

РЕГИОНАЛЬНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ СТУДЕНТОВ И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ ИЖГТУ

УДК 517.95(06)

Е. В. Ветчанин, аспирант кафедры «Высшая математика»
Ижевский государственный технический университет

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ МНОГОСЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для решения систем линейных алгебраических уравнений рассмотрен многосеточный метод. Проведено исследование эффективности различных методов сглаживания. Наибольшую эффективность показал метод SIP, имитирующий неполное LU-разложение.

При решении задач механики сплошных сред исходная система дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Ax = f, \quad (1)$$

где A – положительно определенная квадратная матрица. В современных задачах такая система может содержать до нескольких миллионов неизвестных. Матрица A такой системы часто имеет специальный вид – ленточный.

Если A плохо обусловлена, то обычные итерационные методы, такие как метод переменных направлений или метод Гаусса – Зейделя показывают низкую скорость сходимости. В этом случае целесообразно применять более эффективные методы, например метод сопряженных градиентов с предобуславливанием или многосеточный метод.

Алгоритм метода сопряженных градиентов для системы (1) следующий:

1. $r^0 = f - Ax, p^0 = B^{-1}r^0, k = 0.$

2. $\alpha^k = \frac{(B^{-1}r^k, r^k)}{(Ap^k, p^k)};$

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k p^k;$$

$$r^{k+1} = r^k - \alpha^k Ap^k;$$

$$\beta^k = \frac{(B^{-1}r^{k+1}, r^{k+1})}{(B^{-1}r^k, r^k)};$$

$$p^{k+1} = p^k \beta^k + B^{-1}r^{k+1}.$$

3. Если $\|r^k\| < \varepsilon$, то получено решение. В противном случае $k = k + 1$, переходим на шаг 1.

Если оператор предобуславливания $B = E$, то имеем классический метод сопряженных градиентов.

В качестве предобусловливателя можно использовать сильно неявную процедуру SIP, которая имитирует неполное LU-разложение – ILU.

Для пятиточечного шаблона

$$a_{ij}x_{i-1j} + b_{ij}x_{ij-1} + c_{ij}x_{ij} + d_{ij}x_{i+1j} + e_{ij}x_{ij+1} = f_{ij} \quad (2)$$

решение представляется в виде

$$x_{ij} + \bar{d}_{ij}x_{i+1j} + \bar{e}_{ij}x_{ij+1} = V_{ij}, \quad (3)$$

где \bar{d}_{ij} , \bar{e}_{ij} , V_{ijk} – неизвестные коэффициенты.

Для определения этих коэффициентов используются выражения

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - a_{ij}\bar{d}_{i-1j} - b_{ij}\bar{e}_{ij-1}; \quad (4)$$

$$\bar{d}_{ij} = d_{ij}/\bar{c}_{ij}; \quad (5)$$

$$\bar{e}_{ij} = e_{ij}/\bar{c}_{ij}; \quad (6)$$

$$V_{ij} = (R_{ij} - V_{i-1j}a_{ij} - V_{ij-1}b_{ij})/\bar{c}_{ij}. \quad (7)$$

Преобразуем систему (1):

$$Ax = b, \quad x^{k+1} = x^k + \Delta x^k, \quad Ax^k + A\Delta x^k = b, \quad (8)$$

$$A\Delta x^k = r^k, \quad (9)$$

где $r^k = b - Ax^k$ – невязка на k -ой итерации.

В системе (9) представим матрицу A в виде разложения на нижнюю и верхнюю треугольные матрицы $A \approx LU$.

Матрица L соответствует этапу вычисления коэффициентов \bar{c}_{ij} , \bar{d}_{ij} , \bar{e}_{ij} , а матрица U соответствует нахождению решения по (3):

$$LU\Delta x^k = r^k, \quad LV^k = r^k. \quad (10)$$

Отсюда ясно двухэтапное содержание вычислений:

1. Вычисление $V^k = L^{-1}r^k$.

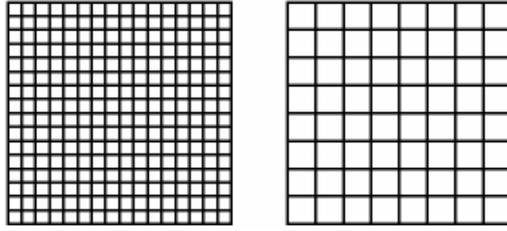
2. Вычисление $\Delta Y^k = U^{-1}V^k$.

Представляет интерес исследование эффективности многосеточных методов, проявивших себя при решении широкого круга задач. Впервые идея таких методов была высказана в 1968 г. Р. П. Федоренко и довольно доступно описана в [1, 2, 3]. Многосеточные методы эффективно применялись при решении задач газовой динамики в работе [4].

Рассмотрим основную идею многосеточного метода на примере двухсеточного. Для решения вводятся две сетки: мелкая (точная – fine) и крупная (грубая – course):

$$G_1 = \left\{ (x, y) : x = x_i = ih_1, y = y_j = jh_2, i = 1, 2, \dots, 2n, j = 1, 2, \dots, 2m, h_1 = \frac{1}{2n}, h_2 = \frac{1}{2m} \right\}; \quad (11)$$

$$G_2 = \left\{ (x, y) : x = x_i = ih_1, y = y_j = jh_2, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m, h_1 = \frac{1}{n}, h_2 = \frac{1}{m} \right\}.$$


 Рис. 1. Сетки G_1 и G_2

Система уравнений должна быть построена на всех сетках.

Для решения уравнений на этих сетках используется какой-нибудь простой итерационный метод, например Гаусса – Зейделя, переменных направлений или ИЛУ. Этот метод называется сглаживающим (smoother) – S [2].

Вводятся также операторы переноса информации с одной сетки на другую. Оператор R , переносящий информацию с хорошей сетки на грубую, называют ограничивающим (restriction operator), оператор P , переносящий с грубой на хорошую, – интерполирующим или продляющим (prolongation operator) [2].

Алгоритм метода следующий.

1. Задать начальное приближение x^0 .

2. $x^{1/3} = S(A, b, x^0)$.

3. $r_1 = b - A_1 x^{1/3}$.

4. $r_2 = R r_1$.

5. $d_2 = A_2^{-1} r_2$.

6. $d_1 = P d_2$.

7. $x^{2/3} = x^{1/3} + d_1$.

8. $x^1 = S(A, b, x^{2/3})$.

9. Если достигнута заданная точность решения, то решение найдено, в противном случае $x^0 = x^1$, переходим на шаг 1.

Для тестирования этих методов было выбрано уравнение Пуассона с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial}{\partial x} k^1(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k^2(x, y) \frac{\partial U}{\partial y} = -f(x, y), \quad x \in (0, 1), \quad y \in (0, 1). \quad (12)$$

Дискретный аналог (12) имеет вид

$$a_{ij} U_{i-1j} + b_{ij} U_{ij-1} + c_{ij} U_{ij} + d_{ij} U_{i+1j} + e_{ij} U_{ij+1} = f_{ij}, \quad (13)$$

где

$$a_{ij} = \frac{2k^1(x_i - 0,5\Delta x_{i-1}, y_j)}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)}; \quad d_{ij} = \frac{2k^1(x_i + 0,5\Delta x_i, y_j)}{\Delta x_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)};$$

$$b_{ij} = \frac{2k^2(x_i, y_j - 0,5\Delta y_{j-1})}{\Delta y_{j-1}(\Delta y_{j-1} + \Delta y_j)}; \quad e_{ij} = \frac{2k^2(x_i, y_j + 0,5\Delta y_{j-1})}{\Delta y_j(\Delta y_{j-1} + \Delta y_j)};$$

$$c_{ij} = -(a_{ij} + b_{ij} + d_{ij} + e_{ij}); f_{ij} = -f(x_i, y_j).$$

Критерием остановки методов было условие $\max_{ij} |r_{ij}| < 10^{-6}$, где r_{ij} – невязка для узла ij .

В табл. 1 представлены результаты тестирования методов на равномерных сетках с граничными условиями Дирихле, измерялось время решения системы. Тестирование проводилось на ЭВМ с характеристиками: CPU AMD ATHLON 64 X2 5600+, RAM Samsung DDR-II 2GB (PC2-6400) 800MHz.

Таблица 1

Размер сетки	Гаусса – Зейделя, с	МСГ, с	Многосеточные методы		
			Гаусса – Зейделя, с	Переменных направлений, с	SIP, с
129x129	20,2809	0,330619	0,054251	0,078605	0,047309
257x257	508,029	1,74018	0,253824	0,513524	0,250428
513x513	>1 часа	13,41077	0,988617	1,959043	0,869798

На практике часто встречаются условия Неймана (линии/плоскости симметрии).

В табл. 2 представлены результаты тестирования методов на равномерных сетках с граничными условиями Неймана на границах $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ и условием Дирихле на $x = 1$, измерялось время решения системы.

Таблица 2

Размер сетки	Гаусса – Зейделя, с	МСГ, с	Многосеточные методы		
			Гаусса – Зейделя, с	Переменных направлений, с	SIP, с
129x129	28,5844	0,546461	0,06696	0,172284	0,067006
257x257	664,577	3,521196	0,365628	0,571226	0,272042
513x513	>1 часа	27,22486	1,269549	2,697691	1,050219

Разностный аналог (13) будет иметь сильно меняющиеся коэффициенты, если:

- $k^1(x, y)$ и $k^2(x, y)$ – сильно меняющиеся функции;
- сетка неравномерная.

При численном решении задач математической физики эти факторы действуют, как правило, совместно.

В работе [3] делается предположение, что более эффективными будут методы переменных направлений и неполное LU-разложение. В табл. 3 представлены результаты работы различных методов на сетке 257×257 при различном сгущении.

Таблица 3

$\frac{\Delta x_{\max}}{\Delta x_{\min}}$	$\frac{\Delta y_{\max}}{\Delta y_{\min}}$	МСГ, с	Многосеточные методы		
			Гаусса-Зейделя, с	Переменных направлений, с	SIP, с
10	1	74,10344	1,152637	0,53408	0,3217
10	10	Расходится	11,2362	0,633117	0,488188
1000	1000	Расходится	Расходится	0,681843	1,546061

На практике часто приходится решать трехмерные задачи (моделирование турбулентности), поэтому вместо уравнения (12) рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} k^1(x, y, z) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k^2(x, y, z) \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k^3(x, y, z) \frac{\partial U}{\partial z} = -f(x, y, z), \quad (14)$$

$$x \in (0,1), y \in (0,1), z \in (0,1).$$

Дискретный аналог (14) имеет вид

$$a_{ijk} U_{i-1jk} + b_{ijk} U_{ij-1k} + c_{ijk} U_{ijk-1} + d_{ij} U_{ijk} + e_{ijk} U_{i+1jk} + f_{ijk} U_{ij+1k} + g_{ijk} U_{ijk+1} = f_{ijk}, \quad (15)$$

где

$$a_{ijk} = \frac{2k^1(x_i - 0,5\Delta x_{i-1}, y_j, z_k)}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)}; \quad e_{ijk} = \frac{2k^1(x_i + 0,5\Delta x_i, y_j, z_k)}{\Delta x_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)};$$

$$b_{ijk} = \frac{2k^2(x_i, y_j - 0,5\Delta y_{j-1}, z_k)}{\Delta y_{j-1}(\Delta y_{j-1} + \Delta y_j)}; \quad f_{ijk} = \frac{2k^2(x_i, y_j + 0,5\Delta y_{j-1}, z_k)}{\Delta y_j(\Delta y_{j-1} + \Delta y_j)};$$

$$c_{ijk} = \frac{2k^3(x_i, y_j, z_k - 0,5\Delta z_{k-1})}{\Delta z_{k-1}(\Delta z_{k-1} + \Delta z_k)}; \quad g_{ijk} = \frac{2k^3(x_i, y_j, z_k + 0,5\Delta z_{k-1})}{\Delta z_k(\Delta z_{k-1} + \Delta z_k)};$$

$$d_{ijk} = -(a_{ijk} + b_{ijk} + c_{ijk} + e_{ijk} + f_{ijk} + g_{ijk}); \quad f_{ijk} = -f(x_i, y_j, z_k).$$

В табл. 4 представлены результаты тестирования методов на равномерных сетках с граничным условием Дирихле на границе $x=1$ и условиями Неймана на $x=0, y=0, y=1, z=0, z=1$, измерялось время решения системы.

Таблица 4

Размер сетки	МСГ, с	Многосеточные методы	
		Гаусса – Зейделя, с	SIP, с
65x65x65	8,099736	3,378212	2,692528
129x129x129	120,571	31,08322	26,35378
257x129x129	313,056	188,612	81,1273

В табл. 5 представлены результаты работы различных методов на сетке $129 \times 129 \times 129$ при различном сгущении.

Таблица 5

$\frac{\Delta x_{\max}}{\Delta x_{\min}}$	$\frac{\Delta y_{\max}}{\Delta y_{\min}}$	$\frac{\Delta z_{\max}}{\Delta z_{\min}}$	МСГ, с	Многосеточные методы	
				Гаусса – Зейделя, с	SIP, с
1	10	10	Расходится	629,947	83,91934
1	1	100	Расходится	> 1 часа	137,179
1	1	1000	Расходится	Расходится	276,037

На рис. 1–3 представлены результаты сравнительного исследования метода сопряженных градиентов и многосеточных Гаусса – Зейделя и SIP.

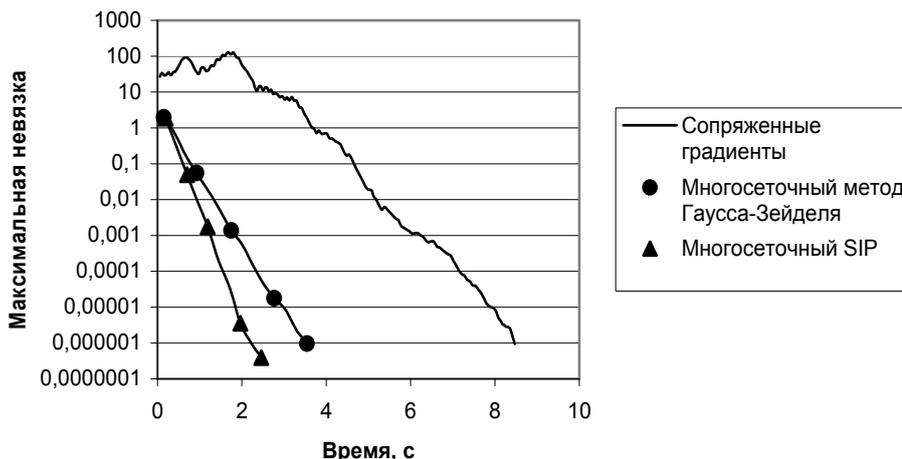


Рис. 1. Поведение методов на равномерной сетке 65×65×65

Как показано на рис. 1, многосеточные методы достаточно быстро достигают заданной точности решения, причем при использовании SIP в качестве сглаживающего метода сходимость достигается за 2,5 с, что в полтора раза быстрее, чем при использовании метода Гаусса – Зейделя – 3,5 с. Метод сопряженных градиентов достигает сходимости за 8,5 с, что в 3,5 раза дольше, чем при использовании многосеточного SIP.

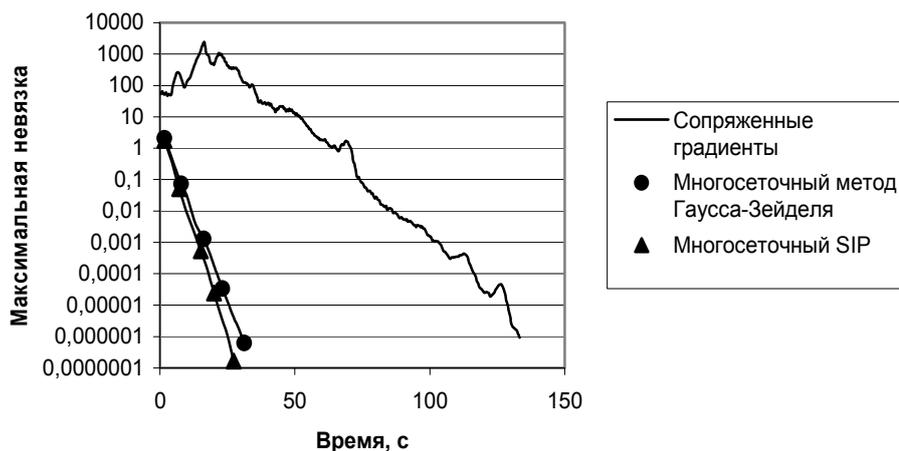


Рис. 2. Поведение методов на равномерной сетке 129×129×129

Многосеточные методы, так же как и в первом случае, достаточно быстро достигают заданной точности решения, причем сходимость при использовании SIP в качестве сглаживающего метода достигается за 27 с, а при использовании метода Гаусса – Зейделя – за 31 с. Метод сопряженных градиентов достигает сходимости за 133 с, что почти в 5 раз дольше, чем при использовании многосеточного SIP.

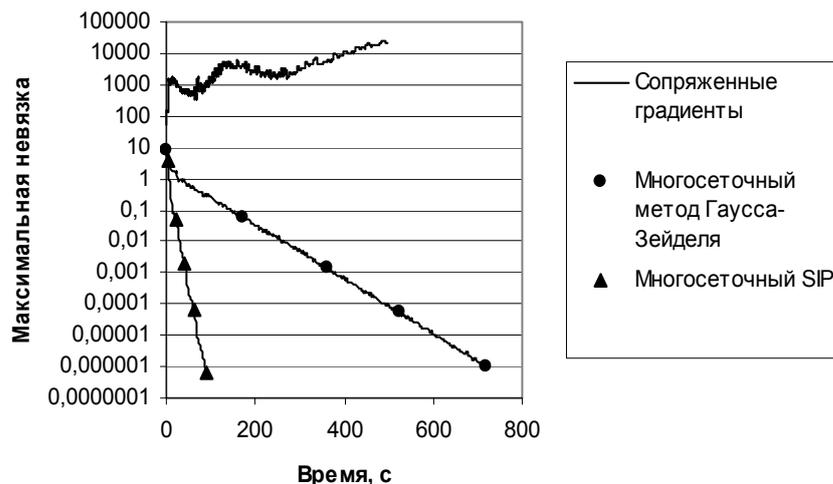


Рис. 3. Поведение методов на сетке $129 \times 129 \times 129$ со сгущением по y и z в 10 раз

При наличии сгущения многосеточный SIP достигает сходимости за 89 с, что в 3 раза медленнее, чем без сгущения. Многосеточные метод Гаусса – Зейделя достигает сходимости за 720 с, что в 23 раза медленнее, чем в предыдущем случае. Метод сопряженных градиентов расходится.

Выводы

В данной работе исследована эффективность метода сопряженных градиентов с предобуславливанием, метода Гаусса – Зейделя и многосеточного метода с различными сглаживающими методами при решении двумерных и трехмерных задач.

Исследование показало, что многосеточные методы в несколько раз эффективнее метода сопряженных градиентов с предобуславливанием и метода Гаусса – Зейделя и дают высокую сходимость там, где сопряженные градиенты и метод Гаусса – Зейделя расходятся.

Многосеточный метод с методом Гаусса – Зейделя в качестве сглаживающего при сильном изменении коэффициентов СЛАУ сходится медленно или даже может расходиться.

Многосеточный метод с методом переменных направлений или SIP в качестве сглаживающих дает хорошую сходимость при сильно меняющихся коэффициентах.

Наибольшую эффективность показал метод SIP. Сходимость при решении СЛАУ, соответствующих дискретным аналогам двумерных и трехмерных задач, даже при наличии сильно меняющихся коэффициентов достигалась достаточно быстро.

Список литературы

1. Федоренко, Р. П. Введение в вычислительную физику : учеб. пособие для вузов. – М. : Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994. – 528 с.
2. Wesseling, P. An introduction to multigrid methods.
3. Trottenberg, U. A., Oosterlee, C. W. Schüller Multigrid.
4. Ну, Р.-Х. Многосеточный метод для решения уравнений Эйлера // Аэрокосм. техника. – 1983. – № 6. – С. 61–69.