения задач многокритериальной оптимизации. Рассмотрена возможность решения задач с несколькими критериями различной природы без использования дополнительных оценок важности и сопоставимости критериев.

Многокритериальная оптимизация основана на отыскании решения, одновременно оптимизирующего более чем одну функцию. В этом случае ищется некоторый компромисс, в роли которого выступает решение, оптимальное в смысле Парето.

Решение **x** называется доминируемым, если существует решение **y**, не хуже чем **x**, т. е. для любой минимизируемой функции $f_i(\mathbf{x}), i = \overline{1,m}$ выполняется

$$f_i(\mathbf{x}) \geq f_i(\mathbf{y}), i = \overline{1,m} . \tag{1}$$

Если решение не доминируемо никаким другим решением, то оно называется недоминируемым, или оптимальным в смысле Парето.

Классические методы, относящиеся к многокритериальной оптимизации, определяют основные направления скаляризации векторного критерия [1].

1. Построение области Парето и предоставление лицу, принимающему решение (ЛПР), возможность выбора единственного из Парето-оптимальных решений.

2. Последовательная оптимизация скалярных критериев после введения для них приоритетов с назначением или без назначения уступок. Этот метод скаляризации основан на процедуре упорядочивания критериев по важности и построении процедур последовательной оптимизации сначала по первому критерию, затем по второму, третьему и т. д. Наиболее характерными для данной группы являются методы последовательного достижения частных и последовательных уступок.

Для метода последовательного достижения частных целей характерно поэтапное решение задач векторной оптимизации. Каждый этап – достижение определенной цели, т. е. выбор решения, связанного с одним компонентом векторного критерия, например с достижением на этапе j соотношения

$$f_j(\mathbf{x}) \leq \overline{F}^j , \tag{2}$$

где $\overline{F}^j$ – максимально допустимое значение f_j.

На результат решения влияет порядок достижения частных целей, поэтому все скалярные критерии предварительно необходимо упорядочить по приоритетам.

В методе последовательных уступок после установления отношения (2) решают задачу максимизации критерия f_1, отыскивают оптимальное значение f_1^0, а затем назначают уступку Δf_1, т. е. ту потерю эффективности по критерию f_1, которая может быть допущена с целью максимизации других компонентов векторного критерия. После этого решают следующую задачу: $f_2(\mathbf{x}) \to \min$; $f_1(\mathbf{x}) \le f_1^0(\mathbf{x}) + \Delta f_1$ и так далее до последнего критерия.

К недостаткам метода последовательных уступок следует отнести необходимость формирования экспертных оценок как для назначения приоритетов, так и для назначения уступок, а также необходимость применения различных процедур оптимизации, если скалярные критерии имеют различную математическую форму. Кроме того возникают дополнительные трудности при неудачном выборе приоритетов или уступок, когда резервы поиска локально оптимальных решений оказываются исчерпанными ранее, чем рассмотрены все скалярные критерии.

3. Оптимизация на основе компромиссных отношений, вводимых путем назначения весовых коэффициентов для каждого скалярного критерия. Наиболее распространенный способ скаляризации состоит в формировании общего критерия в виде суммы

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(\mathbf{x}) \to \min, \tag{3}$$

где α_j – весовые коэффициенты важности критериев и $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$.

Задача определения весовых коэффициентов также решается путем экспертных оценок. Решение, удовлетворяющее экстремуму критерия (3), является одновременно и Парето-оптимальным (1).

4. Задача пороговой оптимизации заключается в выделении из всего множества критериев наиболее важного критерия, а остальные сводят в систему ограничений. В результате получают задачу пороговой оптимизации, решение которой принадлежит области Парето: $f_1(\mathbf{x}) \to \min$; $f_j(\mathbf{x}) \le f_j^d,\ j = \overline{2,m}$, где f_j^d – допустимые значения критериев.

5. Оптимизация, основанная на приближении решения к некоторому, специальным образом выбранному идеальному значению [1].

Наиболее часто идеальное решение задают в пространстве минимизируемых критериев утопической точкой с координатами $\left(f_j^0\right),\ j = \overline{1,m}$, где f_j^0 – максимальное значение *j*-го критерия, полученное без учета остальных критериев. В качестве меры приближения искомого решения к идеальному применяется норма

$$\left\| \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}^0(\mathbf{x}) \right\| \text{ или } \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{f_j(\mathbf{x})}{f_j^0} - 1 \right)^2 . \tag{4}$$

При введении утопической точки решение задачи распадается на два этапа:

1) определение оптимальных значений каждого скалярного критерия независимо от остальных критериев;

2) решение задачи минимизации отклонения от утопической точки по критерию (4).

В работе [2] предлагается подход к многокритериальной оптимизации с помощью генетических алгоритмов. При многокритериальной оптимизации выбирается не единственная хромосома, представляющая собой закодированную форму оптимального решения в обычном смысле, а множество хромосом, оптимальных в смысле Парето. Алгоритм многокритериальной оптимизации реализован в программе «FlexTool» и связан с разделением популяции на подгруппы одинакового размера, каждая из которых отвечает за одну оптимизируемую функцию. Селекция производится автономно для каждой функции, однако операция скрещивания выполняется без учета границ подгрупп. Селекция выполняется турнирным методом, при этом лучшая особь в каждой подгруппе выбирается на основе функции приспособленности, уникальной для данной подгруппы. Наилучшая особь из каждой подгруппы смешивается с другими особями, и все генетические операции выполняются так же, как в генетическом алгоритме для оптимизации одной функции. Программа «FlexTool» обеспечивает одновременную оптимизацию четырех функций. В книге [2] приведен алгоритм многокритериальной оптимизации, реализованный в программе «FlexTool», при котором пользователь имеет возможность выбрать оптимальное решение из этого множества.

При таком подходе остается открытым вопрос о выборе единственного оптимального решения. Выбор предоставляется пользователю программы. Выбор может быть субъективным, так же как выбор весовых коэффициентов в методе взвешенных функций.

Рассмотрим следующий алгоритм, не требующий введения дополнительных подгрупп популяций и вмешательства пользователя в выбор оптимального по Парето решения.

Пусть задана задача многокритериальной оптимизации

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \to \min \text{, или } F_i(\mathbf{x}) \to \min, i = \overline{1,m}.$$

Так же как в случае одного критерия, формируется популяция заданного размера q. Из этой популяции выбираются особи (решения $\mathbf{x}$), являющиеся наилучшими по каждому критерию с значениями критериев $F_i^0(\mathbf{x}), i = \overline{1,m}$.

Особь, являющаяся лидером в данной популяции, определяется по правилу

$$\mathbf{x}^0 = \arg\left[\min_{j=\overline{1,q}}\left(\max_{i=\overline{1,m}}\left|F_i^j(\mathbf{x}) - F_i^0(\mathbf{x})\right|\right)\right]. \qquad (5)$$

Отбор для скрещивания проводится турнирным методом. Полученное в результате реализаций ряда итераций решение является однозначным и оптимальным по Парето. В качестве метода оптимизации применяется генетический алгоритм с вещественным кодированием, предложенный в работе [3].

Рассмотрим графическую иллюстрацию многокритериальной оптимизации на примере двух простых функций (рис. 1): $F_1 = a_1(x-c_1)^2 + b_1$; $F_2 = a_2(x-c_2)^2 + b_2$.

Возьмем $a_1 = 1$; $c_1 = 1$; $b_1 = 10$; $a_2 = 10$; $c_2 = 3$; $b_2 = 0$. Графики функций приведены на рис. 1.

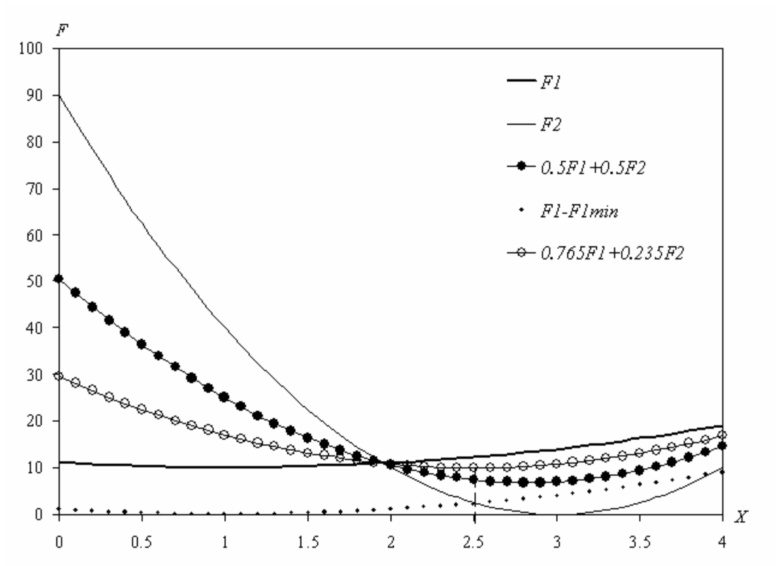

Рис. 1. Графики функций $a_1 = 1$; $c_1 = 1$; $b_1 = 10$; $a_2 = 10$; $c_2 = 3$; $b_2 = 0$

Первая функция имеет минимум в точке $x = 1$, вторая – при $x = 3$. Если данную задачу решать методом взвешенных функций, т. е. $\alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) \to \min$ при равнозначных критериях $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$, то оптимальному решению соответствует $x = 2,8$, что видно и из рис. 1. Решение задачи вышеизложенным генетическим алгоритмом дает оптимальное решение $x = 2,51$. Из рис. 1 ясен смысл полученного решения. Там нанесены графики функций $F_1(x) - F_1^{\min}$ и $F_2(x) - F_2^{\min}$, причем $F_2(x) - F_2^{\min}$ совпадает с $F_2(x)$, так как $F_2^{\min} = 0$. Из рис. 1 видно, что оптимальное решение $x = 2,51$ соответствует точке, в которой $F_1(x) - F_1^{\min} = F_2(x) - F_2^{\min}$.

Отсюда понятен смысл условия нахождения лучшей особи (5):

$$F_i(\mathbf{x}^0) - F_i^0 = F_j(\mathbf{x}^0) - F_j^0, \quad i, j = \overline{1,m}; \quad i \neq j. \tag{6}$$

На основании соотношения (6) можно определить способ скаляризации векторного критерия. Вместо задачи векторной оптимизации $F_i(\mathbf{x}) \to \min, i = \overline{1,m}$ решается задача скалярной оптимизации:

$$\sum_{i,j=\overline{1,m}, i \neq j} \left[\left| F_i(\mathbf{x}^0) - F_i^0 \right| - \left| F_j(\mathbf{x}^0) - F_j^0 \right| \right]^2 \to \min, \tag{7}$$

где F_i^0 – минимальное значение критерия, полученное без учета других критериев.

Генетический алгоритм выполняет условие (7) в процессе решения исходной задачи.

Найденное оптимальное решение позволяет определить весовые коэффициенты α_i для случая $m = 2$, т. е. установить важность каждого критерия. Для $a_1 = 1$;

$c_1 = 1$; $b_1 = 10$; $a_2 = 10$; $c_2 = 3$; $b_2 = 0$ получим: $a_1 = 0,765$; $a_2 = 0,235$. Величины этих коэффициентов определяются видом функций.

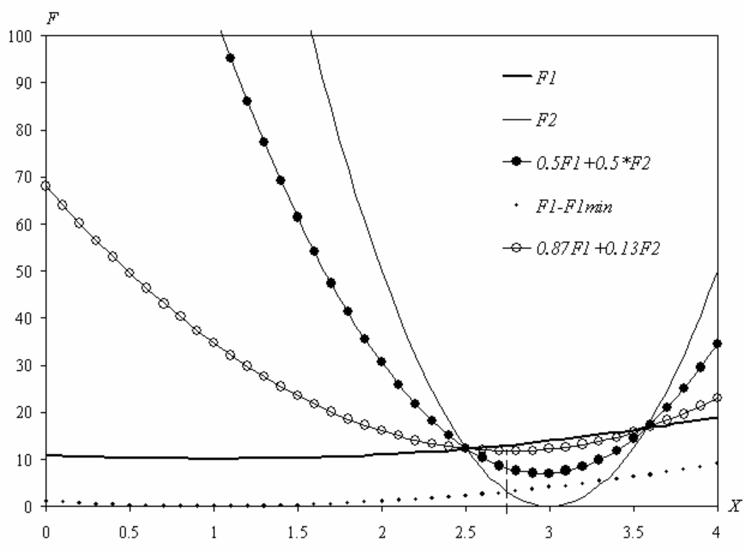

Рис. 2. Графики функций $a_1 = 1$; $c_1 = 1$; $b_1 = 10$; $a_2 = 50$; $c_2 = 3$; $b_2 = 0$

Для функций с $a_1 = 1$; $c_1 = 1$; $b_1 = 10$; $a_2 = 50$; $c_2 = 3$; $b_2 = 0$, приведенным на рис. 2, коэффициенты равны: $a_1 = 0,87$; $a_2 = 0,13$.

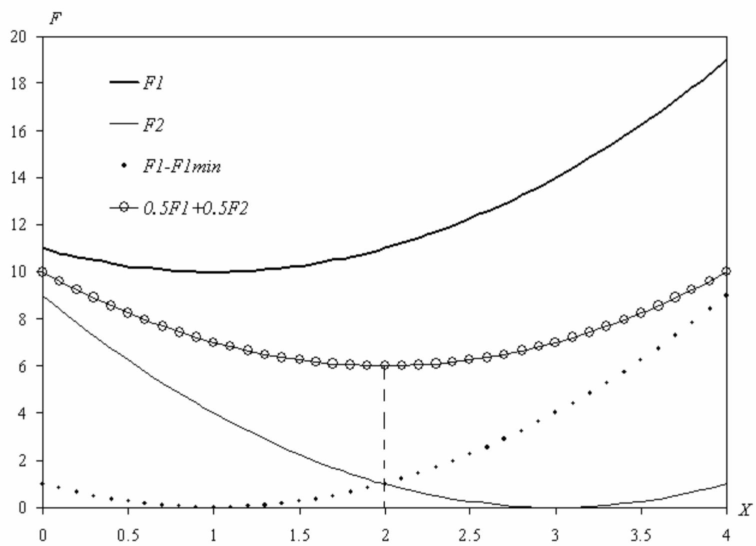

Рис. 3. Графики функций $a_1 = 1$; $c_1 = 1$; $b_1 = 10$; $a_2 = 1$; $c_2 = 3$; $b_2 = 0$

Вес каждого критерия зависит от крутизны данных парабол. С увеличением a_2 вес второго критерия снижается. Естественно, что представленный на рис. 3 результат, соответствующий $a_1 = a_2 = 1$, приводит к равнозначности критериев: $a_1 = 0{,}5$; $a_2 = 0{,}5$.

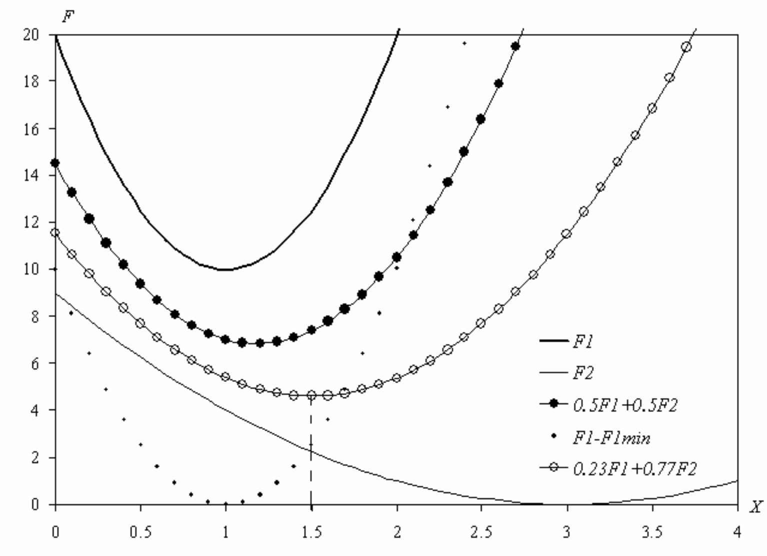

Рис. 4. Графики функций $a_1 = 10$; $c_1 = 1$; $b_1 = 10$; $a_2 = 1$; $c_2 = 3$; $b_2 = 0$

Увеличение крутизны первой функции до $a_1 = 10$ приводит к оптимальному решению $x = 1{,}5$ и значениям весовых коэффициентов $a_1 = 0{,}23$; $a_2 = 0{,}77$ (рис. 4). Для произвольного числа критериев установление важности критериев является отдельной задачей.

При решении многих задач оптимального управления часто приходится иметь дело с несколькими критериями, измеряемыми в различных единицах (например, в экономических задачах). В этом случае целесообразно рассматривать безразмерные критерии. Приближение решения к утопической точке (4) является примером такого критерия. Генетический алгоритм и применение правила (5) позволяют решить задачу многокритериальной оптимизации с критериями различной природы без использования дополнительных оценок важности и сопоставимости критериев.

Для сформированной популяции определяются минимальные и максимальные значения критериев $F_i^{\min}(\mathbf{x}), F_i^{\max}(\mathbf{x})$, $i = \overline{1,\ m}$ и осуществляется переход к безразмерным критериям:

$$\overline{F_i}(\mathbf{x}) = \frac{F_i(\mathbf{x}) - F_i^{\min}(\mathbf{x})}{F_i^{\max}(\mathbf{x}) - F_i^{\min}(\mathbf{x})},\ i = \overline{1, m}\,. \tag{8}$$

Далее применяется правило (5) для определения наилучшего решения. Величины $F_i^{\min}(\mathbf{x})$, $F_i^{\max}(\mathbf{x})$, $i=\overline{1,\ m}$ являются экстремальными оценками по всем проведенным итерациям, т. е. стремятся к соответствующим глобальным экстремумам по каждому критерию. Вид критерия (8) не требует специальной записи при $F_i^{\min}(\mathbf{x})=0$, что необходимо при использовании записи (4).

Список литературы

1. *Пупков*, *К. А.* Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления / К. А. Пупков, Н. Д. Егупов, А. И. Гаврилов и др. – М. : Изд-во МГТУ, 2002. – 744 с.

2. *Рутковская*, *Д.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский ; пер. с польского И. Д. Рудинского. – М. : Горячая линия – Телеком, 2004. – 452 с.

3. *Тененев*, *В. А.* Применение генетических алгоритмов с вещественным кроссовером для минимизации функций большой размерности // Интеллектуальные системы в производстве. – 2006. – № 1 (7). – С. 93–107.

УДК 621.37/39

А. Ю. Печенкин, аспирант
Ижевский государственный технический университет

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЫПОЛНЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ В ГЕНЕТИЧЕСКОМ АЛГОРИТМЕ СИНТЕЗА RC-ЭЛЕМЕНТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В работе рассмотрен способ задания вероятностей выполнения операций изменения размеров и расположения контактных площадок по периметру резистивного слоя RC-элемента, основанный на определении оценки априорной вероятности улучшения целевой функции за счет изменения размеров и расположения контактных площадок.

RC-элементы с распределенными параметрами (RC-ЭРП) являются перспективной элементной базой функциональной микроэлектроники, позволяющей на основе определенным образом организованной материальной среды, представляющей из себя систему чередующихся резистивных, диэлектрических и проводящих слоев, выполнять функции аналоговой обработки сигналов высшего порядка (например, дробное интегрирование и дифференцирование, дробное преобразование Лапласа и др.) [1].

В работах [1; 2] предложено синтезировать конструкции двумерных однородных RC-ЭРП (ДО RC-ЭРП) по заданным частотным характеристикам, используя конечно-элементные модели ДО RC-ЭРП и генетический алгоритм оптимизации. Для повышения точности расчетов необходимо увеличивать число конечных элементов. В этом случае при числе конечных элементов m = 100 (при сетке 10×10) точность расчета составляет порядка 1 %; с увеличением m точность увеличивается пропорционально m, а время вычислений растет пропорционально $m^{3,8}$ [3]. Ясно, что решение задачи оптимизации, даже при использовании генетических алгоритмов, становится достаточно длительным уже при числе конечных элементов более 200.