

УДК 621.391

О. В. Пономарева, кандидат технических наук, доцент
Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

ИЗМЕРЕНИЕ СПЕКТРОВ КОМПЛЕКСНЫХ СИГНАЛОВ НА КОНЕЧНЫХ ИНТЕРВАЛАХ МЕТОДОМ АПЕРИОДИЧЕСКОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Исследована операция дополнения исходного сигнала нулевыми отсчетами. Введено понятие аperiodического дискретного преобразования Фурье. Предложен метод и алгоритм быстрого аperiodического преобразования Фурье комплексных последовательностей.

Ключевые слова: дискретный сигнал, конечный интервал, операция дополнения нулями, базис, дискретные экспоненциальные функции, параметрическое дискретное преобразование Фурье

Введение

В настоящее время трудно назвать область научно-прикладных исследований, где не применяются методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов (ЦОС) [1–6]. При этом среди методов цифровой обработки сигналов важное место занимает измерение спектров (спектральный анализ) в базисе дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) – дискретное преобразование Фурье (ДПФ) [1]. В работах [7–10] введено и исследовано обобщение ДПФ – параметрическое дискретное преобразование Фурье (ДПФ-П) (преобразование Фурье в базисе параметрических дискретных экспоненциальных функций ДЭФ-П), которое может задаваться в обычной форме:

$$S_N(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n}, \quad k = \overline{0, N-1};$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k, \theta) W_N^{-(k+\theta)n}, \quad n = \overline{0, N-1}, \quad 0 \leq \theta < 1 \quad (1)$$

или в матричной форме:

$$S_{N,\theta} = \frac{1}{N} F_{N,\theta} X_N; \quad X_N = F_{N,\theta}^* S_{N,\theta}, \quad (2)$$

где θ – параметр; * – знак комплексного сопряжения; $X_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ – представление дискретного сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, в виде вектора N -мерного линейного пространства; T – знак транспонирования; $S_{N,\theta} = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T$ – вектор коэффициентов разложения X_N по системе параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ-П), задаваемой матрицей $F_{N,\theta}$:

$$F_{N,\theta} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^0 & \dots & W_N^{\theta(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1+\theta)} & \dots & W_N^{(N-1+\theta)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$W_N = \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} \right]. \quad (3)$$

Дискретные функции вида $W_N^{(p+\theta)l} = \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} (p+\theta) l \right]$, $p, l = \overline{0, N-1}$ есть ДЭФ-П – $def_p(p, l, \theta)$. ДЭФ-П равны ДЭФ при значении параметра $\theta = 0$. Матрица $F_{N,\theta}$ состоит соответственно из ДЭФ-П при $p = k, l = n$. Матрица $F_{N,\theta}$ – несимметрическая, в отличие от матрицы ДПФ, но, как и последняя, является унитарной матрицей. Система ДЭФ-П является полной системой, так как число линейно независимых функций равно размерности множества дискретных сигналов. При значении параметра $\theta = 0$, соотношения (1), (2) задают стандартное ДПФ.

Необходимо отметить, что и до введения ДПФ-П исследователи в той или иной мере, исходя из требований практики, при измерении спектров интуитивно использовали свойства параметрических дискретных экспоненциальных функций (как правило, при $\theta = 1/2$). Например, в скользящем ДПФ (СДПФ) для расширения набора центральных частот спектрального анализа коэффициент гребенчатого фильтра меняют с -1 на $+1$, в результате чего нули фильтра располагаются на угловом расстоянии $2\pi(k+1/2)/N$ радиан, где N – число отсчетов входного сигнала, k – номер коэффициента ДПФ [3]. Операция дополнения нулевыми отсчетами (ОДН) исходного сигнала, широко применяемая в ЦОС для интерполяции отсчетов спектра между N значениями ДПФ, как показали исследования [7], также тесно связана с ДПФ-П.

К настоящему времени предложены процедуры быстрого вычисления, как ДПФ [1, 3, 11–13], так и ДПФ-П [14–16], позволяющие значительно сократить число вычислений по сравнению с вычислением ДПФ и ДПФ-П «в лоб». Данные алгоритмы получили соответственно название алгоритмов быстрого преобразования Фурье (алгоритмы БПФ) и алгоритмов быстрого параметрического преобразования Фурье (алгоритмы БПФ-П). Отметим, что ДПФ и быстрые алгоритмы его вычисления «по умолчанию» предполагают, что входная последовательность является комплексной. В большинстве же прикладных задач цифровой обработки сигналов имеют дело с действительными последовательностями. Примене-

ние к действительным последовательностям стандартного комплексного БПФ приводит, с одной стороны, к избыточным вычислительным затратам, с другой – к избыточным затратам памяти. В настоящее время, исходя из требований практики, разработан целый ряд алгоритмов БПФ и БПФ-П для действительных последовательностей, свободных от указанных выше недостатков [14–15].

Особое место в ЦОС занимает операция дополнения исходного сигнала длительностью в N отсчетов N нулями (частный случай ОДН) [17–20]. Приведем только два примера. Для повышения эффективности анализа стационарных случайных функций, подвергшихся линейным преобразованиям, В. С. Пугачев предложил метод канонических разложений. Идея метода заключается в представлении исходного случайного процесса $X(t)$ в виде суммы *элементарных случайных функций*, характерной особенностью которых является разделение случайности (коэффициенты разложения U_i, V_k) и детерминированности (координатные функции $\cos \omega_k t, \sin \omega_k t$):

$$X(t) = m(t) + \sum_{k=1}^m (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t),$$

где U_k, V_k – некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю и дисперсией D_k ; $\omega_k = k\omega_0, \omega_0 = \pi/T$.

Как мы видим, набор частот координатных функций: $\omega_0 = \pi/T; \omega_k = k\omega_0$ в каноническом разложении *не совпадает* с набором частот, предлагаемым рядом Фурье. Следовательно, дискретный вариант канонического разложения дискретных случайных функций предполагает по умолчанию дополнение нулевыми отсчетами исходного сигнала до двойной длительности.

Второй пример – исследование дискретных стационарных случайных сигналов в корреляционной области в рамках так называемого временного подхода. Анализ корреляционных функций позволяет получать полезные описательные статистики и является эффективным инструментом проверки постулируемых теоретических моделей. Появление алгоритмов БПФ привело к тому, что даже при выборе временного подхода преобразования эффективнее проводить в спектральной области с последующим переходом (с помощью обратного БПФ (ОБПФ)) в корреляционную область. Однако оказалось, что мы при этом получаем не оценку аperiodической корреляционной функции, а так называемую циклическую корреляционную функцию. Можно показать, что циклическая корреляционная функция не совпадает с аperiodической корреляционной функцией, а является результатом ее наложения в корреляционной области. Для устранения наложения применяется операция дополнения исходного сигнала в N отсчетов N нулевыми отсчетами, за счет чего уменьшается шаг дискретизации по частоте. Получаемая при этом оценка корреляционной функции также является

циклической, но на интервале $\overline{0, (N-1)}$ она совпадает с оценкой аperiodической корреляционной функции. Во многом именно этим обстоятельством объясняется название *aperiodическое ДПФ (АДПФ)*, которое дал автор для двух совместно осуществляемых ДПФ-П (при значениях параметра: $\theta = 0, \theta = 1/2$) последовательности в N отсчетов, дополненной N нулями. Отметим некоторую «похожесть» базисов ДЭФ-П при значениях параметра: $\theta = 0, \theta = 1/2$ (возможно, отчасти этим и объясняется интуитивное и совместное использование рядом авторов свойств этих базисов на практике). Действительно, в рамках теории дискретных сигналов на конечных интервалах любые линейные преобразования сигналов не должны выводить их за пределы интервала N . При этом сдвиг сигнала определяется как некоторая циклическая перестановка его отсчетов [8]. Например, ДПФ-П при значении параметра $\theta = 0$ «навязывает» периодическое продолжение исходной последовательности, а при $\theta = 1/2$ – «навязывает» ее антипериодическое продолжение [8]. Исходя из многочисленных приложений АДПФ, представляется, что исследование АДПФ как отдельного преобразования является важной и актуальной задачей.

Целью настоящей работы является создание метода измерения Фурье-спектра, сигналов на конечных интервалах с уменьшенным шагом дискретизации по частоте и алгоритма быстрого аperiodического дискретного преобразования Фурье для комплексных сигналов.

Роль и место дискретно-временного преобразования Фурье в задачах измерения спектров сигналов на конечных интервалах

Пусть задан дискретный сигнал $x(n), n = 0, N-1$ (в общем случае $x(n)$ комплексный сигнал) на конечном интервале в $N = 2^h$ отсчетов, h – целое положительное число (наложение требования, чтобы количество точек преобразования было целой степенью 2, связано с высокой эффективностью алгоритмов БПФ и БПФ-П по основанию 2). Рассмотрим взаимосвязь, преимущества и недостатки следующих преобразований исходного сигнала $x(n)$: дискретно-временное преобразование Фурье (ДВПФ), ДПФ-П и ДПФ-сигнала, подвергнутого ОДН.

• ДВПФ сигнала $x(n)$ по определению представляет собой z -преобразование сигнала $x(n)$ на единичной окружности в z -плоскости [1–3]:

$$S(f) = S(z) \Big|_{z=\exp(-j2\pi f)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot n);$$

$$-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}. \quad (4)$$

• Коэффициенты $S_N(k, \theta)$ ДПФ-П-последовательности $x(n)$ согласно соотношению (1) равны значе-

ниям ее z -преобразования в точках $\{2\pi(k + \theta) / N\}$, $k = \overline{0, (N-1)}$, $0 \leq \theta < 1$, равномерно расположенных на единичной окружности.

• Коэффициенты $S_N(k, 0)$ ДПФ-сигнала $x(n)$, дополненного $N(r-1)$, $r = 2^m$, $m = 1, 2, 3, \dots$, согласно соотношению (1) равны значениям ее z -преобразования в точках $\{2\pi k / M\}$, $k = \overline{0, (M-1)}$, $M = 2^{(h+m)}$, равномерно расположенных на единичной окружности.

ДВПФ, которое широко используется в ЦОС для описания многих теоретических понятий, имеет, как непосредственно следует из его определения, бесконечно малый шаг дискретизации по частоте (частота f в (4) изменяется непрерывно). Следовательно, спектр, определяемый ДВПР, задается на множестве точек, мощность которого равна бесконечности. Поэтому измерение такого спектра невозможно методами ЦОС. Однако, методами ЦОС спектр, задаваемый ДВПФ, возможно измерить на некотором множестве точек. При этом число точек, в которых проводятся измерения спектра, может быть достаточно большим. Измерения спектра можно проводить либо выполняя БПФ сигнала $x(n)$, подвергнутого ОДН, либо выполняя БПФ-П непосредственно сигнала $x(n)$, при различных значениях парамет-

ра θ . Измерение спектра в рамках первого подхода, которое широко применяется в настоящее время в ЦОС, является неэффективным методом измерения. Во-первых, $N(r-1)$ ячеек из требуемых $(N \cdot r)$ ячеек памяти оказывается избыточной (в них хранятся нулевые отсчеты), во-вторых, в БПФ выполняется большое число избыточных операций (операции с нулевыми отсчетами). У данного подхода есть и третий недостаток. Дело в том, что в ЦОС для осуществления ДПФ применяется алгоритмы БПФ по некоторому основанию r , что жестко определяет интервал анализа $N = r^m$. Это приводит и к жесткому фиксированию точек измерения спектра. Несложно убедиться в том, что, выбрав значение $N = 2^m$, мы можем измерить спектр только в точках $\{2\pi(k + \delta) / N\}$, $k = \overline{0, (N-1)}$, $\delta = 0, 1/2^m, 2/2^m, \dots, (2^m - 1) / 2^m$. Эффективным методом измерения спектра является именно второй подход, позволяющий поэтапно измерять спектр в точках $\{2\pi(k + \theta) / N\}$, $k = \overline{0, (N-1)}$, при любых значениях параметра θ из интервала $[0, 1)$ с помощью алгоритмов БПФ-П [11]. Рис. 1 иллюстрирует взаимосвязь ДВПФ, ДПФ (ДПФ-П при значении $\theta = 0$) и ДПФ-П при значении $\theta = 1/2$ для комплексной экспоненты.

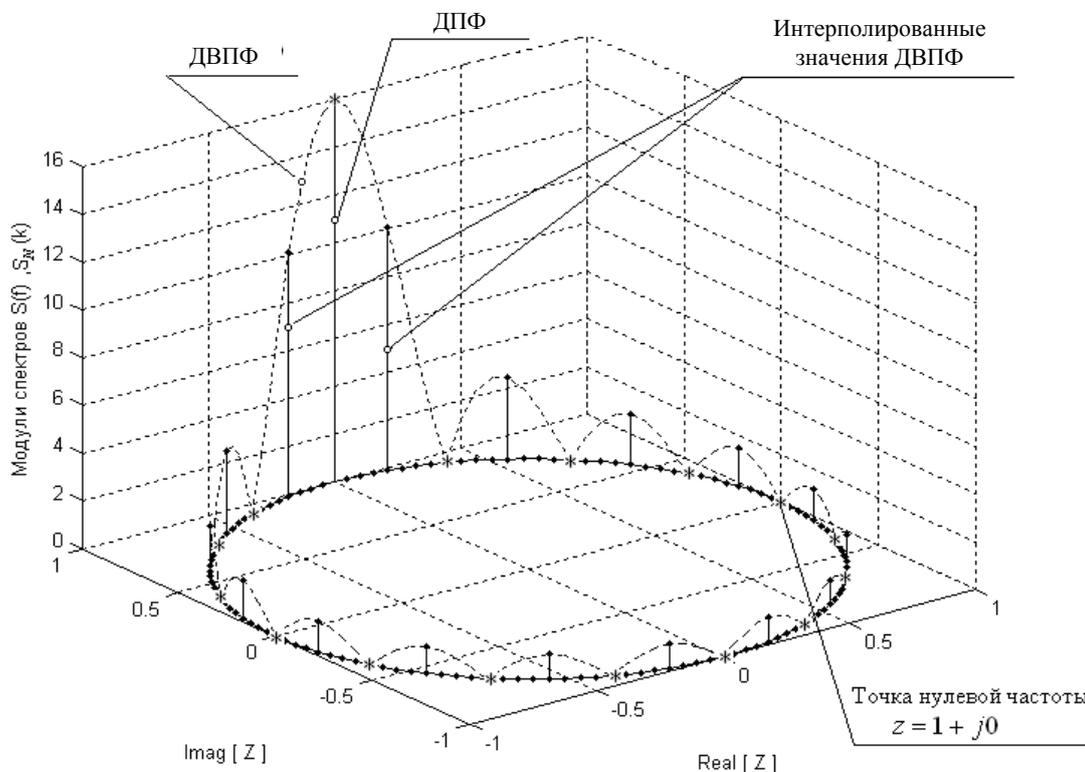


Рис. 1. Сигнал $x(n) = \exp\left(j \frac{2\pi}{N} k \cdot n\right)$, $n = \overline{0, N-1}$, $N = 16$, $k = 4$. ДВПФ сигнала (пунктирная линия), ДПФ сигнала (вертикальные линии со звездочкой *). Интерполированные значения ДВПФ (вертикальные линии с точкой •) при $M = 32$

Измерение спектров комплексных сигналов на конечных интервалах методом аperiodического дискретного преобразования Фурье

Согласно определению (2) ДПФ-П при значении параметра θ равным нулю переходит в ДПФ:

$$S_N = \frac{1}{N} F_N X_N, \quad X_N = F_N^* S_N, \quad (5)$$

где $S_N = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T$ – вектор коэффициентов разложения X_N по системе дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ), задаваемой матрицей F_N :

$$F_N = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (6)$$

$$W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right).$$

В стандартном АДПФ исходный дискретный сигнал $x(n)$, $n = 0, \overline{N-1}$, представленный в виде вектора N -мерного линейного пространства $X_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ дополняется N нулями: $X_M = \left[x(0), x(1), \dots, x(N-1), \underbrace{0, \dots, 0}_N \right]^T$, $M = 2N$. Вычисление ДПФ вектора X_M , согласно (6), равносильно усечению N столбцов матрицы F_N , т. е. превращению ее из квадратной в прямоугольную матрицу размером $M \times N$:

$$F_{M \times N} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ (M-1) \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_M^{(M-1)} & \dots & W_M^{(M-1)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (7)$$

$$W_M = \exp(-j2\pi/M).$$

Проанализируем структуру матрицы $F_{M \times N}$. Обозначим множество номеров строк матрицы $F_{M \times N}$ через $E_1: E_1 = \{0, 1, 2, \dots, (M-1)\}$. Применим к множеству E_1 отношение сравнимости по модулю 2. В силу того, что это отношение является отношением эквивалентности, т. е. обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности, оно разбивает множество E на 2 класса вычетов по модулю 2:

$$E_{1,0} = \{0, 2, \dots, M-2\},$$

$$E_{1,1} = \{1, 3, \dots, M-1\}$$

$$E_{1,i} \neq \emptyset; \quad E_{1,i} \cap E_{1,j} = \emptyset; \quad \bigcup_{i=0}^1 E_{1,i} = E_1, \quad i, j = \overline{0, 1}. \quad (8)$$

Используя полученное разбиение и представив матрицу $F_{M \times N}$ в виде двух квадратных матриц, размерность каждой из которых N , а номера элементов строк являются классами вычетов по модулю 2, мы приходим к двум ДПФ-П при значениях параметра $\theta = 0$ (матрица преобразования (6)) и значении параметра $\theta = 1/2$ с матрицей преобразования вида:

$$F_{N,1/2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ (N-1) \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^{\frac{1}{2}} & \dots & W_N^{\frac{1}{2}(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{\left(\frac{N-1}{2}\right)} & \dots & W_N^{\left(\frac{N-1}{2}\right)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (9)$$

Обозначим множество номеров строк матриц F_N и $F_{N,1/2}$ соответственно через

$$E_2 = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}; \quad E_3 = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}.$$

Применив к множеству номеров строк E_2 и E_3 отношение сравнимости по модулю 2, получим два подмножества классов вычетов по модулю 2, мощность каждого из которых равна двум. Используя полученное разбиение, переупорядочим множество строк матриц F_N и $F_{N,1/2}$ и представим их соответственно в виде следующих блочных матриц:

$$A_{\text{бл}} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}; \quad B_{\text{бл}} = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где $A_{i,j}$, $i, j = 1, 2$ – матрицы размером $N/2 \times N/2$, номера строк которых являются классами вычетов по модулю 2.

Анализ структуры матриц (10) показал, что матрицы $A_{i,1}$, $B_{i,1}$, $i = 1, 2$, образующие первые столбцы блочных матриц $A_{\text{бл}}$, $B_{\text{бл}}$, являются матрицами БПФ-П при следующих значениях параметра θ : $A_{1,1}$, $\theta = 0$; $A_{2,1}$, $\theta = 1/2$; $B_{1,1}$, $\theta = 1/4$; $B_{2,1}$, $\theta = 3/4$. А матрицы $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $j = 1, 2$, образующие строки блочных матриц $A_{\text{бл}}$, $B_{\text{бл}}$, могут быть получены как кронекеровские произведения матрицы $A_{i,1}$, $B_{i,1}$, $i = 1, 2$ на строки матриц

$$C_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Следовательно, блочные матрицы (10) преобразуются к виду

$$A_{\text{бл}} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,1} \\ A_{2,1} & -A_{2,1} \end{bmatrix}; \quad B_{\text{бл}} = \begin{bmatrix} B_{1,1} & j \cdot B_{1,1} \\ B_{2,1} & -j \cdot B_{2,1} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Структура матриц $A_{\text{бл}}$ и $B_{\text{бл}}$ дает возможность, сформировав из исходной последовательности $x(n)$, $n = 0, N-1$, четыре последовательности

$$\begin{aligned} x_{1,A}(n) &= x(n) + x(n + N/2); \\ x_{2,A}(n) &= x(n) - x(n + N/2); \quad n = \overline{0, N/2-1}; \\ x_{1,B}(n) &= x(n) + jx(n + N/2); \\ x_{2,B}(n) &= x(n) - jx(n + N/2) \quad n = \overline{0, N/2-1}, \end{aligned}$$

получить АДПФ, осуществляя преобразования не с помощью двух матриц $A_{\text{бл}}$, $B_{\text{бл}}$, размерность каждой из которых равна N , а с помощью четырех матриц $A_{1,2}$, $A_{2,1}$, $B_{1,2}$, $B_{2,1}$, размерность каждой из которых равна $N/2$. Если размерность матрицы $A_{1,1}$ более четырех, то процесс ее блочного представления и формирование последовательностей можно продолжить, используя соотношение (12) до тех пор, пока размер проверяемой матрицы не станет равным четырем. На данном этапе итерационного процесса выполняются четыре двухточечных ДПФ-П при значениях параметра $\theta = 0, 1/2, 1/4, 3/4$ двухточечных последовательностей. На рис. 2 иллюстрируются этапы формирования матриц преобразования АДПФ для $N = 8$.

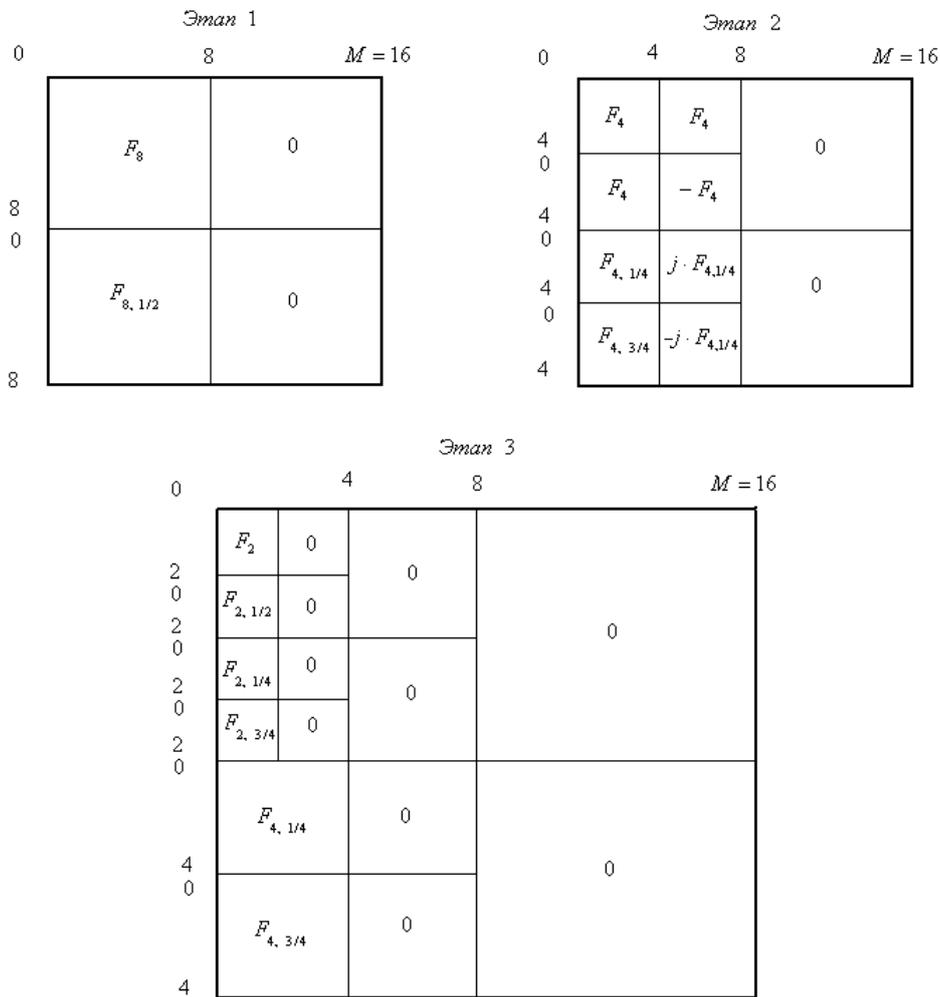


Рис. 2. Этапы формирования матриц преобразования АДПФ для $N = 8$

Рассмотрев математическое обоснование алгоритма быстрого измерения спектра комплексного сигнала методом аperiodического параметрического дискретного преобразования Фурье, дадим его формализованное описание.

Пусть задан дискретный комплексный сигнал $x(n)$ на конечном интервале в $N = 2^h$ отсчетов:

$$x(n), \quad n = \overline{0, N-1}, \quad N = 2^h, \quad h = 1, 2, 3 \dots$$

1. Формируем две комплексные последовательности:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= x(n) + j \cdot x(n + N/2); \\ x_2(n) &= x(n) - j \cdot x(n + N/2); \quad n = \overline{0, N/2-1}. \end{aligned}$$

Выполняем ДПФ-П-последовательности $x_1(n)$ при $\theta = 1/4$ и ДПФ-П-последовательности $x_2(n)$ при $\theta = 3/4$. Полученные N отсчетов спектра заносим в соответствующие ячейки памяти.

Формируем две комплексные последовательности:

$$x_{1,1}(n) = x(n) + x(n + N/2); \quad x_{1,2}(n) = x(n) - x(n + N/2);$$

$$n = \overline{0, N/2 - 1}.$$

2. Из комплексной $x_{1,2}(n)$ формируем две комплексные последовательности:

$$x_{1,2,2}(n) \text{ и } x_{1,2,1}(n) :$$

$$x_{1,2,1}(n) = x_{1,1}(n) + j \cdot x_{1,1}(n + N/4);$$

$$x_{1,2,2}(n) = x_{1,1}(n) - j \cdot x_{1,1}(n + N/4); \quad n = \overline{0, N/4 - 1}.$$

3. Выполняем ДПФ-П последовательности $x_{1,2,1}(n)$ при $\theta = 1/4$ и ДПФ-П последовательности $x_{1,2,2}(n)$ при $\theta = 3/4$. Полученные $N/2$ отсчетов спектра заносим в соответствующие ячейки памяти.

4. Если размерность массива $x_{1,1}(n)$ больше четырех, то из комплексной последовательности $x_{1,1}(n)$ формируем две комплексные последовательности $x_{1,1,1}(n)$ и $x_{1,1,2}(n)$:

$$x_{1,1,1}(n) = x_{1,1}(n) + x_{1,1}(n + N/4);$$

$$x_{1,1,2}(n) = x_{1,1}(n) - x_{1,1}(n + N/4); \quad n = \overline{0, N/4 - 1}.$$

5. Если размерность массива $x_{1,1,1}(n)$ больше четырех, то из комплексной последовательности $x_{1,1,1}(n)$ формируем две комплексные последовательности $x_{1,1,1,1}(n)$ и $x_{1,1,1,2}(n)$:

$$x_{1,1,1,1}(n) = x_{1,1,1}(n) + j \cdot x_{1,1,1}(n + N/8);$$

$$x_{1,1,1,2}(n) = x_{1,1,1}(n) - j \cdot x_{1,1,1}(n + N/8); \quad n = \overline{0, N/8 - 1}.$$

6. Выполняем ДПФ-П последовательности $x_{1,1,1,1}(n)$ при $\theta = 1/4$ и ДПФ-П последовательности $x_{1,1,1,2}(n)$ при $\theta = 3/4$. Полученные $N/4$ отсчетов спектра заносим в соответствующие ячейки памяти.

7. Выполняем итерационно этапы 4–6 до тех пор, пока размерность проверяемого массива на этапе 4 не будет равна четырем. К этому времени будет получено $N/2 - 4$ отсчета. Оставшиеся четыре отсчета получают вычислением двух двухточечных ДПФ-П при значениях параметра $\theta = 0$ и $\theta = 1/2$.

Алгоритм быстрого вычисления аperiodического ДПФ комплексной последовательности может быть представлен в виде направленного графа, приведенного для числа отсчетов $N = 16$ на рис. 3. На рис. 4 приведены базовые операции предлагаемого алгоритма.

Оценим эффективность предлагаемого алгоритма быстрого вычисления АДПФ.

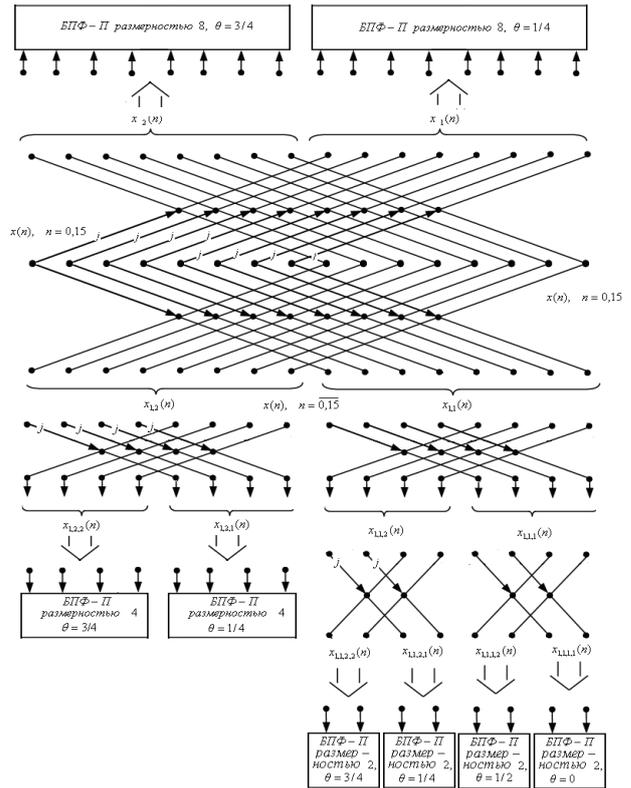


Рис. 3. Граф алгоритма быстрого вычисления аperiodического ДПФ-П комплексной последовательности $x(n), n = \overline{0, 15}$

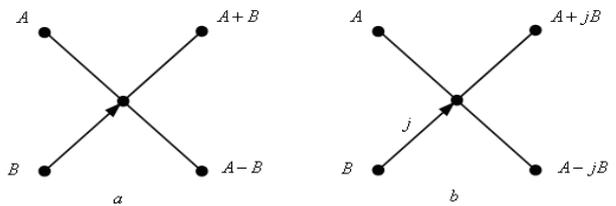


Рис. 4. a, b – базовые операции алгоритма быстрого вычисления аperiodического ДПФ комплексной последовательности

В качестве критерия эффективности выберем относительную экономию вычислений (в процентах) при применении сравниваемых алгоритмов:

$$\gamma(N) = \frac{\text{число операций в алгоритме } A - \text{число операций в алгоритме } B}{\text{число операций в алгоритме } A} \cdot 100, \quad (13)$$

где алгоритмы A – базовый алгоритм; B – предлагаемый алгоритм.

Сделаем одно замечание. Под числом операций в формуле (13) в зависимости от применяемых (для реализации алгоритма) аппаратных решений, могут пониматься как только выполняемые умножения, так и сумма выполняемых умножений и сложений. Последний случай имеет место в случае применения высокоскоростных специализированных умножителей, которые позволяют операцию умножения выполнять практически за то же время, что и сложения [2].

В работе [3] показано, что N -точечное комплексное БПФ-П по основанию 2 (как и стандартное БПФ) требует выполнения $(N/2)\log_2 N$ базовых операций, получивших хорошо известное название «бабочка». Каждая базовая операция требует одного комплексного умножения и двух комплексных сложений. Так как комплексное умножение состоит из четырех действительных умножений и двух действительных сложений, а комплексное сложение – из четырех действительных сложений, то выполнение одной «бабочки» БПФ-П потребует выполнения четырех действительных умножений и шести действительных сложений.

Таким образом, вычислительные затраты на выполнение стандартного N -точечного комплексного АБПФ-П по основанию 2 равны $4N \log_2 2N$ действительных умножений и $6N \log_2 2N$ сложений и затраты памяти $2N$. Если обозначить алгоритм стандартного АБПФ как алгоритм А, а предлагаемый алгоритм – как алгоритм В, то при расчете относительной экономии по числу умножений и при расчете относительной экономии по числу умножений и сложений формула (13) принимает соответственно вид:

$$\gamma_{\text{умн}}(2^h) = \left[1 - \frac{h + 3 + 2^{(2-h)} - \sum_{m=1}^{h-2} 2^{(-m)} \left(h - m - \frac{3}{4} \right)}{2(h+1)} \right] 100. \quad (14)$$

$$\gamma_{\text{умн+слож}}(2^h) = \left[\frac{3,5 \cdot h + 3,9 - 2^{(2-h)} - \sum_{m=1}^{h-2} 2^{-m} \left(h - m - 3/4 \right) - 1,6 \sum_{k=2}^{h-1} 2^{-k}}{4(h+1)} \right] 100. \quad (15)$$

На рис. 5 показана (в соответствии с соотношениями (14) и (15)) относительная экономия вычислений в предложенном алгоритме АБПФ в сравнении со стандартным АБПФ.

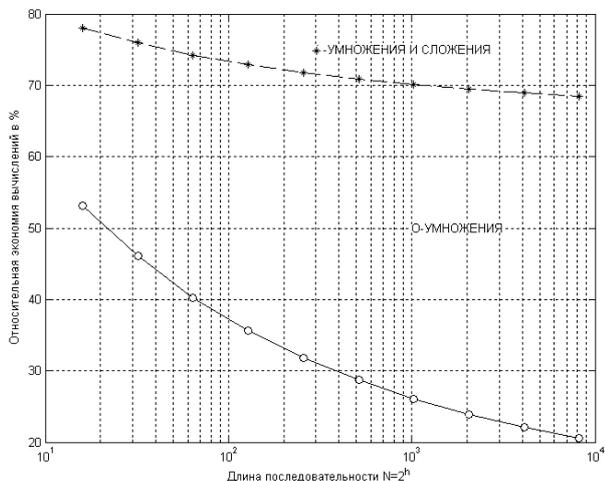


Рис. 5. Относительная экономия вычислений в разработанном алгоритме АБПФ в сравнении со стандартным АБПФ

Отметим, что разработанный алгоритм АБПФ для комплексных сигналов позволяет сократить необходимый объем памяти по сравнению со стандартным аperiodическим БПФ в два раза.

Заключение

Проведенные исследования аperiodического дискретного преобразования Фурье как отдельного преобразования позволили разработать метод и алгоритм измерения Фурье-спектра комплексных сигналов, который обладает рядом преимуществ по сравнению со стандартным подходом, когда сигнал подвергается операции дополнения нулями. Во-первых, предложенный быстрый алгоритм устраняет избыточность в числе операций и в объеме памяти, присущую стандартным методам. Во-вторых, разработанные быстрые алгоритмы аperiodического преобразования Фурье обладают большим быстродействием, чем существующие алгоритмы аperiodического преобразования Фурье. И, наконец, в-третьих, разработанный метод измерения Фурье-спектра сигналов на конечных интервалах с уменьшенным шагом дискретизации по частоте и алгоритм быстрого аperiodического дискретного преобразования Фурье позволяют распараллелить процесс измерения Фурье-спектра, как комплексных, так и действительных сигналов.

Библиографические ссылки

1. Обобщение алгоритмов Герцеля и скользящего параметрического дискретного преобразования Фурье / В. А. Пономарев, О. В. Пономарева, А. В. Пономарев и др. // Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 1. – С. 3–11.
2. Пономарев В. А., Пономарева О. В., Пономарев А. В. Метод эффективного измерения скользящего параметрического спектра Фурье // Автометрия. – 2014. – Т.50. – № 2. – С. 31–38.
3. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Инвариантность текущего энергетического Фурье-спектра действительных дискретных сигналов на конечных интервалах // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2014. – № 1. – С. 15–22.
4. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Виброакустическое диагностирование коробок передач станков цифровыми методами // Станки и инструмент. – 1983. – № 9. – С. 18–21.
5. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Обобщение дискретного преобразования Фурье для интерполяции во временной области // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. – 1983. – Т. 26. – № 9. – С. 67–68.
6. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Временные окна при оценке энергетических спектров методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Автометрия. – 1983. – № 4. – С. 39–45.
7. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач интерполяции и свертки функций // Радиотехника и электроника. – 1984. – Т. 29. – № 8. – С. 1561–1570.
8. Пономарева О. В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базе параметрических экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов. – 2010. – № 2. – С. 7–11.
9. Пономарева О. В. Вероятностные свойства спектральных оценок, полученных методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуал. системы в пр-ве. – 2010. – № 2. – С. 36–41.

10. Алексеев В. А., Пономарев В. А., Пономарева О. В. Методология определения погрешностей измерения вероятностных характеристик случайных процессов, реализуемых процессорными измерительными средствами // Интеллектуал. системы в пр-ве. – 2010. – № 2. – С. 91–99.
11. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. – 2011. – № 1. – С. 2–6.
12. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Скользящее параметрическое ДПФ в задачах обнаружения тональных компонент // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 4. – С. 2–7.
13. Пономарева О. В., Пономарева Н. В. Модификация фильтра на основе частотной выборки для решения задач цифровой обработки случайных процессов со скрытыми периодичностями // Интеллектуал. системы в пр-ве. – 2012. – № 2. – С. 122–129.
14. Пономарева О. В. Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 2. – С. 2–5.
15. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2013. – № 2. – С. 10–15.
16. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарев В. А. Обобщение алгоритма Герцеля для решения задач выявления скрытых периодичностей // Интеллектуал. системы в пр-ве. – 2013. – № 1. – С. 41–46.
17. Пономарева О. В., Алексеев В. А., Пономарев А. В. Цифровой периодограммализ и проблемы его практического применения // Вестн. Ижев. гос. техн. ун-та. – 2013. – № 2. – С. 130–133.
18. Пономарева О. В., Пономарева Н. В. Повышение точности и расширение функциональных возможностей цифровых фильтров на основе частотной выборки // Приборы и методы измерений. – 2013. – № 2. – С. 114–119.
19. Пономарева О. В., Пономарев В. А. Измерение текущего энергетического Фурье-спектра комплексных и действительных сигналов на конечных интервалах // Интеллектуал. системы в пр-ве. – 2013. – № 2. – С. 149–157.
20. Пономарева О. В., Пономарев В. А., Пономарев А. В. Иерархическая морфологическо-информационная модель системы функционального диагностирования объектов на основе цифровой обработки сигналов // Датчики и системы. – 2014. – № 1. – С. 2–8.

* * *

O. V. Ponomareva, PhD in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Measuring the spectrum of complex signals on finite intervals by method of aperiodic discrete Fourier transform

The operation of adding the zero references to the initial signal is investigated. The concept of an aperiodic discrete Fourier transform is introduced. The method and algorithm of aperiodic fast Fourier transform for complex sequences is proposed.

Keywords: discrete signal, finite interval, zero padding operation, basis, discrete exponential functions, parametric discrete Fourier transform

Получено: 03.03.14