3. *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. – М. : Наука, 1982. – 392 с.
4. *Алемасов В. Е., Дрегалин А. Ф., Тишин А. П.* Теория ракетных двигателей / под ред. В. Е. Алемасова. – М. : Машиностроение, 1969. – 548 с.
5. *Груздь С. А., Корепанов М. А.* Исследование процессов в энергоустановках с учетом неидеальности рабочего тела // Химическая физика и мезоскопия. – 2009. – Т. 11. – № 2. – С. 166–171.
6. *Корепанов М. А., Груздь С. А.* Моделирование гомогенной конденсации с учетом квазиравновесной концентрации малых агломератов // Химическая физика и мезоскопия. – 2014. – Т. 16. – № 1. – С. 63–67.
7. *Корепанов М. А., Груздь С. А.* Расчет давления насыщенного пара с учетом малых агломератов // Химическая физика и мезоскопия. – 2013. – Т. 15. – № 2. – С. 223–230.
8. Модели образования наночастиц в потоках газа : учеб.-метод. комплекс / В. Ю. Гидаспов, У. Г. Пирумов, И. Э. Иванов и др. – Калуга ; М. : Эйдос, 2011. – 214 с.

* * *

S. A. Gruzd, Senior Teacher, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Modeling homogeneous condensation in the nozzle with determination the size of a critical cluster

A mathematical model that considers homogeneous condensation in the framework of the Smoluchowski coagulation theory is proposed. Saturated vapor is considered as a mixture of monomers and small agglomerates. It allows to determine the size of a critical cluster with high enough accuracy.

Keywords: homogeneous condensation, small agglomerates, fast coagulation, modeling, critical cluster

Получено: 12.05.14

УДК 519.21

И. В. Золотухин, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник
Институт океанологии имени П. П. Ширшова РАН, Санкт-Петербургский филиал

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МНОГОМЕРНОГО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАРШАЛЛА–ОЛКИНА

Найдено преобразование Лапласа k-мерного экспоненциального распределения Маршалла – Олкина в форме, выявляющей структуру распределения. Полученные формулы позволяют восстановить k-мерное распределение по распределениям меньшей размерности, а именно по известным распределениям всех его проекций на координатные гиперплоскости. Можно также вычислить распределения проекций распределения Маршалла – Олкина на координатные гиперплоскости, если известны все распределения меньшей размерности.

Ключевые слова: многомерное экспоненциальное распределение, преобразование Лапласа

Введение

Исследованиями различных форм многомерных экспоненциальных распределений занимались многие авторы: Гумбель [1], Джонсон и Котц [2], Маршалл и Олкин [3] и другие. Среди вариантов экспоненциальных распределений (подробный их список для двумерного случая можно найти в монографии Галамбоша [4, § 5.1]) лишь для многомерного распределения Маршалла – Олкина показан механизм его возникновения и практическая применимость, например, в испытаниях на долговечность и надежность. Кроме того, определяющее свойство этого распределения является расширением характеристического свойства одномерного экспоненциального распределения: отсутствие последействия.

Требование отсутствия последействия по всем компонентам случайного вектора $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, ..., Z_k)$ эквивалентно тому, что вектор состоит из независимых экспоненциально распределенных компонент. Обобщение условия отсутствия последействия, предложенное в работе [3], состоит в следующем:

$$P\left(\frac{Z_1 > z_1 + z,\, Z_2 > z_2 + z,\, ...\,,\, Z_k > z_k + z}{Z_1 > z_1,\, Z_2 > z_2,\, ...,\, Z_k > z_k}\right) = \\ = P\left(Z_1 > z_1, Z_2 > z_2, ..., Z_k > z_k\right), \quad (1) \\ \forall z > 0,\, z_1 > 0,\, z_2 > 0, ..., z_k > 0.$$

Если обозначить через $E = \{\varepsilon\}$ совокупность всех k-мерных индексов $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k)$, каждая компонента которого равна 0 или 1, то, как показано в [3], соотношение (1) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\overline{F}(z_1, z_2, ..., z_k) = P(Z_1 > z_1,\, Z_2 > z_2,\, ...,\, Z_k > z_k) = \\ = \exp\left[-\sum_{\varepsilon \in E} \lambda_\varepsilon \max_{1 \le i \le k}\{\varepsilon_i z_i\}\right], \quad z_i \ge 0, \quad (2)$$

$\lambda_\varepsilon \ge 0, \forall \varepsilon \in E$ – параметры распределения, $\lambda_{\mathbf{0}} = 0$, $\mathbf{0} = (0,...,0)$.

Следуя [5, § 2.2], будем называть $\overline{F}$ функцией надежности. В частности, $\overline{F}(z) = \exp[-\lambda z]$ – функция надежности одномерного экспоненциального распределения.

Распределение (2) называют многомерным экспоненциальным распределением Маршалла – Олкина (М-О). Класс распределений, как и в [3], обозначим $MVE(\lambda_\varepsilon,\ \varepsilon \in E)$, только будем указывать в скобках параметры распределения.

В работе [3] подробно рассмотрен лишь случай $k = 2$ (распределение BVE в обозначениях авторов). Для этого случая найдена функция распределения, показано, что она содержит как абсолютно непрерывную, так и сингулярную части, вычислена производящая функция моментов (преобразование Лапласа). В многомерном случае дано определение MVE. Отмечено, что распределение содержит сингулярную компоненту, а нахождение преобразования Лапласа MVE чрезвычайно сложно.

В настоящей работе получены следующие результаты:

• Найдена функция надежности проекции вектора $\mathbf{Z}$ на любую координатную гиперплоскость. Показано, что все такие проекции тоже имеют распределение MVE. Предложенная в работе специальная операция позволяет вычислять параметры этого распределения по параметрам распределения вектора $\mathbf{Z}$.

• Получено выражение для преобразования Лапласа распределения MVE при любом k в виде, позволяющем выявить структуру распределения.

• Выведена формула для вычисления преобразования Лапласа распределения проекции вектора $\mathbf{Z}$ на произвольную координатную гиперплоскость.

Основные результаты

Введем следующие обозначения.

Вектор ε будем использовать для выделения координатной гиперплоскости в k-мерном пространстве.

Пусть запись $\varepsilon z = (\varepsilon_1 z_1, ..., \varepsilon_k z_k)$ означает координатное умножение векторов ε и $z = (z_1, ..., z_k)$, запись $(\varepsilon, z) = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i z_i$ – их скалярное произведение.

Под нормой вектора будем понимать L_1-норму, в частности $\|\varepsilon\| = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i$.

Обозначим $\mathbf{1} = (1,...,1)$, $\mathbf{0} = (0,...,0)$.

Тогда $\overline{F}(\varepsilon z)$ – функция надежности проекции вектора $\mathbf{Z}$ на координатную гиперплоскость ε.

Зададим отношение частичного порядка на множестве E:

$$\forall \varepsilon, \delta \in E \quad \delta \le \varepsilon, \text{ если } \forall i\ (i = 1,...,k) \quad \delta_i \le \varepsilon_i.$$

Положим $\delta < \varepsilon$, если $\delta \le \varepsilon$ и $\delta \ne \varepsilon$.

Суммирование λ по некоторой координате при фиксированных других координатах будем обозначать знаком <<•>>. Например,

$$\lambda_{\bullet\dots\bullet} = \sum_{\varepsilon \in E} \lambda_\varepsilon ,$$

$$\lambda_{1\bullet\bullet} = \lambda_{11\bullet} + \lambda_{10\bullet} = \lambda_{111} + \lambda_{110} + \lambda_{101} + \lambda_{100}.$$

Определим $\forall \varepsilon, \delta \in E$ $\varepsilon \oplus \delta$ как вектор, компоненты которого складываются по следующему правилу:

$$1 \oplus 0 = 1,$$

$$0 \oplus 1 = 1,$$

$$1 \oplus 1 = 0,$$

$$0 \oplus 0 = \bullet.$$

Далее будем рассматривать также индексы ε, координаты которых могут принимать три значения: $0, 1, \bullet$.

Для таких индексов определим $\overline{\varepsilon}$ следующим образом:

$$\overline{\varepsilon}_j = 0, \text{ если } \varepsilon_j = 1,$$

$$\overline{\varepsilon}_j = 1, \text{ если } \varepsilon_j = 0,$$

$$\overline{\varepsilon}_j = \bullet, \text{ если } \varepsilon_j = \bullet.$$

Формулу (2) можно записать в виде

$$\overline{F}(z) = \overline{F}(\mathbf{1}z) = \exp\left(-\sum_{\delta \le \mathbf{1}} \lambda_{\overline{1 \oplus \delta}} \max\{\delta z\}\right). \qquad (3)$$

Теорема 1.

$$\forall \varepsilon \in E \quad \overline{F}(\varepsilon z) = \exp\left(-\sum_{\delta \le \varepsilon} \lambda_{\overline{\varepsilon \oplus \delta}} \max\{\delta z\}\right). \qquad (4)$$

Замечание 1.

Из (4) следует, что $\varepsilon \mathbf{Z} \in MVE(\lambda_{\overline{\varepsilon \oplus \delta}}, \delta \le \varepsilon)$, таким образом, проекции случайного вектора $\mathbf{Z}$ на любую координатную гиперплоскость тоже распределены по Маршаллу – Олкину, в частности, при $\varepsilon = (1,0,...,0)$ $\overline{F}(\varepsilon z) = \overline{F}(z_1) = \exp(-\lambda_{1\bullet\dots\bullet} z_1)$ и $\varepsilon \mathbf{Z}$ распределено по одномерному экспоненциальному закону с параметром $\lambda_{1\bullet\dots\bullet}$.

Обозначим

$$\psi(s) = \psi(s_1,...,s_k) = \mathrm{E}e^{-s\mathbf{Z}} = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \prod_{i=1}^{k} e^{-s_i z_i} dF(z_1,...,z_k) \qquad (5)$$

преобразование Лапласа распределения MVE.

Теорема 2.

Для любого $\mathbf{Z} \in MVE(\lambda_\varepsilon, \varepsilon \in E)$ *преобразование Лапласа его распределения вычисляется по формуле*

$$\psi(s) = \frac{1}{(\mathbf{1}, s) + \lambda_{\bullet\dots\bullet}} \sum_{\varepsilon \in E} \lambda_{\overline{\varepsilon}}\, \psi(\varepsilon s). \qquad (6)$$

Замечание 2.

Пусть случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda_{\bullet\dots\bullet}$, вектор $\mathbf{X} = (X,...,X)$.

Преобразование Лапласа вектора $\mathbf{X}$

$$\psi(s) = \mathrm{E}e^{-s\mathbf{X}} = \frac{\lambda_{\bullet\dots\bullet}}{(\mathbf{1}, s) + \lambda_{\bullet\dots\bullet}}.$$

Полагая $p_\varepsilon = \dfrac{\lambda_\varepsilon}{\lambda_{\bullet\ldots\bullet}}$, формулу (6) можно переписать в виде:

$$\psi(s) = \sum_{\varepsilon\in E} p_\varepsilon \psi(\overline{\varepsilon} s). \qquad (7)$$

Из (7) следует, что распределение Маршалла – Олкина представляет собой дискретную смесь распределения $\mathbf{X}$ и его сверток с проекциями вектора $\mathbf{Z}$ на все его координатные гиперплоскости.

Замечание 3.

В двумерном случае выражение для $\psi(s_1,s_2)$, найденное в [3], после некоторых преобразований совпадает с (6) при $k=2$. Действительно, во введенных нами обозначениях $\psi(s_1,s_2)$ из [3] записывается в виде

$$\psi(s_1,s_2) = \frac{\lambda_{1\bullet}\lambda_{\bullet 1}}{(\lambda_{1\bullet}+s_1)(\lambda_{\bullet 1}+s_2)} + \frac{\lambda_{11}s_1 s_2}{(\lambda_{\bullet\bullet}+s_1+s_2)(\lambda_{1\bullet}+s_1)(\lambda_{\bullet 1}+s_2)},$$

которое, как нетрудно убедиться, можно непосредственно привести к виду

$$\psi(s_1,s_2) = \frac{1}{\lambda_{\bullet\bullet}+s_1+s_2} \times \left[\lambda_{11} + \lambda_{01}\frac{\lambda_{1\bullet}}{(\lambda_{1\bullet}+s_1)} + \lambda_{10}\frac{\lambda_{\bullet 1}}{(\lambda_{\bullet 1}+s_2)}\right] = \frac{1}{\lambda_{\bullet\bullet}+s_1+s_2}[\lambda_{11} + \lambda_{01}\psi(s_1,0) + \lambda_{10}\psi(0,s_2)],$$

где $\psi(s_1,0) = \dfrac{\lambda_{1\bullet}}{(\lambda_{1\bullet}+s_1)}$, $\psi(0,s_2) = \dfrac{\lambda_{\bullet 1}}{(\lambda_{\bullet 1}+s_2)}$ представляют собой преобразования Лапласа одномерных экспоненциальных распределений соответствующих проекций.

Теорема 3.

$$\forall\varepsilon\in E \quad \psi(\varepsilon s) = \frac{1}{\sum_{\delta<\varepsilon}\lambda_{\delta\oplus\varepsilon} + (\varepsilon,s)} \sum_{\delta<\varepsilon}\lambda_{\delta\oplus\varepsilon}\psi(\delta s). \qquad (8)$$

Замечание 4.

Поскольку $\delta\oplus\mathbf{1} = \delta$, а $\lambda_{\mathbf{0}} = 0$, убеждаемся, что теорема 2 представляет собой частный случай теоремы 3 при $\varepsilon = \mathbf{1}$.

Замечание 5.

Из (8) следует, что преобразование Лапласа проекции вектора $\mathbf{Z}$ на координатную гиперплоскость ε можно находить по теореме 2 в размерности PεP, если в индексах параметров λ нули вектора ε заменить на точки. Так, при $\varepsilon = (1,0,\ldots,0)$

$$\psi(\varepsilon s) = \psi(s_1) = \frac{\lambda_{1\bullet\ldots\bullet}}{\lambda_{1\bullet\ldots\bullet}+s_1}.$$

Доказательство основных результатов

***Доказательство теоремы* 1.**

Имеем $\overline{F}(\varepsilon z) = \exp\left(-\sum_{\delta\in E}\lambda_\delta \max\{\delta\varepsilon z\}\right)$. Поскольку $\forall\delta\in E \quad \delta\varepsilon\le\varepsilon$, мы можем суммировать сначала по всем δ□ε, а затем по всем γ таким, что $\gamma\varepsilon=\delta$. Заметим, что, если $\delta\le\varepsilon$, то $\delta\varepsilon=\delta$.

$$\overline{F}(\varepsilon z) = \exp\left(-\sum_{\delta\square\varepsilon}\max\{\delta z\}\left(\sum_{\gamma:\gamma\varepsilon=\delta}\lambda_\gamma\right)\right).$$

Нетрудно убедиться, что при $\delta\le\varepsilon$

$$\sum_{\gamma:\gamma\varepsilon=\delta}\lambda_\gamma = \lambda_{\overline{\varepsilon\oplus\delta}}. \qquad (9)$$

В самом деле,

если $\varepsilon_j = 1, \delta_j = 1$, то $\gamma = 1$,

если $\varepsilon_j = 1, \delta_j = 0$, то $\gamma = 0$,

если $\varepsilon_j = 0, \delta_j = 0$, то $\gamma = 0$ или $\gamma = 1$.

Такое правило в точности соответсвует операции $\overline{\varepsilon\oplus\delta}$.

***Доказательство теоремы* 2.**

При доказательстве будем использовать следующее представление случайного вектора $\mathbf{Z}\in MVE(\lambda_\varepsilon, \varepsilon\in E)$. Пусть E_i $(i=1,\ldots,k)$ – совокупность индексов ε, у которых на i-м месте стоит 1; X_ε – независимые экспоненциально распределеные случайные велечины с параметрами $\lambda_\varepsilon = 0$. Считаем $X_\varepsilon = +\infty$, если $\lambda_\varepsilon = 0$. Компоненты вектора $\mathbf{Z}$=$(Z_1,\ldots,Z_k)$ определим с помощью равенства

$$Z_i = \min_{\varepsilon\in E_i}\{X_\varepsilon\}. \qquad (10)$$

Отметим, что по известному свойству экспоненциального закона $Z_i \in E\left(\sum_{\varepsilon\in E_i}\lambda_\varepsilon\right)$. Здесь $E(\lambda)$ – класс экспоненциальных законов. Функция надежности вектора $\mathbf{Z}$, как нетрудно убедиться непосредственно, вычисляется по формуле (2), так что $\mathbf{Z}$$\in$$MVE(\lambda_\varepsilon, \varepsilon\in E)$.

Обозначим через W минимум случайных величин Z_i. Учитывая (10), получим

$$W = \min Z_i = \min_i\left(\min_{\delta\in E_i}\{X_\delta\}\right) = \min_{\delta\in E} X_\delta.$$

По формуле сложения

$$\mathrm{E}e^{-(s,\mathbf{Z})} = \sum_{\varepsilon\in E}\mathrm{E}(e^{-(s,\mathbf{Z})}; W = X_\varepsilon). \qquad (11)$$

Здесь, следуя [6, § 4.2], используется обозначение $\mathrm{E}(\xi;B) = \int_B \xi(\omega)\mathrm{P}(d\omega)$. По свойству условного ожидания

$$\mathrm{E}\left(e^{-(s,\mathbf{Z})}; W = X_\varepsilon\right) =$$
$$= \mathrm{E}_{X_\varepsilon} \mathrm{E}\left(e^{-(s,\mathbf{Z})};\ W = X_\varepsilon,\ X_\delta \ge X_\varepsilon,\ \delta \in E \setminus \{\varepsilon\}\right) =$$
$$= \int_0^\infty e^{-\lambda_\varepsilon x} dx \cdot \mathrm{E}\left(e^{-(s,\mathbf{Z})};\ X_\varepsilon = x,\ X_\delta \ge x,\ \delta \in E \setminus \{\varepsilon\}\right) =$$
$$= \int_0^\infty e^{-\lambda_\varepsilon x} dx \mathrm{E}\left(e^{-(s,\varepsilon\mathbf{Z})} e^{-(s,\bar{\varepsilon}\mathbf{Z})};\ X_\varepsilon = x,\ X_\delta \ge x,\ \delta \in E \setminus \{\varepsilon\}\right). \tag{12}$$

Положим $\chi = (x,...,x)$, тогда, очевидно, при $X_\varepsilon = x \quad \varepsilon\mathbf{Z} = \varepsilon\chi$,

$$\mathrm{E}(e^{-(s,\bar{\varepsilon}\mathbf{Z})};\ X_\varepsilon = x,\ X_\delta \ge x,\ \delta \in E \setminus \{\varepsilon\}) =$$
$$= e^{-x(s,\varepsilon)} \mathrm{E}\left(e^{-(s,\bar{\varepsilon}\mathbf{Z})};\ X_\delta \ge x, \delta \in E \setminus \{\varepsilon\}\right). \tag{13}$$

Событие $\left\{X_\delta \ge x,\ \delta \in E \setminus \{\varepsilon\}\right\}$ есть пересечение независимых событий $\left\{X_\delta \ge x,\ \delta\bar{\varepsilon} > 0\right\}$ и $\left\{X_\delta \ge x,\ \delta \in E \setminus \{\varepsilon\} \setminus \{\delta\bar{\varepsilon} > 0\}\right\}$. При этом вектор $\bar{\varepsilon}\mathbf{Z}$ от второго из них не зависит. Поэтому

$$\mathrm{E}\left(e^{-(s,\bar{\varepsilon}\mathbf{Z})};\ X_\delta \ge x, \delta \in E \setminus \{\varepsilon\}\right) =$$
$$= \mathrm{P}\left(X_\delta \ge x,\ \delta \in E \setminus \{\varepsilon\} \setminus \{\delta\bar{\varepsilon} > 0\}\right) \times$$
$$\times \mathrm{E}\left(e^{-(s,\bar{\varepsilon}\mathbf{Z})};\ X_\delta \ge x,\ \delta\bar{\varepsilon} > 0\right) =$$
$$= \exp\left(-x \cdot \sum_{\delta \in E \setminus \{\varepsilon\} \setminus \{\delta\bar{\varepsilon} > 0\}} \lambda_\delta\right) \mathrm{E}\left(e^{-(s,\bar{\varepsilon}\mathbf{Z})};\ \bar{\varepsilon}\mathbf{Z} \ge \bar{\varepsilon}\chi\right). \tag{14}$$

Покажем, что

$$\mathrm{E}(e^{-(s,\bar{\varepsilon}\mathbf{Z})};\ \bar{\varepsilon}\mathbf{Z} \ge \bar{\varepsilon}\chi) = e^{-x\left[(\varepsilon,s) + \sum\limits_{\delta\bar{\varepsilon}>0} \lambda_\delta\right]} \cdot \mathrm{E} e^{-(s,\bar{\varepsilon}\mathbf{Z})}. \tag{15}$$

Действительно, из свойства (1), справедливого для распределения MVE, следует

$$\bar{F}(\varepsilon(z+\chi)) = \bar{F}(\varepsilon z + \varepsilon\chi) = \bar{F}(\varepsilon z)\bar{F}(\varepsilon\chi), \tag{16}$$

$$\bar{F}(\varepsilon\chi) = \mathrm{P}(\varepsilon\mathbf{Z} > \varepsilon\chi) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{\delta\varepsilon>0} \{X_\delta > x\}\right) = \exp\left(-x \sum_{\delta\varepsilon>0} \lambda_\delta\right), \tag{17}$$

$$E(e^{-(s,\bar{\varepsilon}\mathbf{Z})};\ \varepsilon\mathbf{Z} \ge \varepsilon\chi) = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty e^{-(s,\,\varepsilon(z+\chi))}\, dF\left(\varepsilon(z+\chi)\right). \tag{18}$$

Поскольку для произвольной и интегрируемой функции $g(z)$

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(z) dF(\varepsilon z) = (-1)^{\|\varepsilon\|} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(z) d\bar{F}(\varepsilon z),$$

то, учитывая (16), (17), (18),

$$\mathrm{E}(e^{-(s,\bar{\varepsilon}\mathbf{Z})};\ \varepsilon\mathbf{Z} \ge \varepsilon\chi) = e^{-x\left[(s,\varepsilon) + \sum\limits_{\delta\varepsilon>0} \lambda_\delta\right]} E e^{-(s,\varepsilon\mathbf{Z})}.$$

Теперь, последовательно подставив (15) в (14), (14) в (13), (13) в (12), проинтегрируем, результат подставим в (11) и получим требуемое.

***Доказательство теоремы* 3.**

Доказательство проводим по той же схеме, что теоремы 2. Положим

$$W_\varepsilon = \min_{i:\varepsilon_i = 1} \varepsilon\mathbf{Z} = \min_{\delta\varepsilon>0} \{X_\delta\}.$$

Имеем

$$\mathrm{E} e^{-(s,\varepsilon\mathbf{Z})} = \sum_{\delta\varepsilon>0} \mathrm{E}\left(e^{-(s,\varepsilon\mathbf{Z})}; W_\varepsilon = X_\delta\right) =$$
$$= \sum_{\delta\varepsilon>0} \int_0^\infty \lambda_\delta e^{-x\lambda_\delta} dx \cdot \mathrm{E}\left(e^{-(s,\varepsilon\mathbf{Z})}; X_\delta = x, X_\gamma\ x, \gamma\varepsilon>0, \gamma\ne\delta\right).$$

При $X_\delta = x, \quad \delta\varepsilon\mathbf{Z} = \delta\varepsilon\chi$ получим

$$\mathrm{E} e^{-(s,\varepsilon\mathbf{Z})} = \sum_{\delta\varepsilon>0} \int_0^\infty \lambda_\delta e^{-x\lambda_\delta} dx \cdot e^{-x(s,\varepsilon\delta)} \times$$
$$\times \mathrm{E}\left(e^{-(s,\bar{\delta}\varepsilon\mathbf{Z})};\ X_\gamma \ge x, \gamma\varepsilon > 0,\ \gamma \ne \delta\right). \tag{19}$$

Но

$$\mathrm{E}\left(e^{-(s,\bar{\delta}\varepsilon\mathbf{Z})}; X_\gamma \ge x, \gamma\varepsilon > 0, \gamma \ne \delta\right) =$$
$$= \mathrm{P}\left(X_\gamma \ge x; \gamma \in \{\gamma\varepsilon > 0\} \setminus \{\delta\} \setminus \{\gamma\varepsilon\bar{\delta} > 0\}\right) \times$$
$$\times\ \mathrm{E}\left(e^{-(s,\bar{\delta}\varepsilon\mathbf{Z})}; X_\gamma \ge x, \gamma\varepsilon > 0, \gamma\varepsilon\bar{\delta} > 0\right) =$$
$$= \exp\left(-x \sum_{\gamma \in \{\gamma\varepsilon>0\} \setminus \{\delta\} \setminus \{\gamma\varepsilon\bar{\delta}>0\}} \lambda_\gamma\right) \cdot \mathrm{E}\left(e^{-(s,\bar{\delta}\varepsilon\mathbf{Z})}; X_\gamma \ge x, \gamma\varepsilon\bar{\delta}>0\right) =$$
$$= \exp\left(-x \sum_{\gamma \in \{\gamma\varepsilon>0\} \setminus \{\delta\} \setminus \{\gamma\varepsilon\bar{\delta}>0\}} \lambda_\gamma + x\left[(\varepsilon\bar{\delta},s) + \sum_{\gamma\varepsilon\bar{\delta}>0} \lambda_\gamma\right]\right) \mathrm{E} e^{-(s,\bar{\delta}\varepsilon\mathbf{Z})} =$$
$$= \exp\left(-x\left[(\varepsilon\bar{\delta},s) + \sum_{\gamma \in \{\gamma\varepsilon>0\} \setminus \{\delta\}} \lambda_\gamma\right]\right) \mathrm{E} e^{-(s,\bar{\delta}\varepsilon\mathbf{Z})}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19) и интегрируя, получим

$$\mathrm{E} e^{-(s,\varepsilon\mathbf{Z})} = \frac{1}{\sum\limits_{\delta:\delta\varepsilon>0} \lambda_\delta + (s,\varepsilon)} \sum_{\delta\varepsilon>0} \lambda_\delta E e^{-(s,\bar{\delta}\varepsilon\mathbf{Z})}. \tag{21}$$

Осталось привести (21) к виду (8). Сделаем это в несколько этапов. Сначала сделав замену $\beta{=}\gamma\varepsilon$, при которой $0 < \beta = \gamma\varepsilon \le \varepsilon$, и учитывая (9), запишем

$$\sum_{\delta\varepsilon>0} \lambda_\delta = \sum_{0<\beta\square\varepsilon} \left(\sum_{\gamma\varepsilon=\beta} \lambda_\delta\right) = \sum_{0<\beta\square\varepsilon} \lambda_{\overline{\beta\oplus\varepsilon}}. \tag{22}$$

При замене в (22) $\beta' = \varepsilon - \beta$ (здесь и далее знаки операций вычитания и сложения над двузначными индексами означают обычные вычитание и сложение по модулю 2)

$$0 < \beta \le \varepsilon \Leftrightarrow 0 \le \beta' < \varepsilon,\ \ \beta \oplus \varepsilon = \beta' \oplus \varepsilon \ \text{ и}$$

$$\sum_{\delta\varepsilon>0} \lambda_\delta = \sum_{0\le\gamma<\varepsilon} \lambda_{\gamma\oplus\varepsilon}. \tag{23}$$

Аналогично

$$\sum_{\delta\varepsilon>0} \lambda_\delta \psi(\bar{\delta}\varepsilon s) = \sum_{0<\beta\le\varepsilon} \left(\sum_{\delta\varepsilon=\beta} \lambda_\delta \psi(\bar{\delta}\varepsilon s)\right). \tag{24}$$

Но $\delta\varepsilon = \beta \Leftrightarrow \overline{\delta}\varepsilon = \varepsilon - \beta$, так как $\overline{\delta}\varepsilon + \delta\varepsilon = \mathbf{1}\varepsilon = \varepsilon$. Значит,

$$\sum_{\delta\varepsilon>0} \lambda_\delta \psi(\overline{\delta}\varepsilon s) = \sum_{0<\beta\leq\varepsilon} \psi((\varepsilon-\beta)s) \sum_{\varepsilon\delta=\beta} \lambda_\beta = \sum_{0<\beta\leq\varepsilon} \lambda_{\overline{\beta\oplus\varepsilon}} \psi((\varepsilon-\beta)s). \tag{25}$$

Заменой $\beta' = \varepsilon - \beta$ приводим (25) к виду

$$\sum_{\delta\varepsilon>0} \lambda_\delta \psi(\overline{\delta}\varepsilon s) = \sum_{0\leq\beta'<\varepsilon} \lambda_{\varepsilon\oplus\beta'} \psi(\beta'\varepsilon). \tag{26}$$

Подстановка (23) и (26) в (21) приводит к (8).

Библиографические ссылки

1. *Gumbel, E. J.* Bivariate exponential distributions // J. Am. Stat. Assoc. – 1960. – Vol. 55, No. 292. – Pp. 698-707. URL: http://www.jstor.org/discover/10.2307/ 2281591?uid=3738936&uid=2134&uid=2&uid=70&uid=4&sid=21103939315397 (дата обращения: 29.04.2014).
2. *Johnson, N. L., Kotz, S.* A vector multivariate hazard rate // J. Multivariate Anal. – March 1975. – Vol. 5, Iss. 1. – Pp. 53–66.
3. *Marshall, A. W., Olkin, I.* A multivariate exponential distribution // J. Am. Stat. Assoc. – 1967. – Vol. 62. – Pp. 30–44.
4. *Галамбош Я.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик / пер. с англ. В. А. Егорова, В. Б. Невзорова ; под ред. В. В. Петрова. – М. : Наука, 1984. – 303 с.
5. *Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности. – М. : Наука, 1965. – 524 с.
6. *Боровков А. А.* Теория вероятностей : [учеб. пособие для мат. и физ. специальностей вузов]. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1986. – 432 с.

* * *

I. V. Zolotukhin, PhD (Physics and Mathematics), Ass. Prof., Senior Researcher of St.-Petersburg Department of P.P. Shirshov Institute of Oceanology of Russian Academy of Sciences

Some properties of multivariate Marshall-Olkin exponential distribution

The paper deals with the multivariate Marshall-Olkin exponential distribution. Its Laplace transform have been found in the form, revealing the structure of the distribution. It is proved that it is possible to recover the multivariate Marshall-Olkin exponential distribution if you know all the marginal distributions. Also the marginal distributions of Marshall-Olkin distribution can be found if all the distributions of smaller dimension are known.

Keywords: multivariate exponential distribution, Laplace transform

Получено: 28.04.14

УДК: 62-503.51

Л. Ф. Илалетдинов, аспирант;
Е. В. Ветчанин, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель
Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ИНЕРЦИОИДНОГО РОБОТА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается расчет сил и моментов сил сопротивления при поступательном и вращательном движении робота при ламинарных режимах в вязкой жидкости, а также его присоединенных масс. Расчет производится с помощью лицензионных прикладных программ FlowVision и OpenFOAM. В результате численного моделирования получены зависимости сил сопротивления и моментов от критерия Рейнольдса для последующего построения модели управления.

Ключевые слова: инерциоид, управление, вязкая жидкость, присоединенные массы

Мобильные роботы, перемещающиеся в жидкости, способны решать ряд практических задач в области геологоразведки, медицины, экологии, охраны. В качестве движителя большинство плавающих роботов используют вращающийся винт, колеблющийся плавник, изменение формы тела.

Однако в ряде случаев необходимы устройства, способные перемещаться бесшумно в изучаемой среде, не нарушая происходящих в ней процессов и не создавая волн. Такими свойствами обладают роботы, движущиеся за счет периодических перемещений внутренних масс, встроенных в их корпусы (инерциоиды), которые конструктивно можно выполнять в виде запаянных герметичных капсул.

В данной статье рассматриваются вопросы, связанные с определением параметров движения инерциоида, изображенного на рис. 1 и 2, в вязкой несжимаемой жидкости: силы сопротивления, моменты сил. Знание данных параметров необходимо для построения алгоритма управления. Сложность управления такими устройствами заключается в отсутствии явной зависимости между законом перемещения внутренних масс и направлением движения тела.

Изображенное на рис. 1 и 2 тело представляет собой шар и два взаимоперпендикулярных диска. При расположении дисков под углом 45° к плоскости движения и вращении инерцоида вокруг изображенной оси возникает винтовая симметрия.