Достоинства метода иерархического восстановления поверхности по сравнению со стандартным методом восстановления поверхности:

1) резкое увеличение скорости работы комплекса;
2) уменьшение вероятности определения ложных соответствий;
3) существенное уменьшение доли ручного труда оператора (работа оператора ограничивается только созданием грубой модели).

Список литературы

1. *Конушин*, *А*. Реконструкция модели объекта по силуэтам и по согласованию цветов в дискретных представлениях / А. Конушин // Графика и мультимедиа: электрон. журн. – 2003. – № 2. – Режим доступа к журн. : http://cgm.graphicon.ru/issue2/reconstruction_survey

2. *Nishihara*, *H. K*. PRISM: A practical real-time imaging stereo matcher / H. K. Nishihara // Techical Report. – Cambridge, 1984. – 31 p.

3. *Бобир*, *Н. Я*. Фотограмметрия / Н. Я. Бобир, А. Н. Лобанов, Г. Д. Федорук. – М. : Недра, 1974. – 472 с.

4. *Скворцов*, *А. В*. Триангуляция Делоне и ее применение / А. В. Скворцов. – Томск : Томский ун-т, 2002. – 128 с.

УДК 532.5.011

И. Г. Русяк, доктор технических наук, профессор;
М. М. Горохов, кандидат физико-математических наук, доцент;
С. М. Колосов, инженер
Ижевский государственный технический университет

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

В работе рассматривается задача обтекания трехмерного тела потоком несжимаемой жидкости, вязкость которой является функцией пространственных переменных. Рассматриваются тела различной формы. В зависимости от формы тела предлагается использовать различные системы координат и соответствующие конечно-разностные сетки. Технология перехода к новым системам координат основана на преобразованиях Вивьяна–Винокура, сохраняющих дивергентный вид уравнений. Предложены постановки задач и способы построения конечно-разностных сеток.

Рассмотрим классическую задачу обтекания тела потоком жидкости. Подобная задача рассматривалась многими авторами [1–6], чаще всего как задача обтекания сферы [1–4] или осесимметричного тела [5, 6]. Основная трудность решения подобного рода задач заключается в выборе конечно-разностной сетки для построения численного решения. Конечно-разностная сетка должна быть адаптирована, с одной стороны, к форме обтекаемого тела, с другой – к полю течения, возникающего вокруг тела. Если при этом рассматривается взаимодействие внешнего течения и динамического или теплового пограничного слоя вблизи тела, возникающего, например, в связи со вдувом (отсосом) массы с поверхности тела или в связи с горением последнего, то конечно-разностная сетка должна быть адаптирована еще и к форме поверхности тела. От качества таким образом построенной сетки во многом будет зависеть точность численного решения и скорость сходимости разностного оператора к дифференциальному оператору, представляющему собой систему дифференциальных уравнений в частных производных.

При исследовании пространственных течений приходится пользоваться различными системами координат, в том числе и криволинейными. Зачастую такой подход упрощает описание картины течения, при этом от удачного выбора системы координат зависит качество конечно-разностной сетки и простота приемов удовлетворения граничных условий.

Система уравнений, описывающая стационарное течение вязкой теплопроводной жидкости, имеет вид [7]

$$div(\rho \mathbf{V}) = 0,$$

$$Div(\mathbf{I_V}) = Div(\mathbf{P}), \tag{1}$$

где ρ – плотность; $\mathbf{V}$ – вектор скорости с компонентами: $\{v_i\} = (v_1, v_2, v_3)$; $I_V = \{\rho v_i v_j\}$ – тензор плотности потока импульсов жидкости; $\mathbf{P} = -p\,\delta + 2\mu def \mathbf{V}$ – тензор напряжений; p – давление; δ – тензорная единица (символ Кронекера); $\mu = \mu_m + \mu_t$ – эффективная вязкость, определяемая как сумма молекулярной и турбулентной составляющих.

Молекулярная вязкость μ_m в общем случае является функцией температуры, а турбулентная составляющая μ_t является функцией динамических характеристик течения и определяется с использованием различных моделей турбулентной вязкости (см., например, [8]). В любом случае эффективная вязкость является функцией пространственных переменных: $\mu = \mu(x, y, z)$.

Если тело представляет собой параллелепипед, то задачу обтекания такого тела удобнее всего рассматривать в декартовой системе координат (рис. 1).

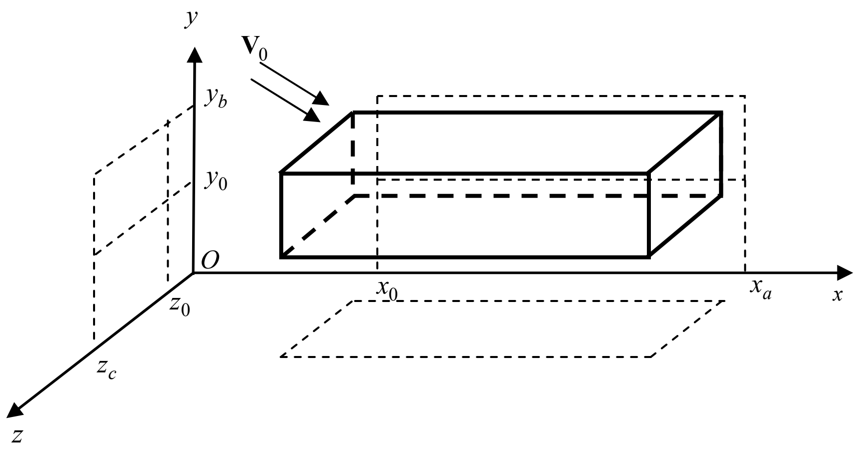


Рис. 1. Декартовая система координат

Уравнения (1) в декартовой системе координат $(v_1, v_2, v_3) = (u, v, w)$ в дивергентной форме имеют вид

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0\,;$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho uu-\mu u_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho uv-\mu u_y}{\partial y}+\frac{\partial \rho uw-\mu u_z}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu_x u_x+\mu_y v_x+\mu_z w_x\,;\\
&\frac{\partial \rho vu-\mu v_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho vv-\mu v_y}{\partial y}+\frac{\partial \rho vw-\mu v_z}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu_x u_y+\mu_y v_y+\mu_z w_y\,;\\
&\frac{\partial \rho wu-\mu w_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho wv-\mu w_y}{\partial y}+\frac{\partial \rho ww-\mu w_z}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu_x u_z+\mu_y v_z+\mu_z w_z\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

Для численного решения задачи в данном случае можно построить прямоугольную конечно-разностную сетку, выполняя при этом необходимые сгущения вблизи поверхности обтекаемого тела (рис. 2).

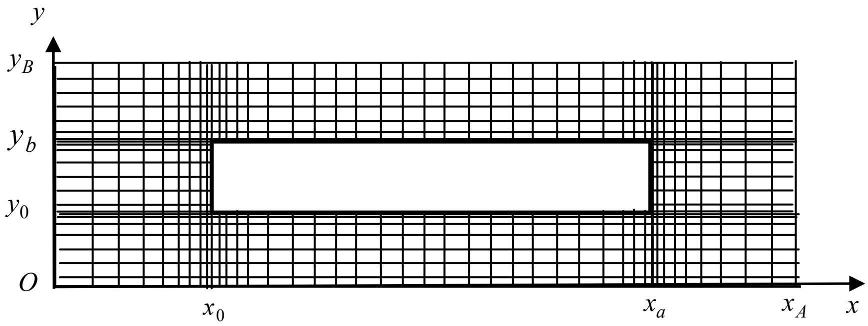


Рис. 2. Конечно-разностная сетка в декартовой системе координат

Прежде чем приступать к формулировке граничных условий, определим понятие входных и выходных границ области расчета. В рассматриваемом случае в качестве области расчета естественно выбрать также параллелепипед большего размера: $0 \le x \le A >> a,\ 0 \le y \le B >> b,\ 0 \le z \le C >> c$. Выходными границами расчетной области будем считать такие поверхности, для которых $(\mathbf{nV}) \le 0$, где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к поверхности. В противном случае границы области расчета являются выходными.

Таким образом, конкретная формулировка граничных условий будет зависеть от направления вектора скорости. В случае, представленном на рис. 1, имеем:

- на поверхности тела:

$x = x_0$, $y_0 \le y \le y_b$, $z_0 \le z \le z_c$:

$$u = -k_s V_0\,,\quad v = 0\,,\quad w = 0\,;$$

$x = x_a$, $y_0 \le y \le y_b$, $z_0 \le z \le z_c$:

$$u = k_s V_0\,,\quad v = 0\,,\quad w = 0\,;$$

$x_0 \le x \le x_a$, $y = y_0$, $z_0 \le z \le z_c$:

$$u = 0 , \quad v = -k_s V_0 , \quad w = 0 ; \tag{3}$$

$x_0 \le x \le x_a$, $y = y_b$, $0 \le z \le z_c$:

$$u = 0 , \quad v = k_s V_0 , \quad w = 0 ;$$

$x_0 \le x \le x_a$, $y_0 \le y \le y_b$, $z = z_0$:

$$u = 0 , \quad v = 0 , \quad w = -k_s V_0 ;$$

$x_0 \le x \le x_a$, $y_0 \le y \le y_b$, $z = z_c$:

$$u = 0 , \quad v = 0 , \quad w = k_s V_0 ,$$

где $k_s > 0 \ (< 0)$ – коэффициент вдува (отсоса) с поверхности тела, в общем случае $k_s = k_s(x, y, z)$;

• на входных границах – $x = 0, 0 \le y \le y_B, 0 \le z \le z_C$;
$0 \le x \le x_A, y = y_B, 0 \le z \le z_C$, $0 \le x \le x_A, 0 \le y \le y_B, z = 0$:

$$u = V_{0x} , \quad v = V_{0y} , \quad w = V_{0z} ;$$

• на выходных границах:
$x = x_A, 0 \le y \le y_B, 0 \le z \le z_C$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 , \quad p = p_0 ;$$

$0 \le x \le x_A, y = 0, 0 \le z \le z_C$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 , \quad p = p_0 ;$$

$0 \le x \le x_A, 0 \le y \le y_B, z = z_C$:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 , \quad p = p_0 .$$

Если обтекаемое тело отличается от прямоугольного параллелепипеда (например, косоугольный параллелепипед), то прямоугольная конечно-разностная сетка становится неэффективной. В данном случае удобно перейти к неортогональным косоугольным координатам, адаптированным к форме обтекаемого тела, поэтому в вычислительном пространстве мы снова будем иметь прямоугольный параллелепипед и прямоугольную конечно-разностную сетку.

В этой связи перейдем в уравнениях (2) к произвольной криволинейной системе координат (ξ, η, ζ), связанной с декартовыми координатами взаимно-однозначным соответствием:

$$x = x(\xi,\eta,\zeta), \quad y = y(\xi,\eta,\zeta), \quad z = z(\xi,\eta,\zeta);$$

$$\xi = \xi(x,y,z), \quad \eta = \eta(x,y,z), \quad \zeta = \zeta(x,y,z).$$

Так что якобиан преобразований

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} = x_\xi\left(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta\right) - x_\eta\left(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi\right) + x_\zeta\left(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi\right) \neq 0 .$$

При переходе к новым координатам в уравнениях гидромеханики крайне важно сохранить их дивергентный вид для потоковых величин, что упрощает численную реализацию конечно-разностных уравнений и повышает суммарную точность конечно-разностной схемы. Технологию перехода к новым координатам, с использованием преобразований Вивьяна–Винокура [9], покажем на примере преобразования уравнения импульсов в проекции на ось x (второе уравнение системы (2)), которое представим в виде

$$\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = q + b_1 + b_2 + b_3 , \tag{4}$$

где

$$e = \rho uu - \mu u_x , \quad f = \rho uv - \mu u_y , \quad g = \rho uw - \mu u_z ,$$

$$q = -p_x , \quad b_1 = \mu_x u_x , \quad b_2 = \mu_y v_x , \quad b_3 = \mu_z w_x .$$

Распишем производные в уравнении (4) в новых координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial x} &= \frac{\partial e}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}; \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial e}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}; \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{\partial g}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}. \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя соотношения (5) в уравнение (4) и умножая его обе части на якобиан преобразования координат, получаем

$$\begin{aligned} &J\frac{\partial e}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + J\frac{\partial e}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + J\frac{\partial e}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + J\frac{\partial e}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + J\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + J\frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \\ &+ J\frac{\partial g}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} + J\frac{\partial g}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} + J\frac{\partial g}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} = Jq + Jb_1 + Jb_2 + Jb_3 . \end{aligned} \tag{6}$$

Уравнение (6) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(Je\frac{\partial\xi}{\partial x}+Jf\frac{\partial\xi}{\partial y}+Jg\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(Je\frac{\partial\eta}{\partial x}+Jf\frac{\partial\eta}{\partial y}+Jg\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(Je\frac{\partial\zeta}{\partial x}+Jf\frac{\partial\zeta}{\partial y}+Jg\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)-$$

$$-\left(e\frac{\partial}{\partial\xi}J\frac{\partial\xi}{\partial x}+f\frac{\partial}{\partial\xi}J\frac{\partial\xi}{\partial y}+g\frac{\partial}{\partial\xi}J\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)-\left(e\frac{\partial}{\partial\eta}J\frac{\partial\eta}{\partial x}+f\frac{\partial}{\partial\eta}J\frac{\partial\eta}{\partial y}+g\frac{\partial}{\partial\eta}J\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)-$$

$$-\left(e\frac{\partial}{\partial\zeta}J\frac{\partial\zeta}{\partial x}+f\frac{\partial}{\partial\zeta}J\frac{\partial\zeta}{\partial y}+g\frac{\partial}{\partial\zeta}J\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)=Jq+Jb_1+Jb_2+Jb_3\,. \tag{7}$$

С учетом выражения для J можно показать, что неконсервативные члены в последнем уравнении взаимно уничтожаются и уравнение (7) принимает вид

$$\frac{\partial E}{\partial\xi}+\frac{\partial F}{\partial\eta}+\frac{\partial G}{\partial\zeta}=Jq+Jb_1+Jb_2+Jb_3\,,$$

где

$$E=Je\frac{\partial\xi}{\partial x}+Jf\frac{\partial\xi}{\partial y}+Jg\frac{\partial\xi}{\partial z},\; F=Je\frac{\partial\eta}{\partial x}+Jf\frac{\partial\eta}{\partial y}+Jg\frac{\partial\eta}{\partial z},\; G=Je\frac{\partial\zeta}{\partial x}+Jf\frac{\partial\zeta}{\partial y}+Jg\frac{\partial\zeta}{\partial z}\,.$$

Применяя указанные выше преобразования ко всем уравнениям системы (2), получаем уравнения вязкого течения в произвольной криволинейной системе координат (ξ,η,ζ):

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\xi}+\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\eta}+\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\zeta}=\mathbf{Q}+\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2+\mathbf{B}_3\,, \tag{8}$$

где

$$\mathbf{E}=J\begin{bmatrix}\rho U\\ \rho Uu-\mu\left(\phi_{11}u_\xi+\phi_{12}u_\eta+\phi_{13}u_\zeta\right)\\ \rho Uv-\mu\left(\phi_{11}v_\xi+\phi_{12}v_\eta+\phi_{13}v_\zeta\right)\\ \rho Uw-\mu\left(\phi_{11}w_\xi+\phi_{12}w_\eta+\phi_{13}w_\zeta\right)\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}=J\begin{bmatrix}\rho V\\ \rho Vu-\mu\left(\phi_{21}u_\xi+\phi_{22}u_\eta+\phi_{23}u_\zeta\right)\\ \rho Vv-\mu\left(\phi_{21}v_\xi+\phi_{22}v_\eta+\phi_{23}v_\zeta\right)\\ \rho Vw-\mu\left(\phi_{21}w_\xi+\phi_{22}w_\eta+\phi_{23}w_\zeta\right)\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}=J\begin{bmatrix}\rho W\\ \rho Wu-\mu\left(\phi_{31}u_\xi+\phi_{32}u_\eta+\phi_{33}u_\zeta\right)\\ \rho Wv-\mu\left(\phi_{31}v_\xi+\phi_{32}v_\eta+\phi_{33}v_\zeta\right)\\ \rho Ww-\mu\left(\phi_{31}w_\xi+\phi_{32}w_\eta+\phi_{33}w_\zeta\right)\end{bmatrix},\quad \mathbf{Q}=-J\begin{bmatrix}0\\ p_\xi\xi_x+p_\eta\eta_x+p_\varsigma\zeta_x\\ p_\xi\xi_y+p_\eta\eta_y+p_\varsigma\zeta_y\\ p_\xi\xi_z+p_\eta\eta_z+p_\varsigma\zeta_z\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1=J\mu_\xi\begin{bmatrix}0\\ a_{11}\xi_x+a_{12}\xi_y+a_{13}\xi_z\\ a_{21}\xi_x+a_{22}\xi_y+a_{23}\xi_z\\ a_{31}\xi_x+a_{32}\xi_y+a_{33}\xi_z\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}_2=J\mu_\eta\begin{bmatrix}0\\ a_{11}\eta_x+a_{12}\eta_y+a_{13}\eta_z\\ a_{21}\eta_x+a_{22}\eta_y+a_{23}\eta_z\\ a_{31}\eta_x+a_{32}\eta_y+a_{33}\eta_z\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_3 = J\mu_\zeta \begin{bmatrix} 0 \\ a_{11}\zeta_x + a_{12}\zeta_y + a_{13}\zeta_z \\ a_{21}\zeta_x + a_{22}\zeta_y + a_{23}\zeta_z \\ a_{31}\zeta_x + a_{32}\zeta_y + a_{33}\zeta_z \end{bmatrix},$$

U, V, W – ковариантные составляющие скорости, определяемые по формулам

$$U = u\,\xi_x + v\,\xi_y + w\,\xi_z\,,$$

$$V = u\,\eta_x + v\,\eta_y + w\,\eta_z\,,$$

$$W = u\,\zeta_x + v\,\zeta_y + w\,\zeta_z\,.$$

Система уравнений (8) содержит компоненты матриц **Φ** и **A**:

$$\begin{pmatrix} \phi_{11}, \phi_{12}, \phi_{13} \\ \phi_{21}, \phi_{22}, \phi_{23} \\ \phi_{31}, \phi_{32}, \phi_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla\xi\nabla\xi, \nabla\xi\nabla\eta, \nabla\xi\nabla\zeta \\ \nabla\eta\nabla\xi, \nabla\eta\nabla\eta, \nabla\eta\nabla\zeta \\ \nabla\zeta\nabla\xi, \nabla\zeta\nabla\eta, \nabla\zeta\nabla\zeta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2, & \xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y + \xi_z\eta_z, & \xi_x\zeta_x + \xi_y\zeta_y + \xi_z\zeta_z \\ \eta_x\xi_x + \eta_y\xi_y + \eta_z\xi_z, & \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2, & \eta_x\zeta_x + \eta_y\zeta_y + \eta_z\zeta_z \\ \zeta_x\xi_x + \zeta_y\xi_y + \zeta_z\xi_z, & \zeta_x\eta_x + \zeta_y\eta_y + \zeta_z\eta_z, & \zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x + u_\zeta\zeta_x, & v_\xi\xi_x + v_\eta\eta_x + v_\zeta\zeta_x, & w_\xi\xi_x + w_\eta\eta_x + w_\zeta\zeta_x \\ u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y + u_\zeta\zeta_y, & v_\xi\xi_y + v_\eta\eta_y + v_\zeta\zeta_y, & w_\xi\xi_y + w_\eta\eta_y + w_\zeta\zeta_y \\ u_\xi\xi_z + u_\eta\eta_z + u_\zeta\zeta_z, & v_\xi\xi_z + v_\eta\eta_z + v_\zeta\zeta_z, & w_\xi\xi_z + w_\eta\eta_z + w_\zeta\zeta_z \end{pmatrix}.$$

В криволинейной ортогональной системе координат система уравнений (8) существенно упрощается, поскольку недиагональные члены матрицы **Φ** принимают нулевые значения.

Построив конечно-разностную сетку в пространстве (ξ, η, ζ), можно определить искомые функции $u(\xi, \eta, \zeta)$, $v(\xi, \eta, \zeta)$, $w(\xi, \eta, \zeta)$, $p(\xi, \eta, \zeta)$. После получения решения основная трудность состоит в отображении результатов, поскольку функции u, v, w – суть проекции скорости на оси декартовой (исходной) системы координат – рассчитываются на поверхностях уровня (преобразованной) криволинейной системы координат: $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$, $\zeta = \text{const}$. Это обстоятельство необходимо учитывать при построении векторного поля скорости $\mathbf{V}(x, y, z)$ и скалярного поля давления $p(x, y, z)$ в исходной декартовой системе координат.

Другой путь постановки и решения поставленной выше задачи состоит в применении дифференциальных операторов поля. Отличие данного подхода от предыдущего состоит в том, что уравнения неразрывности и движения здесь расписываются сразу относительно проекций вектора скорости на оси криволинейной системы координат.

В криволинейной ортогональной системе координат (q_1, q_2, q_3): $q_i = q_i(x, y, z)$, $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$, $z = z(q_1, q_2, q_3)$ (рис. 3) – операторы, входящие в систему уравнений (1), расписываются следующим образом [10]:

$$div\mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial\left(a_{q_1} H_2 H_3\right)}{\partial q_1} + \frac{\partial\left(a_{q_2} H_3 H_1\right)}{\partial q_2} + \frac{\partial\left(a_{q_3} H_1 H_2\right)}{\partial q_3}\right]; \tag{9}$$

$$\left(def\mathbf{a}\right)_{q_i q_j} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{H_i}\dfrac{\partial a_{q_j}}{\partial q_i} + \dfrac{1}{H_j}\dfrac{\partial a_{q_i}}{\partial q_j} - \dfrac{a_{q_i}}{H_i H_j}\dfrac{\partial H_j}{\partial q_i}\right), i \neq j, \\ \dfrac{1}{H_j}\dfrac{\partial a_{q_j}}{\partial q_j} - \dfrac{a_{q_j}}{H_j^2}\dfrac{\partial H_j}{\partial q_i} + \dfrac{a_{q_1}}{H_1 H_j}\dfrac{\partial H_j}{\partial q_1} + \dfrac{a_{q_2}}{H_2 H_j}\dfrac{\partial H_j}{\partial q_2} + \dfrac{a_{q_3}}{H_3 H_j}\dfrac{\partial H_j}{\partial q_3}, i = j; \end{cases} \tag{10}$$

$$\left(Div\mathbf{T}\right)_{q_1} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial\left(H_2 H_3 T_{q_1 q_1}\right)}{\partial q_1} + \frac{\partial\left(H_3 H_1 T_{q_2 q_1}\right)}{\partial q_2} + \frac{\partial\left(H_1 H_2 T_{q_3 q_1}\right)}{\partial q_3}\right] +$$
$$+ \frac{T_{q_1 q_2}}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{T_{q_1 q_3}}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{T_{q_2 q_2}}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{T_{q_3 q_3}}{H_1 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1},$$
$$\left(Div\mathbf{T}\right)_{q_2} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial\left(H_2 H_3 T_{q_1 q_2}\right)}{\partial q_1} + \frac{\partial\left(H_3 H_1 T_{q_2 q_2}\right)}{\partial q_2} + \frac{\partial\left(H_1 H_2 T_{q_3 q_2}\right)}{\partial q_3}\right] +$$
$$+ \frac{T_{q_2 q_1}}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{T_{q_2 q_3}}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3} - \frac{T_{q_1 q_1}}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{T_{q_3 q_3}}{H_2 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}, \tag{11}$$
$$\left(Div\mathbf{T}\right)_{q_3} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial\left(H_2 H_3 T_{q_1 q_3}\right)}{\partial q_1} + \frac{\partial\left(H_3 H_1 T_{q_2 q_3}\right)}{\partial q_2} + \frac{\partial\left(H_1 H_2 T_{q_3 q_3}\right)}{\partial q_3}\right] +$$
$$+ \frac{T_{q_3 q_1}}{H_1 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{T_{q_3 q_2}}{H_2 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} - \frac{T_{q_1 q_1}}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{T_{q_2 q_2}}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3},$$

где $H_i = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$ – коэффициенты Ляме.

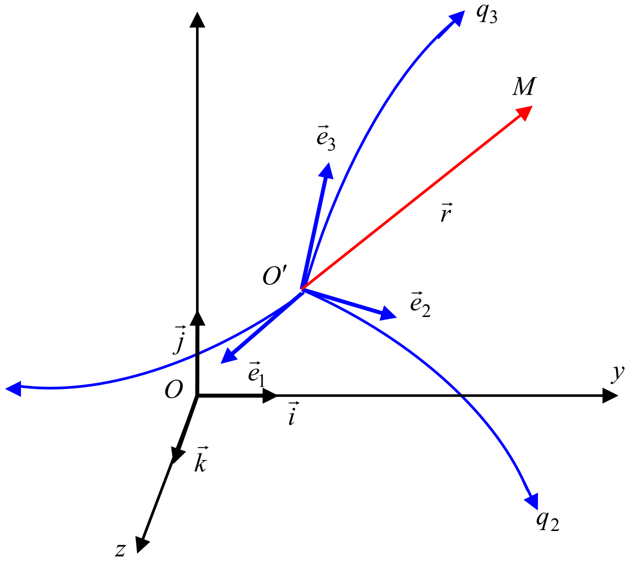


Рис. 3. Криволинейная система координат

Задачу обтекания трехмерного тела с криволинейными образующими удобнее всего рассматривать в цилиндрической либо сферической системах координат.

Вначале рассмотрим цилиндрическую систему координат (x, r, ε) (рис. 4).

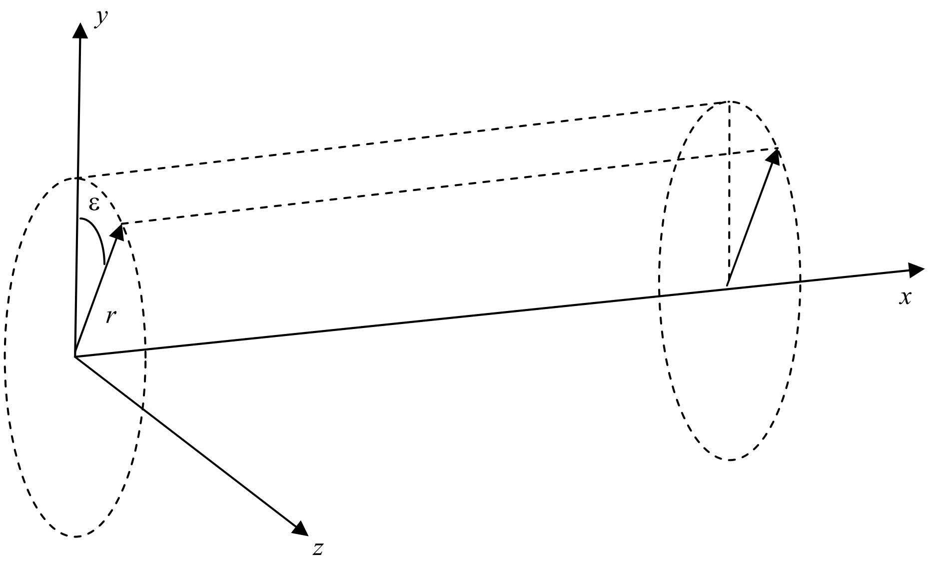


Рис. 4. Цилиндрическая система координат

Проекции вектора скорости на координатные оси $(q_1, q_2, q_3) = (x, r, \varepsilon)$ будем обозначать (u, v, w) соответственно. Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат принимают следующие значения: $H_1 = 1$, $H_2 = 1$, $H_3 = r$, поскольку

$$x = x,\ \ y = r\cos\varepsilon,\ \ z = r\sin\varepsilon$$

и обратно:

$$x = x,\ \ r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ \varepsilon = \mathrm{arctg}\frac{z}{y}.$$

Используя формулы (9)–(11), систему уравнений (1) в цилиндрической системе координат запишем в виде

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varepsilon} = \mathbf{q} + \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \tag{12}$$

где

$$\mathbf{e} = r\begin{bmatrix} \rho u \\ \rho uu - \mu u_x \\ \rho uv - \mu v_x \\ \rho uw - \mu w_x \end{bmatrix},\ \ \mathbf{f} = r\begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu - \mu u_r \\ \rho vv - \mu v_r \\ \rho vw - \mu w_r \end{bmatrix},\ \ \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho wu - \mu/r\, u_\varepsilon \\ \rho wv - \mu/r\, v_\varepsilon \\ \rho ww - \mu/r\, w_\varepsilon \end{bmatrix},\ \ \mathbf{q} = -r\begin{bmatrix} 0 \\ p_x \\ p_r \\ p_\varepsilon/r \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ r\mu_x u_x + r\mu_r v_x + \mu_\varepsilon w_x \\ r\mu_x u_r + r\mu_r v_r + \mu_\varepsilon w_r - \mu_\varepsilon/r \cdot w \\ \mu_x u_\varepsilon + \mu_r v_\varepsilon + \mu_\varepsilon/r \cdot w_\varepsilon + 2\mu_\varepsilon/r \cdot v - \mu_r w \end{bmatrix},\ \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\mu/r \cdot w_\varepsilon \\ 2\mu/r \cdot v_\varepsilon \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu/r \cdot v + \rho w^2 \\ -\mu/r \cdot w - \rho vw \end{bmatrix}.$$

Чтобы иметь возможность провести преобразование формы обтекаемого тела, ось x направим таким образом, чтобы она проходила через левый x_0 и правый x_l полюсы тела (рис. 5), при этом в промежутке между ними целиком располагаясь внутри тела. В таком случае вектор скорости набегающего потока $\mathbf{V}_0$ будет направлен уже не вдоль оси x, а будет иметь, в общем случае, три составляющие: V_{0x}, V_{0y}, V_{0z}. Очевидно, такой поворот осей не является единственным. Дальнейшие преобразования формы тела будут зависеть от того, сможем ли мы найти полюсы, при которых ось x полностью находится внутри тела.

Допустим, необходимые полюсы найдены (рис. 6), и в построенной системе координат мы располагаем уравнением поверхности обтекаемого тела: $R = R(x, \varepsilon)$. В плоскости r, ε введем усредненный радиус $\overline{R}(x)$ по формуле

$$\overline{R}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R(x,\varepsilon)d\varepsilon . \tag{13}$$

В дальнейшем цепочка преобразований системы уравнений к новым координатам будет выглядеть следующим образом (рис. 6):

$$(x, r, \varepsilon) \overset{\overline{J}}{\Rightarrow} (\overline{x}, \overline{r}, \overline{\varepsilon}) \overset{J}{\Rightarrow} (\xi, \eta, \widetilde{\varepsilon}), \tag{14}$$

где $\overline{x} = x$, $\overline{\varepsilon} = \varepsilon$, $\overline{r} = \dfrac{r}{R(x,\varepsilon)}\overline{R}(x)$, или $r = \overline{r}\sigma(\overline{x}, \overline{\varepsilon})$, где $\sigma(x,\varepsilon) = \dfrac{R(x,\varepsilon)}{\overline{R}(x)}$, а (ξ, η) – естественная ортогональная система координат в плоскости $\widetilde{\varepsilon} = \overline{\varepsilon} = \text{const}$ [11].

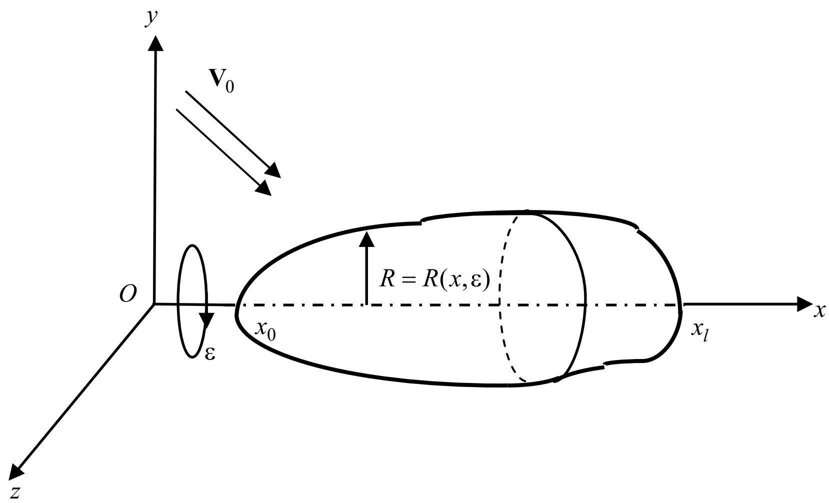


Рис. 5. Обтекание трехмерного тела

Якобианы преобразования координат имеют вид

$$\overline{J} = \frac{D(x, r, \varepsilon)}{D(\overline{x}, \overline{r}, \overline{\varepsilon})} = \begin{vmatrix} x_{\overline{x}} & x_{\overline{r}} & x_{\overline{\varepsilon}} \\ r_{\overline{x}} & r_{\overline{r}} & r_{\overline{\varepsilon}} \\ \varepsilon_{\overline{x}} & \varepsilon_{\overline{r}} & \varepsilon_{\overline{\varepsilon}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{r}\sigma_{\overline{x}} & \sigma & \overline{r}\sigma_{\overline{\varepsilon}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sigma(\overline{x}, \overline{\varepsilon}) = \sigma(x, \varepsilon);$$

$$J = \frac{D(\overline{x}, \overline{r}, \overline{\varepsilon})}{D(\xi, \eta, \widetilde{\varepsilon})} = \begin{vmatrix} \overline{x}_\xi & \overline{x}_\eta & \overline{x}_{\widetilde{\varepsilon}} \\ \overline{r}_\xi & \overline{r}_\eta & \overline{r}_{\widetilde{\varepsilon}} \\ \overline{\varepsilon}_\xi & \overline{\varepsilon}_\eta & \overline{\varepsilon}_{\widetilde{\varepsilon}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{x}_\xi & \overline{x}_\eta & 0 \\ \overline{r}_\xi & \overline{r}_\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overline{x}_\xi \overline{r}_\eta - \overline{x}_\eta \overline{r}_\xi .$$

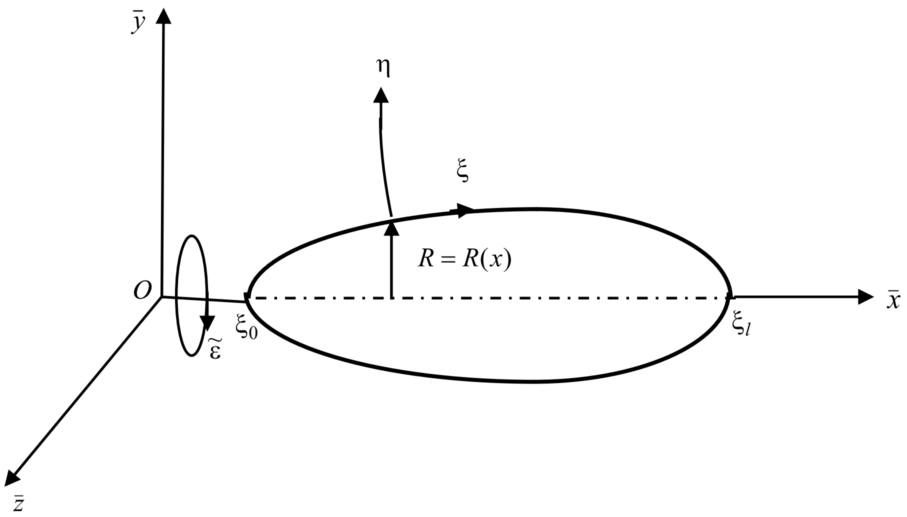


Рис. 6. Преобразование цилиндрических координат

Следуя [9], проведем преобразования координат в системе уравнений (12) по схеме (14). В итоге после первого этапа преобразований получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{e}}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial \bar{\varepsilon}} = \bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2 + \bar{\mathbf{b}}_3\,, \tag{15}$$

где

$$\bar{\mathbf{e}} = \bar{J}\bar{r}\sigma \begin{bmatrix} \rho\bar{u} \\ \rho\bar{u}u - \mu\left(\bar{\phi}_{11}u_{\bar{x}} + \bar{\phi}_{12}u_{\bar{r}} + \bar{\phi}_{13}u_{\bar{\varepsilon}}\right) \\ \rho\bar{u}v - \mu\left(\phi_{11}v_{\bar{x}} + \phi_{12}v_{\bar{r}} + \phi_{13}v_{\bar{\varepsilon}}\right) \\ \rho\bar{u}w - \mu\left(\bar{\phi}_{11}w_{\bar{x}} + \bar{\phi}_{12}w_{\bar{r}} + \bar{\phi}_{13}w_{\bar{\varepsilon}}\right) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{f}} = \bar{J}\bar{r}\sigma \begin{bmatrix} \rho\bar{v} \\ \rho\bar{v}u - \mu\left(\bar{\phi}_{21}u_{\bar{x}} + \bar{\phi}_{22}u_{\bar{r}} + \bar{\phi}_{23}u_{\bar{\varepsilon}}\right) \\ \rho\bar{v}v - \mu\left(\bar{\phi}_{21}v_{\bar{x}} + \bar{\phi}_{22}v_{\bar{r}} + \bar{\phi}_{23}v_{\bar{\varepsilon}}\right) \\ \rho\bar{v}w - \mu\left(\bar{\phi}_{21}w_{\bar{x}} + \bar{\phi}_{22}w_{\bar{r}} + \bar{\phi}_{23}w_{\bar{\varepsilon}}\right) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{g}} = \bar{J}\bar{r}\sigma \begin{bmatrix} \rho\bar{w} \\ \rho\bar{w}u - \mu\left(\bar{\phi}_{31}u_{\bar{x}} + \bar{\phi}_{32}u_{\bar{r}} + \bar{\phi}_{33}u_{\bar{\varepsilon}}\right) \\ \rho\bar{w}v - \mu\left(\bar{\phi}_{31}u_{\bar{x}} + \bar{\phi}_{32}u_{\bar{r}} + \bar{\phi}_{33}u_{\bar{\varepsilon}}\right) \\ \rho\bar{w}w - \mu\left(\bar{\phi}_{31}u_{\bar{x}} + \bar{\phi}_{32}u_{\bar{r}} + \bar{\phi}_{33}u_{\bar{\varepsilon}}\right) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{q}} = -\bar{J}\bar{r}\sigma \begin{bmatrix} 0 \\ p_{\bar{x}} - \bar{r}\,\sigma_x/\sigma \cdot p_{\bar{r}} \\ 1/\sigma \cdot p_{\bar{r}} \\ -\sigma_\varepsilon/\sigma^2 \cdot p_{\bar{r}} + 1/\bar{r}\sigma \cdot p_{\bar{\varepsilon}} \end{bmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_{11}, \bar{\phi}_{12}, \bar{\phi}_{13} \\ \bar{\phi}_{21}, \bar{\phi}_{22}, \bar{\phi}_{23} \\ \bar{\phi}_{31}, \bar{\phi}_{32}, \bar{\phi}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla\bar{x}\nabla\bar{x}, \nabla\bar{x}\nabla\bar{r}, \nabla\bar{x}\nabla\bar{\varepsilon} \\ \nabla\bar{r}\nabla\bar{x}, \nabla\bar{r}\nabla\bar{r}, \nabla\bar{r}\nabla\bar{\varepsilon} \\ \nabla\bar{\varepsilon}\nabla\bar{x}, \nabla\bar{\varepsilon}\nabla\bar{r}, \nabla\bar{\varepsilon}\nabla\bar{\varepsilon} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1, & -\bar{r}\sigma_x/\sigma, & 0 \\ -\bar{r}\sigma_x/\sigma, & (\bar{r}\sigma_x/\sigma)^2+1/\sigma^2+\left(\sigma_\varepsilon/\sigma^2\right)^2, & -\sigma_\varepsilon/\left(\bar{r}\sigma^3\right) \\ 0, & -\sigma_\varepsilon/\left(\bar{r}\sigma^3\right), & 1/(\bar{r}\sigma)^2 \end{pmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{b}}_1 = \bar{J}\mathbf{b}_1, \quad \bar{\mathbf{b}}_2 = \bar{J}\mathbf{b}_2, \quad \bar{\mathbf{b}}_3 = \bar{J}\mathbf{b}_3 .$$

Здесь $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)$, а $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ – контравариантные составляющие скорости, определяемые по формулам

$$\bar{u} = u\bar{x}_x + v\bar{x}_r + w/r\cdot\bar{x}_\varepsilon = u;$$

$$\bar{v} = u\bar{r}_x + v\bar{r}_r + w/r\cdot\bar{r}_\varepsilon = -u\,\bar{r}\sigma_x/\sigma + v/\sigma - w\sigma_\varepsilon/\sigma^2;$$

$$\bar{w} = u\bar{\varepsilon}_x + v\bar{\varepsilon}_r + w/r\cdot\bar{\varepsilon}_\varepsilon = w/(\bar{r}\sigma).$$

После второго этапа преобразований окончательно приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \mathbf{Q} + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3, \tag{16}$$

где

$$\mathbf{E} = J\bar{J}\bar{r}\sigma\begin{bmatrix} \rho U \\ \rho Uu - \mu\left(\Phi_{11}u_\xi + \Phi_{12}u_\eta + \Phi_{13}u_{\tilde{\varepsilon}}\right) \\ \rho Uv - \mu\left(\Phi_{11}v_\xi + \Phi_{12}v_\eta + \Phi_{13}v_{\tilde{\varepsilon}}\right) \\ \rho Uw - \mu\left(\Phi_{11}w_\xi + \Phi_{12}w_\eta + \Phi_{13}w_{\tilde{\varepsilon}}\right) \end{bmatrix}, \mathbf{F} = J\bar{J}\bar{r}\sigma\begin{bmatrix} \rho V \\ \rho Vu - \mu\left(\Phi_{21}u_\xi + \Phi_{22}u_\eta + \Phi_{23}u_{\tilde{\varepsilon}}\right) \\ \rho Vv - \mu\left(\Phi_{21}v_\xi + \Phi_{22}v_\eta + \Phi_{23}v_{\tilde{\varepsilon}}\right) \\ \rho Vw - \mu\left(\Phi_{21}w_\xi + \Phi_{22}w_\eta + \Phi_{23}w_{\tilde{\varepsilon}}\right) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = J\bar{J}\bar{r}\sigma\begin{bmatrix} \rho W \\ \rho Wu - \mu\left(\Phi_{31}u_\xi + \Phi_{32}u_\eta + \Phi_{33}u_{\tilde{\varepsilon}}\right) \\ \rho Wv - \mu\left(\Phi_{31}u_\xi + \Phi_{32}u_\eta + \Phi_{33}u_{\tilde{\varepsilon}}\right) \\ \rho Ww - \mu\left(\Phi_{31}u_\xi + \Phi_{32}u_\eta + \Phi_{33}u_{\tilde{\varepsilon}}\right) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = -J\bar{J}\bar{r}\sigma\begin{bmatrix} 0 \\ p_\xi\xi_{\bar{x}} + p_\eta\eta_{\bar{x}} - \bar{r}\,\sigma_x/\sigma\cdot\left(p_\xi\xi_{\bar{r}} + p_\eta\eta_{\bar{r}}\right) \\ 1/\sigma\cdot\left(p_\xi\xi_{\bar{r}} + p_\eta\eta_{\bar{r}}\right) \\ -\sigma_\varepsilon/\sigma^2\cdot\left(p_\xi\xi_{\bar{r}} + p_\eta\eta_{\bar{r}}\right) + 1/(\bar{r}\sigma)\cdot p_{\tilde{\varepsilon}} \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} \Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{13} \\ \Phi_{21}, \Phi_{22}, \Phi_{23} \\ \Phi_{31}, \Phi_{32}, \Phi_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{11}\xi_{\bar{x}}^2 + 2\bar{\phi}_{12}\xi_{\bar{x}}\xi_{\bar{r}} + \bar{\phi}_{22}\xi_{\bar{r}}^2, & \bar{\phi}_{11}\xi_{\bar{x}}\eta_{\bar{x}} + \bar{\phi}_{12}\left(\xi_{\bar{r}}\eta_{\bar{x}} + \xi_{\bar{x}}\eta_{\bar{r}}\right) + \bar{\phi}_{22}\xi_{\bar{r}}\eta_{\bar{r}}, & \bar{\phi}_{13}\xi_{\bar{x}} + \bar{\phi}_{23}\xi_{\bar{r}} \\ \bar{\phi}_{11}\xi_{\bar{x}}\eta_{\bar{x}} + \bar{\phi}_{21}\left(\xi_{\bar{r}}\eta_{\bar{x}} + \xi_{\bar{x}}\eta_{\bar{r}}\right) + \bar{\phi}_{22}\xi_{\bar{r}}\eta_{\bar{r}}, & \bar{\phi}_{11}\eta_{\bar{x}}^2 + 2\bar{\phi}_{21}\eta_{\bar{x}}\eta_{\bar{r}} + \bar{\phi}_{22}\eta_{\bar{r}}^2, & \bar{\phi}_{13}\eta_{\bar{x}} + \bar{\phi}_{23}\eta_{\bar{r}} \\ \bar{\phi}_{31}\xi_{\bar{x}} + \bar{\phi}_{32}\xi_{\bar{r}}, & \bar{\phi}_{31}\eta_{\bar{x}} + \bar{\phi}_{32}\eta_{\bar{r}}, & \bar{\phi}_{33} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}_1 = J\overline{\mathbf{b}}_1, \quad \mathbf{B}_2 = J\overline{\mathbf{b}}_2, \quad \mathbf{B}_3 = J\overline{\mathbf{b}}_3 .$$

Здесь U, V, W – контравариантные составляющие скорости, определяемые по формулам

$$U = \overline{u}\xi_{\overline{x}} + \overline{v}\xi_{\overline{r}} + \overline{w}\xi_{\overline{\varepsilon}} = \overline{u}\xi_{\overline{x}} + \overline{v}\xi_{\overline{r}} ;$$

$$V = \overline{u}\eta_{\overline{x}} + \overline{v}\eta_{\overline{r}} + \overline{w}\eta_{\overline{\varepsilon}} = \overline{u}\eta_{\overline{x}} + \overline{v}\eta_{\overline{r}} ;$$

$$W = \overline{u}\tilde{\varepsilon}_{\overline{x}} + \overline{v}\tilde{\varepsilon}_{\overline{r}} + \overline{w}\tilde{\varepsilon}_{\overline{\varepsilon}} = \overline{w} .$$

Область численного интегрирования имеет цилиндрическую форму (рис. 7). Тело вращения размещается внутри области интегрирования таким образом, чтобы оси симметрии области и тела совпадали. Область интегрирования делится секущими плоскостями σ (рис. 7, *а*). На каждой секущей плоскости определяется ориентация координатных осей (рис. 7, *б*).

Граничные условия:

- на поверхности тела (рис. 7, *б*) – $\eta = 0$, $\xi_0 \le \xi \le \xi_L$, $0 \le \tilde{\varepsilon} \le 2\pi$:

$$u = k_s V_0 \cos\alpha , \quad v = k_s V_0 \cos\beta , \quad w = k_s V_0 \cos\gamma , \tag{17}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к поверхности:

$$\cos\alpha = \frac{-R_x}{\sqrt{1 + R_x^2 + (R_\varepsilon / R)^2}} , \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + R_x^2 + (R_\varepsilon / R)^2}} , \quad \cos\gamma = \frac{-R_\varepsilon / R}{\sqrt{1 + R_x^2 + (R_\varepsilon / R)^2}} ;$$

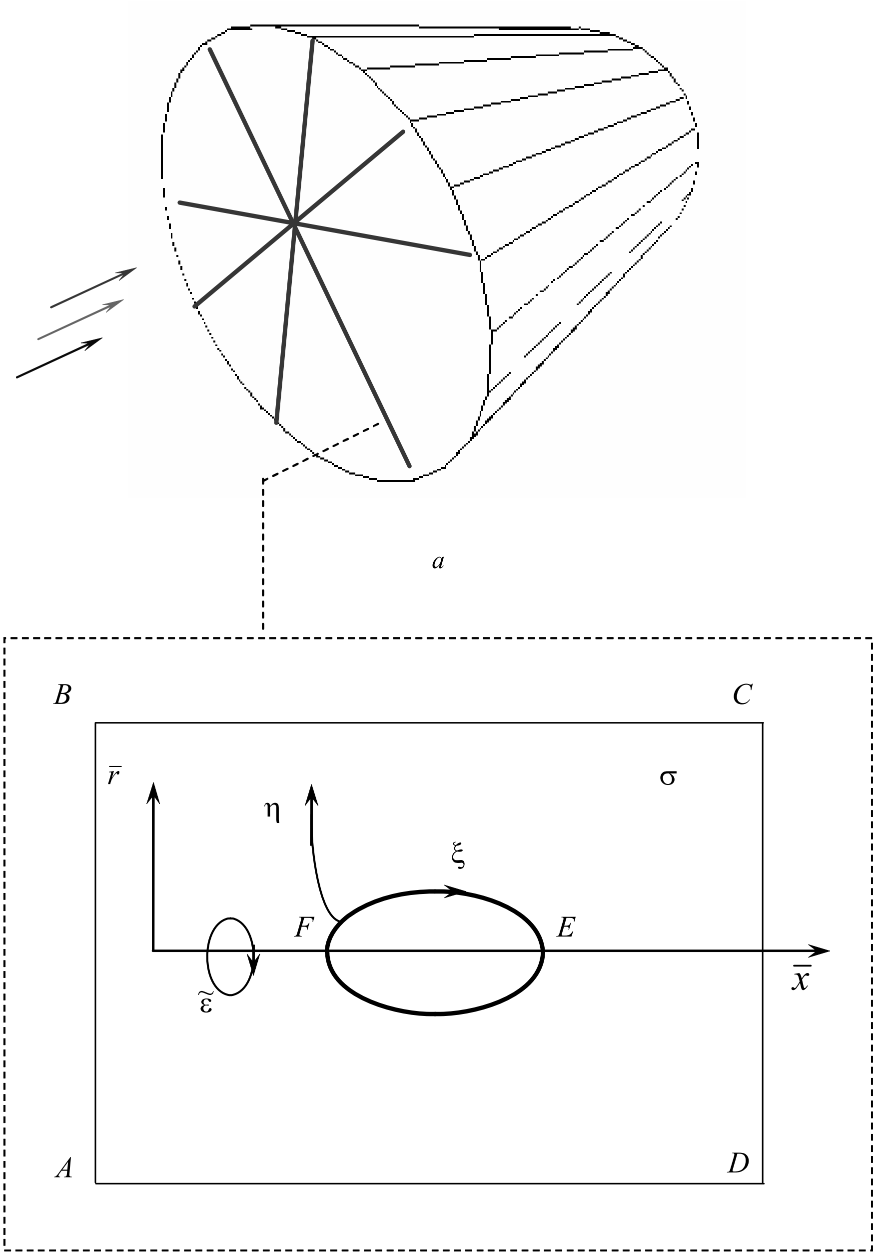
- на входной границе – $\xi = 0$, $0 \le \eta \le B$ или $\eta = B$, $0 \le \xi \le A$, $0 \le \tilde{\varepsilon} \le 2\pi$:

$$u = V_{0x} , \quad v = V_{0y} \sin\tilde{\varepsilon} , \quad w = V_{0z} \cos\tilde{\varepsilon} ;$$

- на выходной границе – $\xi = A$, $0 \le \eta \le B$ или $\eta = B$, $0 \le \xi \le A$, $0 \le \tilde{\varepsilon} \le 2\pi$:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \text{ или } \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 , \quad p = p_0 .$$

Ортогональная в системе координат $(\overline{x}, \overline{r})$ конечно-разностная сетка для такой задачи может быть построена один раз для плоскости $(\overline{x}, \overline{r})_{\overline{\varepsilon}=0}$ или $(\xi, \eta)_{\tilde{\varepsilon}=0}$ по методу, изложенному в [11, 12], и затем растиражирована для других плоскостей $(\overline{x}, \overline{r})_{\overline{\varepsilon}=2\pi j/N}$, где N – количество разбиений области интегрирования (слоев) по координате $\overline{\varepsilon}$; j – номер слоя. На конечном этапе одноименные узлы в каждом из слоев соединяются между собой по окружностям в плоскостях $(\overline{r}, \overline{\varepsilon})_{\overline{x}=\text{const}}$. Таким образом, в системе координат $(\overline{x}, \overline{r}, \overline{\varepsilon})$ мы построим полностью ортогональную сетку (рис. 8).



б

Рис. 7. Область численного интегрирования: *а* – дефрагментация области; *б* – ориентация координатных осей на секущих плоскостях

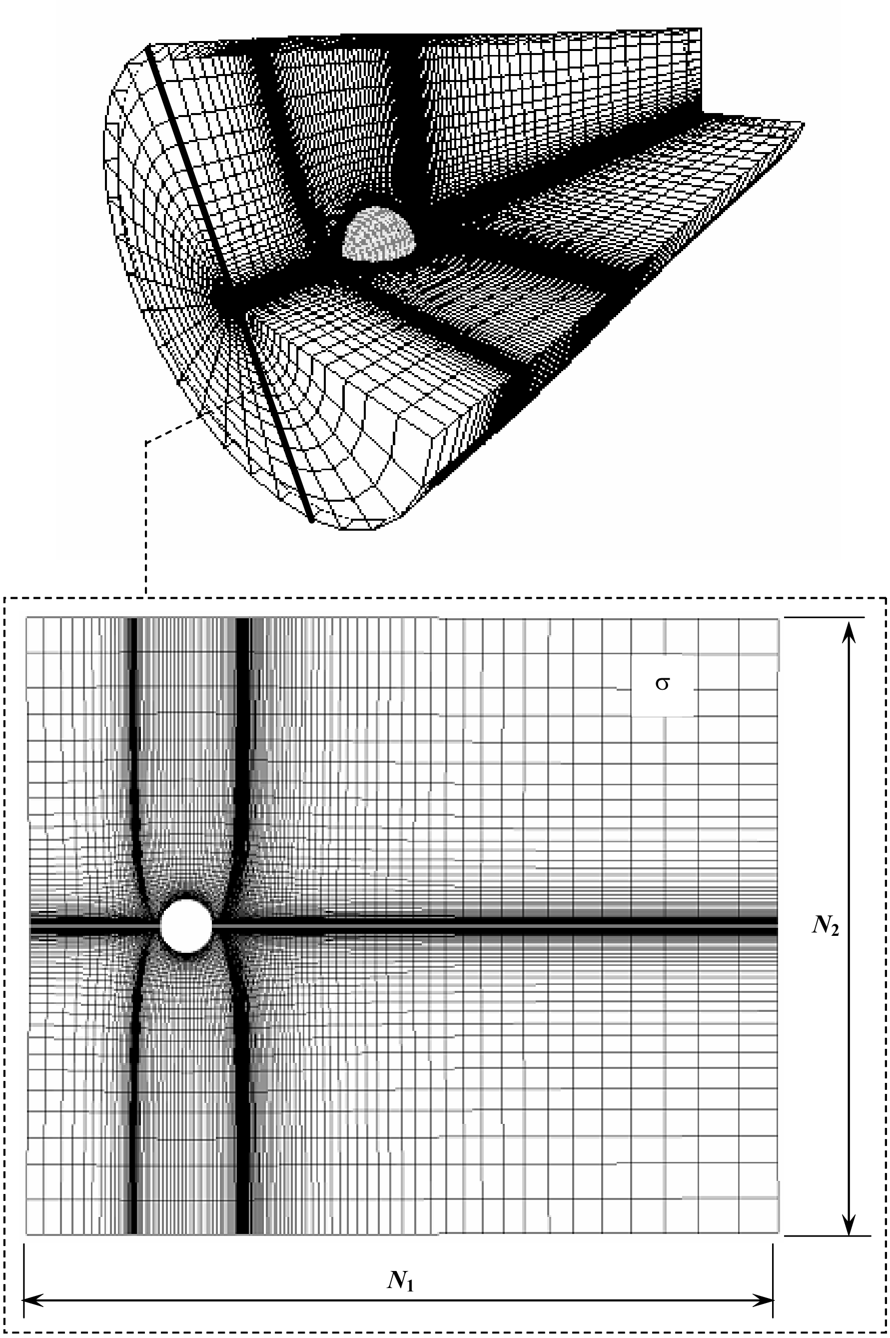


Рис. 8. Размещение конечно-разностных сеток внутри области численного интегрирования

Теперь рассмотрим сферическую систему координат $(\vartheta, \theta, \varphi)$ (рис. 9).

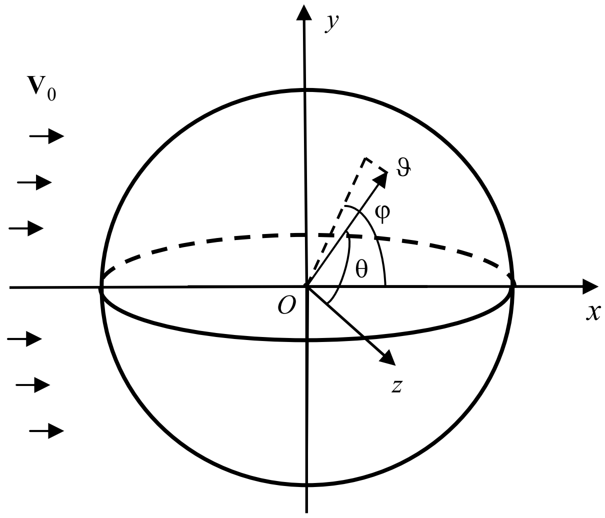


Рис. 9. Сферическая система координат

Проекции вектора скорости на координатные оси $(q_1, q_2, q_3) = (\vartheta, \theta, \varphi)$ будем обозначать (u, v, w) соответственно. Коэффициенты Ляме для сферической системы координат принимают следующие значения: $H_1 = 1$, $H_2 = \vartheta$, $H_3 = \vartheta \sin\theta$, поскольку

$$x = \vartheta \sin\theta \cos\varphi\,, \quad y = \vartheta \sin\theta \sin\varphi\,, \quad z = \vartheta \cos\theta$$

и обратно:

$$\vartheta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, \quad \theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,.$$

Используя формулы (9)–(11), систему уравнений (1) в сферической системе координат запишем в виде

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi} = \mathbf{q} + \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3\,, \tag{18}$$

где

$$\mathbf{e} = \vartheta^2 \sin\theta \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho uu - \mu u_\vartheta \\ \rho uv - \mu v_\vartheta \\ \rho uw - \mu w_\vartheta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \vartheta \sin\theta \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu - \mu/\vartheta\, u_\theta \\ \rho vv - \mu/\vartheta\, v_\theta \\ \rho vw - \mu/\vartheta\, w_\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \vartheta \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho wu - \mu/(\vartheta \sin\theta) u_\varphi \\ \rho wv - \mu/(\vartheta \sin\theta) v_\varphi \\ \rho ww - \mu/(\vartheta \sin\theta) w_\varphi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_1=\begin{bmatrix}0\\ \vartheta^2\sin\theta\cdot\mu_\vartheta u_\vartheta+\vartheta\sin\theta\cdot\mu_\theta v_\vartheta+\vartheta\mu_\varphi w_\vartheta-\sin\theta\cdot\mu_\theta v-\mu_\varphi w\\ \vartheta\sin\theta\cdot\mu_\vartheta u_\theta+\sin\theta\cdot\mu_\theta v_\theta+\mu_\varphi w_\theta-\vartheta\sin\theta\cdot\mu_\vartheta v+2\sin\theta\cdot\mu_\theta u-\mathrm{ctg}\theta\cdot\mu_\varphi w\\ \vartheta\mu_\vartheta u_\varphi+\mu_\theta v_\varphi+1/\sin\theta\cdot\mu_\varphi w_\varphi-\vartheta\sin\theta\cdot\mu_\vartheta w-\cos\theta\cdot\mu_\theta w+2\mu_\varphi u+2\mathrm{ctg}\theta\cdot\mu_\varphi v\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}=-\vartheta\sin\theta\begin{bmatrix}0\\ \vartheta p_\vartheta\\ p_\theta\\ p_\varphi/\sin\theta\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}_2=\begin{bmatrix}0\\ -2\sin\theta\cdot\mu v_\theta-2\mu w_\varphi\\ 2\sin\theta\cdot\mu u_\theta-2\mathrm{ctg}\theta\cdot\mu w_\varphi\\ 2\mu u_\varphi+2\mathrm{ctg}\theta\cdot\mu v_\varphi\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_3=\begin{bmatrix}0\\ -2\sin\theta\cdot\mu u-2\cos\theta\cdot\mu v+\vartheta\sin\theta\cdot\rho v^2+\vartheta\sin\theta\cdot\rho w^2\\ -\mu/\sin\theta\cdot v-\vartheta\sin\theta\cdot\rho uv+\vartheta\cos\theta\cdot\rho w^2\\ -\mu/\sin\theta\cdot w-\vartheta\sin\theta\cdot\rho uw-\vartheta\cos\theta\cdot\rho vw\end{bmatrix}.$$

Поместим центр сферической системы координат в центре тяжести обтекаемого тела (рис. 10). В такой системе координат ограничения на форму тела менее жесткие. Ориентируем оси координат так, чтобы набегающий поток был параллелен плоскости $(\vartheta,\theta)_{\varphi=0}$.

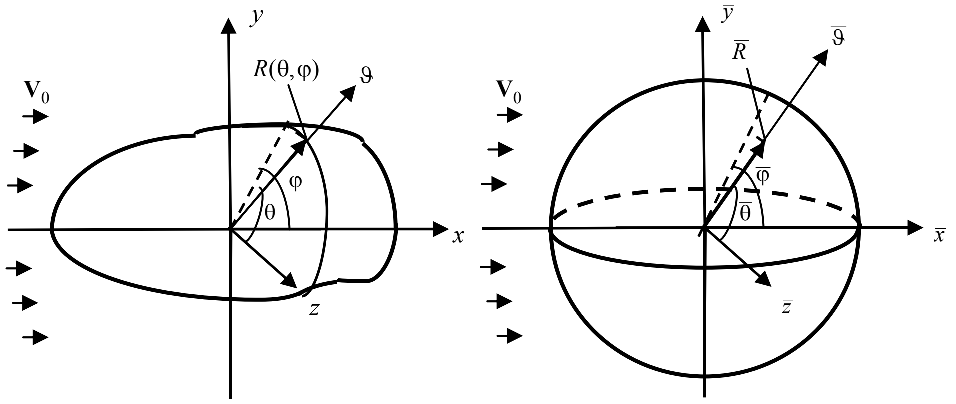


Рис. 10. Преобразование сферических координат

Допустим, что центр тяжести обтекаемого тела найден, и в построенной системе координат мы располагаем уравнением поверхности обтекаемого тела: $R=R(\theta,\varphi)$. Введем усредненный радиус $\overline{R}$ по формуле

$$\overline{R}=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}R(\theta,\varphi)d\varphi\,. \qquad (19)$$

В дальнейшем схема преобразования системы уравнений к новым координатам будет выглядеть следующим образом (рис. 10):

$$(\vartheta,\theta,\varphi)\overset{\bar{J}}{\Rightarrow}(\bar{\vartheta},\bar{\theta},\bar{\varphi}), \tag{20}$$

где $\bar{\vartheta}=\dfrac{\vartheta}{R(\theta,\varphi)}\bar{R}$, или $\vartheta=\bar{\vartheta}\omega(\theta,\varphi)$, где $\omega(\theta,\varphi)=\dfrac{R(\theta,\varphi)}{\bar{R}}$.

Якобиан преобразования координат в данном случае имеет вид

$$\bar{J}=\frac{D(\vartheta,\theta,\varphi)}{D(\bar{\vartheta},\bar{\theta},\bar{\varphi})}=\begin{vmatrix}\vartheta_{\bar{\vartheta}} & \vartheta_{\bar{\theta}} & \vartheta_{\bar{\varphi}}\\ \theta_{\bar{\vartheta}} & \theta_{\bar{\theta}} & \theta_{\bar{\varphi}}\\ \varphi_{\bar{\vartheta}} & \varphi_{\bar{\theta}} & \varphi_{\bar{\varphi}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\omega & \bar{\vartheta}\omega_{\bar{\theta}} & \bar{\vartheta}\omega_{\bar{\varphi}}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\omega(\bar{\theta},\bar{\varphi})=\omega(\theta,\varphi).$$

Проводя преобразования координат в системе уравнений (18) по схеме (20), получаем следующую постановку задачи:

$$\frac{\partial\bar{\mathbf{e}}}{\partial\bar{\vartheta}}+\frac{\partial\bar{\mathbf{f}}}{\partial\bar{\theta}}+\frac{\partial\bar{\mathbf{g}}}{\partial\bar{\varphi}}=\bar{\mathbf{q}}+\bar{\mathbf{b}}_1+\bar{\mathbf{b}}_2+\bar{\mathbf{b}}_3, \tag{21}$$

где

$$\bar{\mathbf{e}}=\bar{J}\bar{\vartheta}^2\omega^2\sin\bar{\theta}\begin{bmatrix}\rho\bar{u}\\ \rho\bar{u}u-\mu\left(\bar{\phi}_{11}u_{\bar{\vartheta}}+\bar{\phi}_{12}u_{\bar{\theta}}+\bar{\phi}_{13}u_{\bar{\varphi}}\right)\\ \rho\bar{u}v-\mu\left(\bar{\phi}_{11}v_{\bar{\vartheta}}+\bar{\phi}_{12}v_{\bar{\theta}}+\bar{\phi}_{13}v_{\bar{\varphi}}\right)\\ \rho\bar{u}w-\mu\left(\bar{\phi}_{11}w_{\bar{\vartheta}}+\bar{\phi}_{12}w_{\bar{\theta}}+\bar{\phi}_{13}w_{\bar{\varphi}}\right)\end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{f}}=\bar{J}\bar{\vartheta}^2\omega^2\sin\bar{\theta}\begin{bmatrix}\rho\bar{v}\\ \rho\bar{v}u-\mu\left(\bar{\phi}_{21}u_{\bar{\vartheta}}+\bar{\phi}_{22}u_{\bar{\theta}}+\bar{\phi}_{23}u_{\bar{\varphi}}\right)\\ \rho\bar{v}v-\mu\left(\bar{\phi}_{21}v_{\bar{\vartheta}}+\bar{\phi}_{22}v_{\bar{\theta}}+\bar{\phi}_{23}v_{\bar{\varphi}}\right)\\ \rho\bar{v}w-\mu\left(\bar{\phi}_{21}w_{\bar{\vartheta}}+\bar{\phi}_{22}w_{\bar{\theta}}+\bar{\phi}_{23}w_{\bar{\varphi}}\right)\end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{g}}=\bar{J}\bar{\vartheta}^2\omega^2\sin\bar{\theta}\begin{bmatrix}\rho\bar{w}\\ \rho\bar{w}u-\mu\left(\bar{\phi}_{31}u_{\bar{\vartheta}}+\bar{\phi}_{32}u_{\bar{\theta}}+\bar{\phi}_{33}u_{\bar{\varphi}}\right)\\ \rho\bar{w}v-\mu\left(\bar{\phi}_{31}v_{\bar{\vartheta}}+\bar{\phi}_{32}v_{\bar{\theta}}+\bar{\phi}_{33}v_{\bar{\varphi}}\right)\\ \rho\bar{w}w-\mu\left(\bar{\phi}_{31}w_{\bar{\vartheta}}+\bar{\phi}_{32}w_{\bar{\theta}}+\bar{\phi}_{33}w_{\bar{\varphi}}\right)\end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{q}}=-\bar{J}\bar{\vartheta}^2\omega^2\sin\bar{\theta}\begin{bmatrix}0\\ 1/\omega\cdot p_{\bar{\vartheta}}\\ -\omega_{\bar{\theta}}/\omega^2\cdot p_{\bar{\vartheta}}+1/(\bar{\vartheta}\omega)\cdot p_{\bar{\theta}}\\ \left(-\bar{\vartheta}\omega_{\bar{\varphi}}/\omega\cdot p_{\bar{\vartheta}}+p_{\bar{\varphi}}\right)/(\bar{\vartheta}\omega\sin\bar{\theta})\end{bmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\phi}_{11}, \overline{\phi}_{12}, \overline{\phi}_{13} \\ \overline{\phi}_{21}, \overline{\phi}_{22}, \overline{\phi}_{23} \\ \overline{\phi}_{31}, \overline{\phi}_{32}, \overline{\phi}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla\overline{\vartheta}\nabla\overline{\vartheta}, \nabla\overline{\vartheta}\nabla\overline{\theta}, \nabla\overline{\vartheta}\nabla\overline{\varphi} \\ \nabla\overline{\theta}\nabla\overline{\vartheta}, \nabla\overline{\theta}\nabla\overline{\theta}, \nabla\overline{\theta}\nabla\overline{\varphi} \\ \nabla\overline{\varphi}\nabla\overline{\vartheta}, \nabla\overline{\varphi}\nabla\overline{\theta}, \nabla\overline{\varphi}\nabla\overline{\varphi} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\omega^2 + \left(\omega_\theta/\omega^2\right)^2 + \left(\omega_\varphi/\left(\omega^2 \sin\overline{\theta}\right)\right)^2, -\omega_\theta/\left(\overline{\vartheta}\omega^3\right), -\omega_\varphi/\left(\overline{\vartheta}\omega^3\sin^2\overline{\theta}\right) \\ -\omega_\theta/\left(\overline{\vartheta}\omega^3\right), \qquad 1/\left(\overline{\vartheta}\omega\right)^2, \qquad 0 \\ -\omega_\varphi/\left(\overline{\vartheta}\omega^3\sin^2\overline{\theta}\right), \qquad 0, \qquad 1/\left(\overline{\vartheta}\omega\sin\overline{\theta}\right)^2 \end{pmatrix};$$

$$\overline{\mathbf{b}}_1 = J\mathbf{b_1}, \quad \overline{\mathbf{b}}_2 = J\mathbf{b_2}, \quad \overline{\mathbf{b}}_3 = J\mathbf{b_3}.$$

Здесь $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}, \frac{1}{\vartheta}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{1}{\vartheta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)$, а $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ – контравариантные составляющие скорости, определяемые по формулам

$$\overline{u} = u\overline{\vartheta}_\vartheta + v/\vartheta \cdot \overline{\vartheta}_\theta + w/(\vartheta\sin\theta)\cdot\overline{\vartheta}_\varphi = u/\omega - v\omega_\theta/\omega^2 - w\omega_\varphi/\left(\omega^2\sin\overline{\theta}\right);$$

$$\overline{v} = u\overline{\theta}_\vartheta + v/\vartheta \cdot \overline{\theta}_\theta + w/(\vartheta\sin\theta)\cdot\overline{\theta}_\varphi = v/\left(\overline{\vartheta}\omega\right);$$

$$\overline{w} = u\overline{\varphi}_\vartheta + v/\vartheta \cdot \overline{\varphi}_\theta + w/(\vartheta\sin\theta)\cdot\overline{\varphi}_\varphi = w/\left(\overline{\vartheta}\omega\sin\overline{\theta}\right).$$

Граничные условия:

- на поверхности тела – $\overline{\vartheta}_s = \overline{R}$ $\left(\vartheta_s = R(\theta,\varphi)\right)$, $0 \le \overline{\theta} \le \pi$, $0 \le \overline{\varphi} \le 2\pi$:

$$u = k_s V_0\cos\alpha,\ v = k_s V_0\cos\beta,\ w = k_s V_0\cos\gamma, \tag{22}$$

где направляющие косинусы нормали к поверхности определяются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + R_\theta^2 + R_\varphi^2}},\quad \cos\beta = \frac{-R_\theta}{\sqrt{R^2 + R_\theta^2 + R_\varphi^2}},\quad \cos\gamma = \frac{-R_\varphi}{\sqrt{R^2 + R_\theta^2 + R_\varphi^2}};$$

- на входной границе – $\overline{\vartheta} = A$, $0 \le \overline{\theta} \le \pi$, $0 \le \overline{\varphi} \le \pi/2$, $3\pi/2 \le \varphi \le 2\pi$:

$$u = -V_0\sin\overline{\theta}\cos\overline{\varphi},\quad v = -V_0\cos\overline{\theta}\cos\overline{\varphi},\ w = V_0\sin\overline{\varphi};$$

- на выходной границе – $\overline{\vartheta} = A$, $0 \le \overline{\theta} \le \pi$, $\pi/2 < \overline{\varphi} < 3\pi/2$:

$$\frac{\partial u}{\partial\overline{\vartheta}} = \frac{\partial v}{\partial\overline{\vartheta}} = \frac{\partial w}{\partial\overline{\vartheta}} = 0,\ p = p_0.$$

Ортогональная в системе координат $\left(\overline{\vartheta}, \overline{\theta}, \overline{\varphi}\right)$ конечно-разностная сетка для такой задачи может быть построена как совокупность пересечений поверхностей уровня: $\overline{\vartheta} = \text{const}, \overline{\theta} = \text{const}, \overline{\varphi} = \text{const}.$ При этом, естественно, вблизи поверхности тела необходимо производить сгущение сетки с целью повышения точности расчета в областях больших градиентов определяемых параметров (рис. 11).

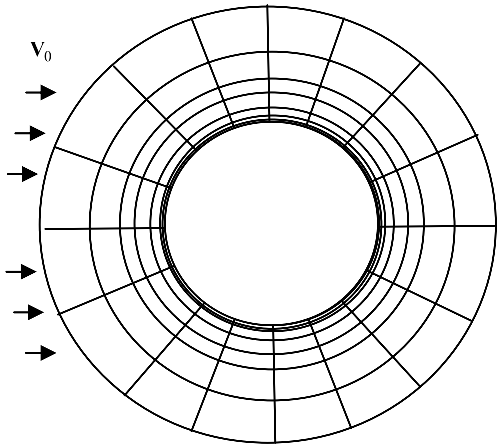


Рис. 11. Ортогональная сетка в сферической системе координат

На рис. 12 даны примеры построения конечно-разностных сеток около тел вращения. На рис. 13–17 представлены результаты расчета полей скорости при обтекании инертной сферы и сферы со вдувом при различных числах Рейнольдса, тел различной конфигурации, а также бесконечного цилиндра при различных числах Рейнольдса.

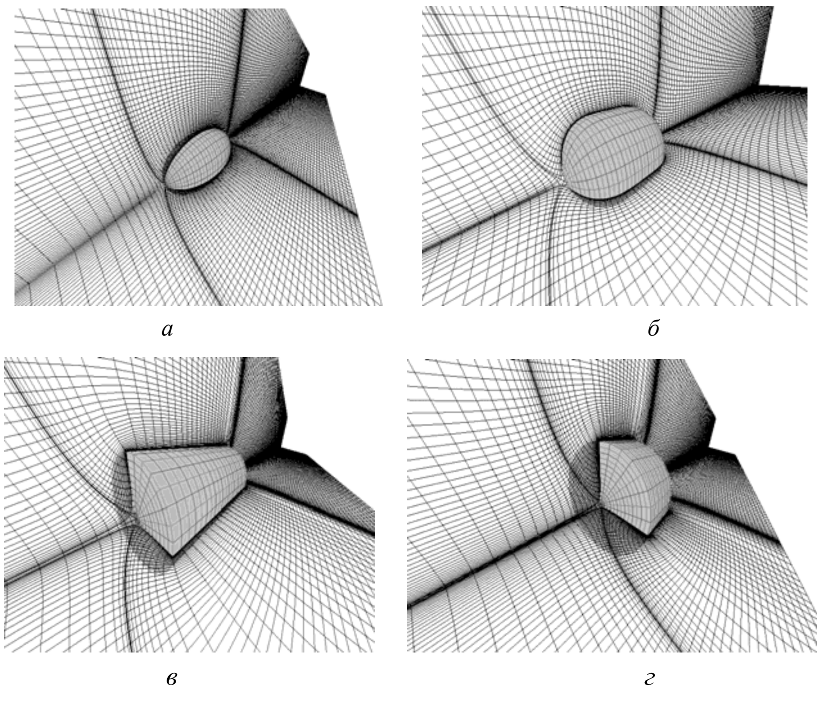


Рис. 12. Примеры конечно-разностных сеток для расчета параметров течения около тел вращения с различной геометрией образующей поверхности:
а – эллипс; *б* – эллипсоид; *в*, *г* – цилиндрические призмы

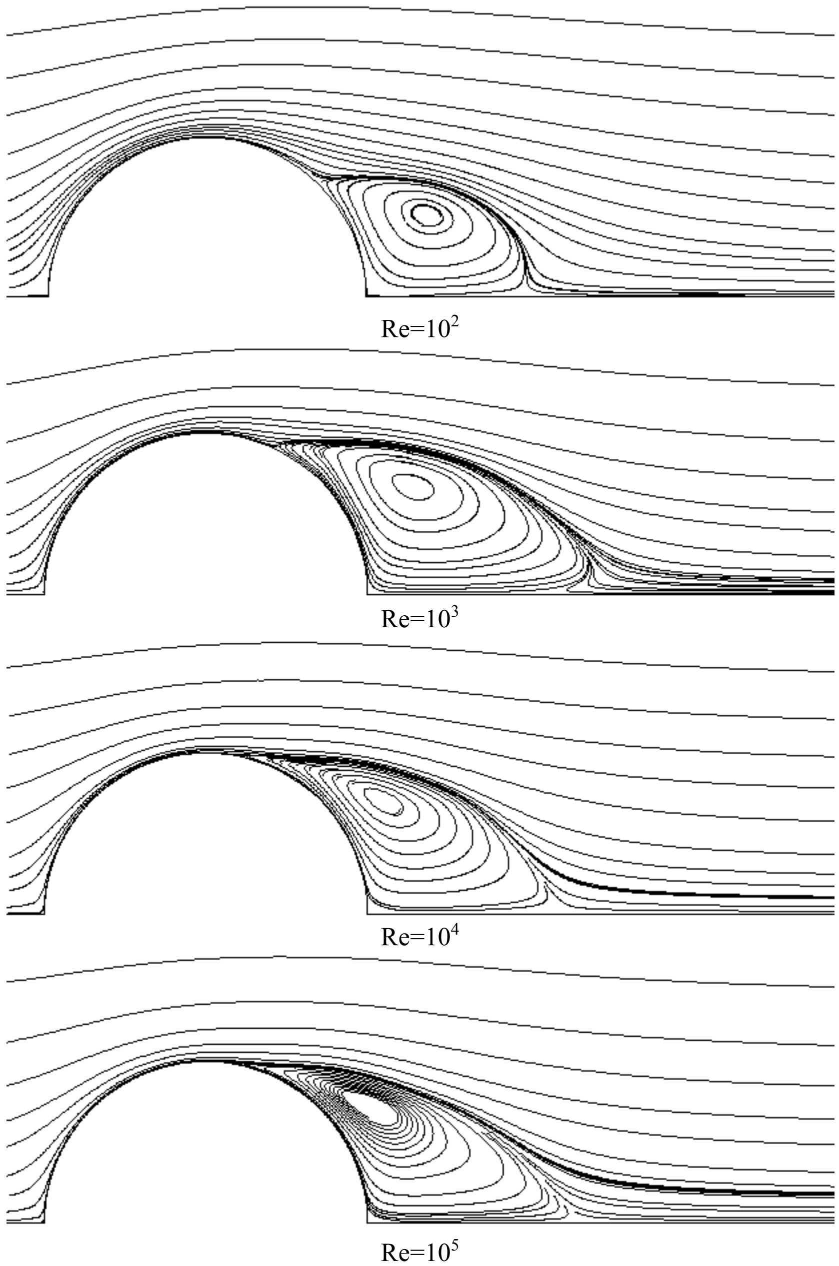
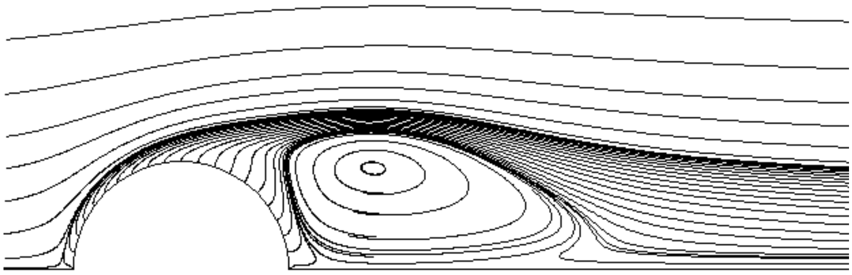
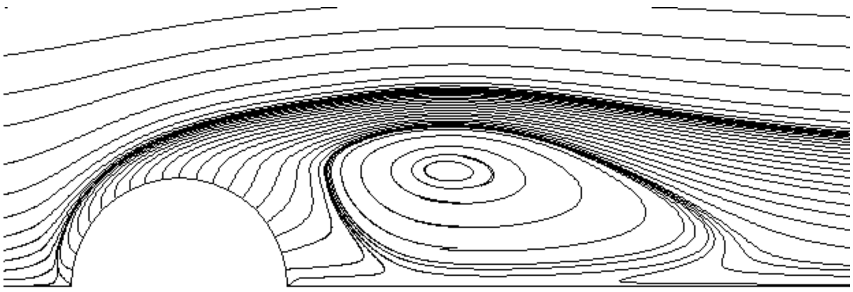


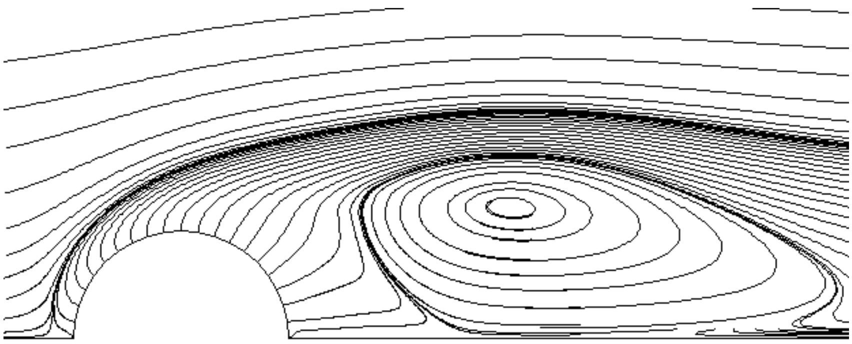
Рис. 13. Влияние числа Re на картину течения около сферы



а



б



в

Рис. 14. Влияние вдува на картину течения около сферы при Re = 400:
а – k_S = 0,1; *б* – k_S = 0,2; *в* – k_S = 0,3

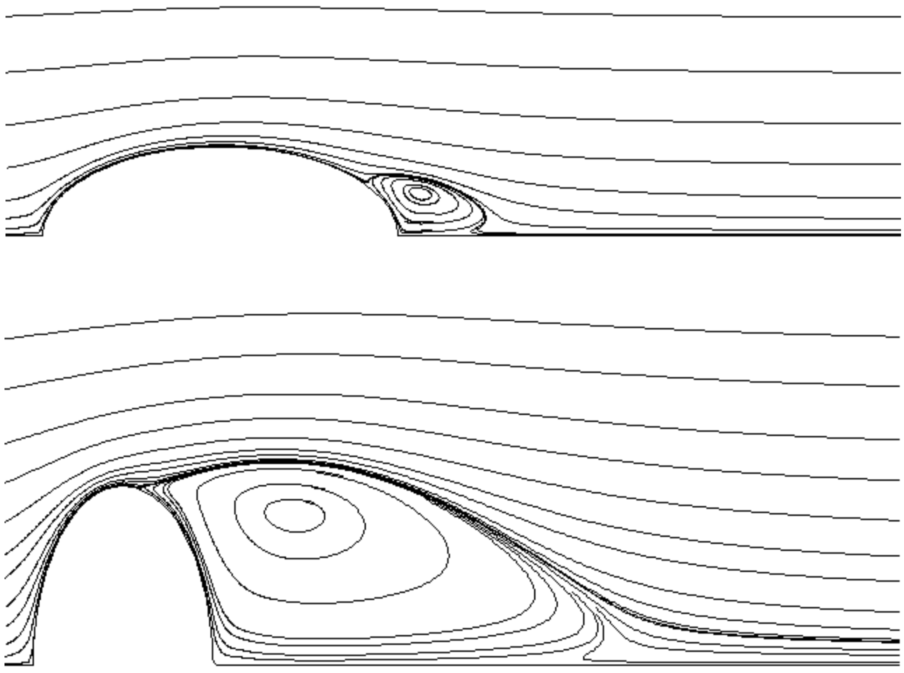


Рис. 15. Картина течения около эллипса при Re = 10^3

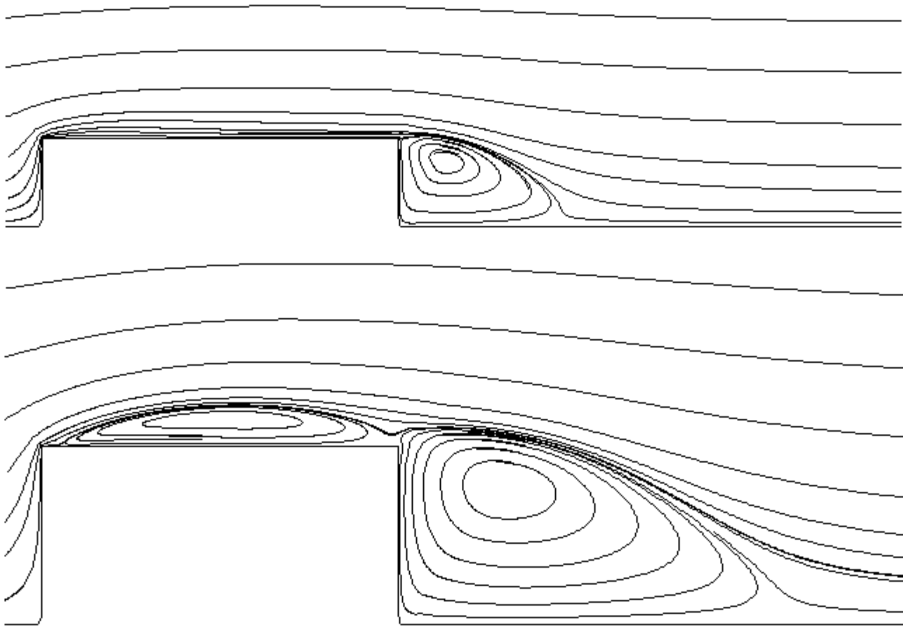


Рис. 16. Картина течения около цилиндрической призмы при Re = 10^3

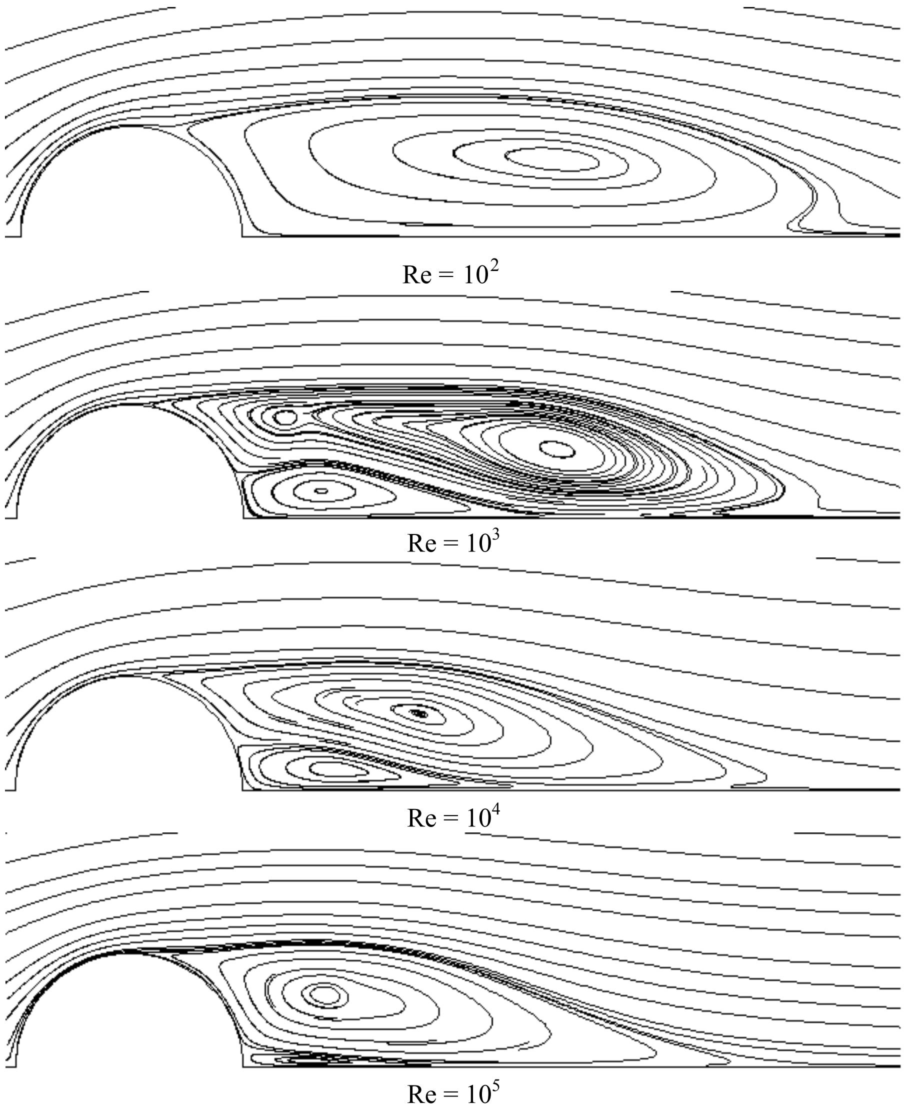


Рис. 17. Влияние числа Рейнольдса на картину течения около цилиндра

Список литературы

1. *Белоцерковский*, *О. М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. – М. : Наука, 1984. – 520 с.

2. *Гущин*, *В. А.* Численное моделирование пространственных отрывных течений около сферы / В. А. Гущин, П. В. Матюшин // ЖВМ и МФ. – 1997. – Т. 37, № 9. – С. 1122–1137.

3. *Гущин*, *В. А.* Классификация режимов отрывных течений жидкости около сферы при умеренных числах Рейнольдса / В. А. Гущин, П. В. Матюшин // Математическое моделирование: Проблемы и результаты. – М. : Наука, 2003. – С. 199–236.

4. *Горохов*, *М. М.* Дотрансзвуковое обтекание сферы вязким потоком / М. М. Горохов, И. Г. Русяк, В. А. Тененев // Избранные ученые записки ИжГТУ. – 1997. – № 2. – С. 3–10.

5. *Горохов*, *М. М.* Численное исследование обтекания осесимметричных тел при наличии вдува с поверхности / М. М. Горохов, И. Г. Русяк, В. А. Тененев // Известия РАН МЖГ. – 1996. – № 4. – С. 162–166.

6. *Гущин*, *В. А.* Вихревые структуры переходных режимов отрывных течений жидкости около сферы и трехмерного кругового цилиндра / В. А. Гущин, А. В. Костомаров, П. В. Матюшин, Е. Р. Павлюкова // Потоки и структуры в жидкостях : матер. междунар. конф. (Москва, 2001). – М. : Институт проблем механики РАН, 2002. – С. 264–269.

7. *Лойцянский*, *Л. Г.* Механика жидкости и газа. – М. : Наука, 1987. – 840 с.

8. Турбулентность, принципы и применения / под. ред. У. Фроста, Т. Моулдена. – М. : Мир, 1980. – 536 с.

9. *Андерсон*, *Д.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – М. : Мир, 1990. – Т.1 – 384 с.

10. *Кочин*, *Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М. : Наука, 1965.

11. *Тененев*, *В. А.* Численное решение задач гидродинамики и теплообмена в областях сложной формы / В. А. Тененев, И. Г. Русяк. – Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 1996. – 60 с.

12. *Громадка*, *П. Т.* Комплексный метод граничных элементов в прикладных науках / П. Т. Громадка, Ч. Лей. – М. : Мир, 1990. – 303 с.

УДК 62-50:57

В. А. Тененев, доктор физико-математических наук, профессор
Ижевский государственный технический университет

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ КРОССОВЕРОМ ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Проведено сравнительное численное исследование генетических алгоритмов с бинарным и вещественным кодированием. Предложен вещественный кроссовер, существенно повышающий эффективность оптимизации многоэкстремальных и овражных функций.

Рассматривается задача нахождения экстремума функции многих переменных

$$F(\mathbf{X}) \to \min\,,\ \mathbf{X} \in R^n\,. \qquad (1)$$

Основными проблемами при решении задачи (1) численными методами являются выбор начального приближения и достижение глобального экстремума. Значительный прогресс решения таких задач связан с применением генетических алгоритмов.

Генетический алгоритм основан на имитации в искусственных системах некоторых свойств живой природы: естественный отбор, приспосабливаемость к изменяющимся условиям среды, наследование потомками жизненно важных свойств от родителей. Сильной стороной генетических алгоритмов является их способность решать многоэкстремальные задачи без наложения условий на вид оптимизируемой функции (отсутствуют требования на непрерывность самой функции и ее производных). Важным достоинством генетических алгоритмов является то, что для них не важно начальное приближение. Генетический алгоритм показал высокую эффективность при решении многих задач: обучение нейронных сетей; обучение