

Но $\delta\varepsilon = \beta \Leftrightarrow \bar{\delta\varepsilon} = \varepsilon - \beta$, так как $\bar{\delta\varepsilon} + \delta\varepsilon = \mathbf{1}\varepsilon = \varepsilon$.

Значит,

$$\sum_{\delta\varepsilon>0} \lambda_{\delta} \psi(\bar{\delta\varepsilon}s) = \sum_{0<\beta\leq\varepsilon} \psi((\varepsilon-\beta)s) \sum_{\varepsilon\delta=\beta} \lambda_{\beta} = \sum_{0<\beta\leq\varepsilon} \lambda_{\beta\oplus\varepsilon} \psi((\varepsilon-\beta)s). \quad (25)$$

Заменой $\beta' = \varepsilon - \beta$ приводим (25) к виду

$$\sum_{\delta\varepsilon>0} \lambda_{\delta} \psi(\bar{\delta\varepsilon}s) = \sum_{0\leq\beta'\leq\varepsilon} \lambda_{\varepsilon\oplus\beta'} \psi(\beta'\varepsilon). \quad (26)$$

Подстановка (23) и (26) в (21) приводит к (8).

Библиографические ссылки

1. *Gumbel, E. J.* Bivariate exponential distributions // J. Am. Stat. Assoc. – 1960. – Vol. 55, No. 292. – Pp. 698-707. URL: <http://www.jstor.org/discover/10.2307/2281591?uid=>

3738936&uid=2134&uid=2&uid=70&uid=4&sid=21103939315397 (дата обращения: 29.04.2014).

2. *Johnson, N. L., Kotz, S.* A vector multivariate hazard rate // J. Multivariate Anal. – March 1975. – Vol. 5, Iss. 1. – Pp. 53–66.

3. *Marshall, A. W., Olkin, I.* A multivariate exponential distribution // J. Am. Stat. Assoc. – 1967. – Vol. 62. – Pp. 30–44.

4. *Галамбов Я.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик / пер. с англ. В. А. Егорова, В. Б. Невзорова ; под ред. В. В. Петрова. – М. : Наука, 1984. – 303 с.

5. *Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности. – М. : Наука, 1965. – 524 с.

6. *Боровков А. А.* Теория вероятностей : [учеб. пособие для мат. и физ. специальностей вузов]. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1986. – 432 с.

I. V. Zolotukhin, PhD (Physics and Mathematics), Ass. Prof., Senior Researcher of St.-Petersburg Department of P.P. Shirshov Institute of Oceanology of Russian Academy of Sciences

Some properties of multivariate Marshall-Olkin exponential distribution

The paper deals with the multivariate Marshall-Olkin exponential distribution. Its Laplace transform have been found in the form, revealing the structure of the distribution. It is proved that it is possible to recover the multivariate Marshall-Olkin exponential distribution if you know all the marginal distributions. Also the marginal distributions of Marshall-Olkin distribution can be found if all the distributions of smaller dimension are known.

Keywords: multivariate exponential distribution, Laplace transform

Получено: 28.04.14

УДК: 62-503.51

Л. Ф. Илалетдинов, аспирант;

Е. В. Ветчанин, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель
Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ИНЕРЦИОИДНОГО РОБОТА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается расчет сил и моментов сил сопротивления при поступательном и вращательном движении робота при ламинарных режимах в вязкой жидкости, а также его присоединенных масс. Расчет производится с помощью лицензионных прикладных программ FlowVision и OpenFOAM. В результате численного моделирования получены зависимости сил сопротивления и моментов от критерия Рейнольдса для последующего построения модели управления.

Ключевые слова: инерциоид, управление, вязкая жидкость, присоединенные массы

Мобильные роботы, перемещающиеся в жидкости, способны решать ряд практических задач в области геологоразведки, медицины, экологии, охраны. В качестве движителя большинство плавающих роботов используют вращающийся винт, колеблющийся плавник, изменение формы тела.

Однако в ряде случаев необходимы устройства, способные перемещаться бесшумно в изучаемой среде, не нарушая происходящих в ней процессов и не создавая волн. Такими свойствами обладают роботы, движущиеся за счет периодических перемещений внутренних масс, встроенных в их корпуса (инерциоиды), которые конструктивно можно выполнять в виде запаянных герметичных капсул.

В данной статье рассматриваются вопросы, связанные с определением параметров движения инерциоида, изображенного на рис. 1 и 2, в вязкой несжимаемой жидкости: силы сопротивления, моменты сил. Знание данных параметров необходимо для построения алгоритма управления. Сложность управления такими устройствами заключается в отсутствии явной зависимости между законом перемещения внутренних масс и направлением движения тела.

Изображенное на рис. 1 и 2 тело представляет собой шар и два взаимоперпендикулярных диска. При расположении дисков под углом 45° к плоскости движения и вращении инерциоида вокруг изображенной оси возникает винтовая симметрия.

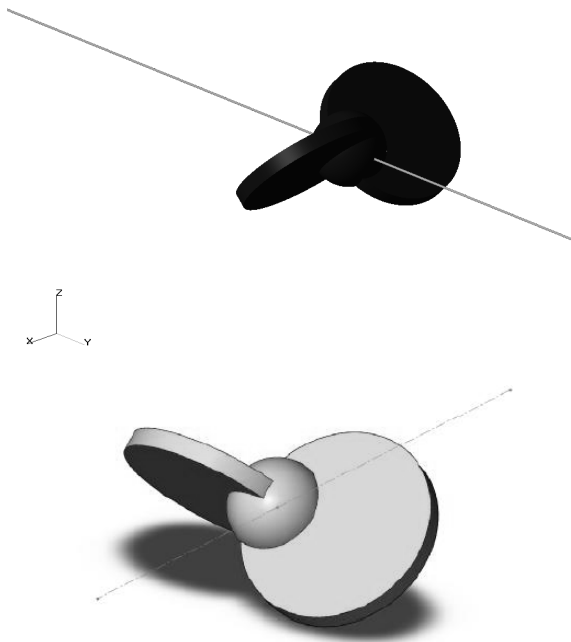


Рис. 1. Двухлопастной корпус инерционного робота

Геометрическая модель выполнена в программе с открытым доступом Salome. Плотность материала в первом приближении принята $\rho = 1\,000\text{ кг/м}^3$. Объем тела $V = 0,0123\text{ м}^3$.

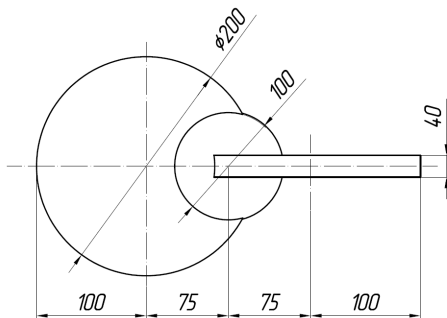


Рис. 2. Конструкция инерционного робота

Тензор инерции рассчитан также в Salome:

$$J = \begin{pmatrix} 0,3884 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1136 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3884 \end{pmatrix}.$$

При исследовании нестационарного взаимодействия твердого тела и жидкости необходимо знание коэффициентов присоединенных масс. Согласно [4] необходимо найти шесть потенциалов уравнения (1), вычислить интегралы (2). Потенциалы определены численно методом конечных объемов с помощью бесплатного программного обеспечения OpenFOAM. Составленная математическая модель протестирована на известных геометрических формах: сфера, трехосный эллипсоид [2].

$$\nabla^2 \phi_i = 0; \quad (1)$$

$$\lambda_{ik} = -\rho \iint \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \phi_k dS. \quad (2)$$

Присоединенные массы робота:

$$A = \begin{pmatrix} 21,821 & 0 & 0 & -2,96 & 0 & 0 \\ 0 & 1,736 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21,821 & 0 & 0 & 2,96 \\ -2,96 & 0 & 0 & 0,55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,199 & 0 \\ 0 & 0 & 2,96 & 0 & 0 & 0,55 \end{pmatrix}.$$

Для построения математической модели и численного решения уравнений гидродинамики применена лицензионная программа FlowVision.

Для определения вязкой силы и моментов решается система уравнений Навье – Стокса и уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = -\frac{1}{\rho} \text{grad}P + \nu \cdot \Delta V; \quad (3)$$

$$\nabla \cdot V = 0, \quad (4)$$

где ρ – плотность, кг/м^3 ; V – скорость, м/с ; t – время, с ; P – давление, Па ; ν – кинематическая вязкость, $\text{м}^2/\text{с}$.

В первом приближении в расчете параметров движения робота рассмотрены ламинарные течения $\text{Re} = 1\,000 \dots 5\,000$. Данное решение обусловлено тем, что скорости инерционных движителей невелики, а включение в расчет моделей турбулентности существенно усложняет задачу.

Серия расчетов была проведена в диапазоне скоростей $0,01 \dots 0,05\text{ м/с}$ при поступательном движении, а также с одновременным вращением с угловыми скоростями $0,02 \dots 0,1\text{ рад/с}$.

По полученным результатам построены следующие зависимости (рис. 4 и 5):

1. $F = f(\text{Re})$;
2. $M = f(\text{Re})$,

где F – сила сопротивления, Н ; M – момент сил, $\text{Н}\cdot\text{м}$.

Зависимость силы тяги от частоты вращения приведена на рис. 3.

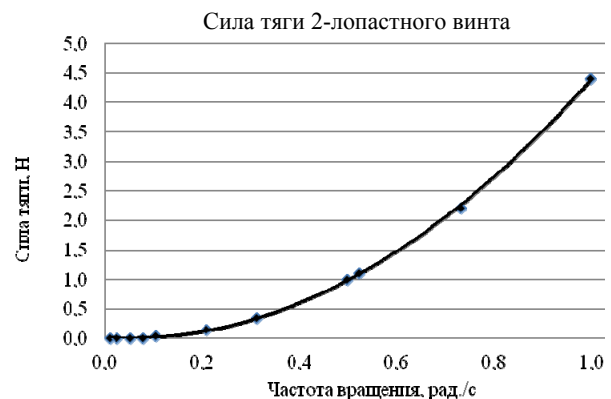


Рис. 3. Зависимость силы тяги 2-лопастного винта от частоты вращения

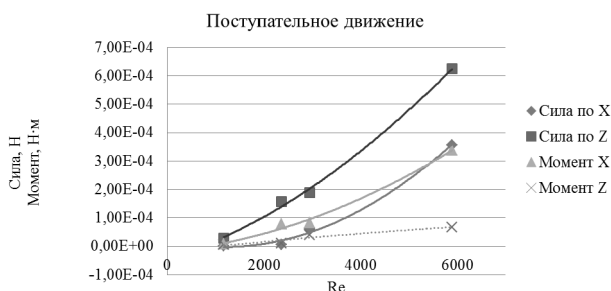
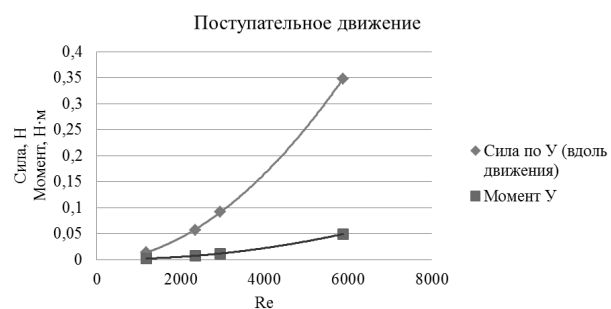


Рис. 4. Зависимость сил и моментов сопротивления от числа Re при поступательном движении

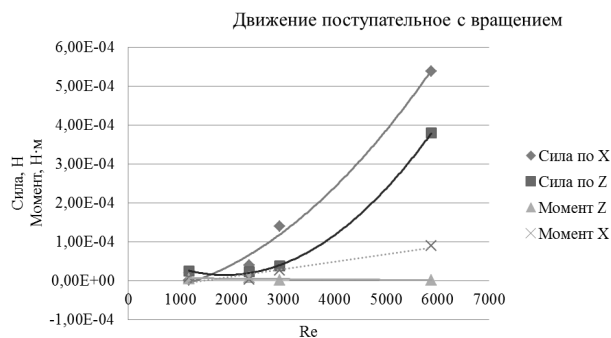
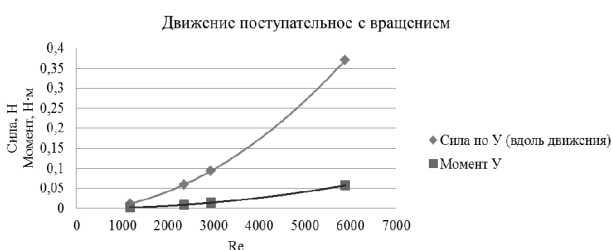


Рис. 5. Зависимость сил и моментов сопротивления от числа Re при поступательном и вращательном движении

Также интерес представляют поля распределения давления по поверхности робота и линии тока, изображенные на рис. 6 и 7.

При движении тела в жидкости возникает сила, состоящая из сопротивления давления и трения:

$$F = \int_S P \cdot \vec{n} \cdot ds + \int_S \mu \frac{\partial V}{\partial n} ds, \text{ Н}, \quad (5)$$

где P – давление, Па; S – площадь поверхности тела, m^2 ; μ – динамическая вязкость, Па·с.

На рис. 5 и 6 видно, что при встречном потоке на поверхности робота спереди образуется избыточное давление. Помимо поступательного движения робот совершает вращение вокруг оси Oy , поэтому проис-

ходит перемешивание жидкости, что прослеживается по линиям тока.

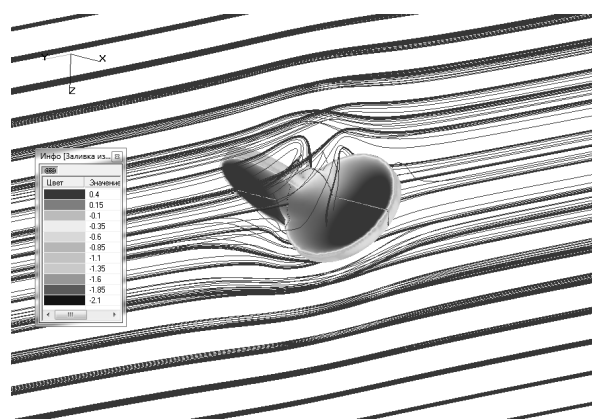


Рис. 6. Распределение давления по поверхности робота и линии тока

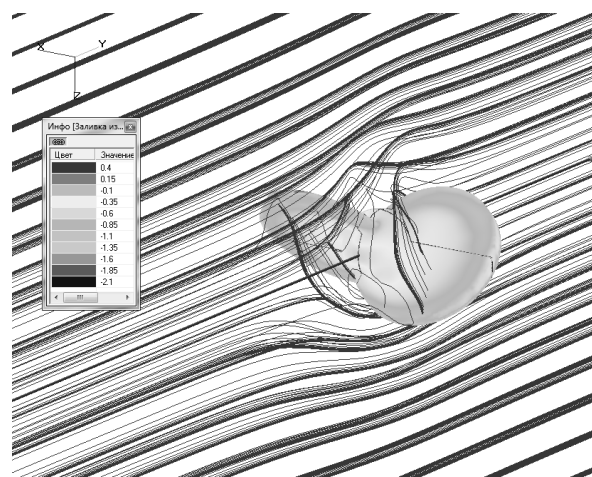


Рис. 7. Распределение давления по поверхности робота и линии тока (вид против Oy)

При $Re > 100$ симметрия обтекания нарушается, позади робота происходит отрыв линий тока, возникает разрежение. При таких скоростях пограничный слой становится очень тонким, а поперечные градиенты скорости в нем большими. Силы вязкости, которые при этом возрастают, тормозят движение частиц среды, движущихся вдоль поверхности тела.

Применение численного моделирования в прикладном программном комплексе позволяет получить необходимые гидродинамические параметры движения в жидкости тела любой формы. Полученные зависимости силы тяги и максимальной скорости от частоты вращения, силы лобового сопротивления от поступательной скорости будут применены для построения модели управления роботом с внутренним перемещением масс.

Библиографические ссылки

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М. : Гостехиздат, 1950. – 676 с. – URL: <http://padabum.com/x.php?id=6215> (дата обращения: 29.04.2014).
2. Короткин А. И. Присоединенные массы судна : справочник. – Л. : Судостроение, 1986. – 312 с.

3. Применение пакетов прикладных программ при изучении курсов механики жидкости и газа : учеб. пособие / Т. В. Кондранин [и др.] – М.: МФТИ, 2005. – 104 с. – URL: <http://window.edu.ru/resource/637/37637/files/CFDinEducation.pdf> (дата обращения: 29.04.2014).

4. Lamb, H. Hydrodynamics. – Cambridge : University Press, 1895. – 604 p. – URL: <https://archive.org/details/hydrodynamics01lambgoog>; <http://babel.hathitrust.org/cgi/>

[pt?id=uc2.ark:/13960/t79s1n22j;view=1up;seq=9](http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=uc2.ark:/13960/t79s1n22j;view=1up;seq=9) (дата обращения: 29.04.2014).

5. Wesseling, P. Principles of computational fluid dynamics. – Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2009. – 657 p. – URL: http://download.springer.com/static/pdf/159/bfm%253A978-3-642-05146-3%252F1.pdf?auth66=1398949662_397651c43475cb4764bd662d31c5db72&ext=.pdf (дата обращения: 29.04.2014).

L. F. Ilaletdinov, Post-graduate, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

E. V. Vetchanin, PhD (Physics and Mathematics), Senior Teacher, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Computation parameters of inertia robots body motion through viscous fluid for control model development

We consider the calculation of the added masses, the forces and the torques corresponding to translational motion and rotational motion through a laminar viscous fluid. The calculation was performed by the licensed programs FlowVision and OpenFOAM. The dependences of the forces and the torques on the Reynolds criterion were obtained as a result of numerical simulation for a control model development.

Keywords: inertia robot, control, viscous fluid, added masses

Получено: 18.04.14

УДК 519.857.6+004.023

А. Г. Кириевская, магистрант;

В. А. Тененев, доктор физико-математических наук, профессор;

Д. С. Шаура, инженер-программист

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

ПЛАНИРОВАНИЕ РАБОТЫ С СУБПОДРЯДНЫМИ ОРГАНИЗАЦИЯМИ МЕТОДАМИ НЕЧЕТКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Сформулирована задача по оптимальному использованию собственной и привлеченной рабочей силы для достижения минимальных потерь в условиях неопределенности. Задача нечеткого программирования решена с применением гибридного генетического алгоритма. Анализируются результаты расчетов.

Ключевые слова: оптимальное планирование, динамическое программирование, генетический алгоритм, нечеткое программирование

Рассматривается следующая задача. Имеется некоторое производственное предприятие, например, строительное. Это предприятие имеет собственный штат работников и планируемые на заданный отрезок времени объемы работ. При нехватке собственных трудовых ресурсов могут привлекаться для выполнения работ сторонние организации (субподрядчики). Планируемые объемы работ могут быть заданы с некоторой долей неопределенности, зависящей от внешней среды и имеющейся информации. Собственные и привлекаемые трудовые ресурсы также имеют элементы неопределенности. Необходимо учесть имеющуюся неопределенность при планировании графика выполнения работ и дать оценку возникающим рискам.

Для полностью детерминированной ситуации известна классическая задача об оптимальном использовании рабочей силы [1]. Она формулируется следующим образом. Известен временной график выполнения заданных объемов работ. При известной производительности труда объемы работ переводятся в количество работников. Таким образом, известно количество требуемой рабочей силы для каждого заданного отрезка времени V_i , $i = \overline{1, n}$. Так как

$V_i \neq \text{const}$, то необходимо определить оптимальную численность работников R_i , $i = \overline{1, n}$, минимизирующую затраты. Вариант $R_i = V_i$ обеспечивает выполнение графика работ, но требует затрат на увольнение и принятие работников. Постоянное количество работников также является затратным, поскольку либо план будет не выполнен, либо часть работников будет работать не в полную силу. Оптимизационная задача определяется целевой функцией

$$f = \sum_{i=1}^n \phi(R_i - R_{i-1}) + \eta(R_i - V_i) \rightarrow \min,$$

где $\phi(\circ)$, $\eta(\circ)$ – положительные функции затрат на принятие-увольнение и на несоответствие количества работников объему выполняемых работ. Задача легко решается методом динамического программирования с применением рекуррентного соотношения

$$F_i(z) = \min_{R_i} [\phi(R_i - z) + \eta(R_i - V_i) + F_{i+1}(z)],$$

где $F_i(z)$ – минимальные затраты от i -го отрезка времени до конечного n , если количество работников за $(i-1)$ отрезок равно z [1].