

Стоит отметить, что формула Эрланга работает лучше для высокого уровня обслуживания.

Список литературы

1. Системы массового обслуживания с ожиданием. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://masteroid.ru/content/view/909/42/>
2. Erlang calculator. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.math.vu.nl/~koole/ccmath/ErlangC/index.php>.

УДК 519.854

Е. В. Прохоровская, студентка
Ижевский государственный технический университет

ГЕНЕТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ КОДИРОВАНИЕМ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Исследуется возможность применения генетических алгоритмов с вещественным кодированием для решения задач оптимального управления с ограничениями, сводящихся к задачам условной оптимизации. Приводятся результаты решений задачи управляемого эндогенного научно-технического прогресса и дифференциальной игры о долихобрахистохроне. Полученные результаты свидетельствуют об эффективности применения генетических алгоритмов для решения задач оптимального управления с ограничениями.

Введение

Ранее проведенные исследования показали высокую эффективность методов, основанных на применении генетических алгоритмов с вещественным кодированием, при решении задач условной оптимизации многопараметрических функций [1]. Поэтому за основу решения задач оптимального управления с ограничениями также было принято решение взять генетические алгоритмы. При этом для возможности применения такого подхода задачу оптимального управления с ограничениями предлагается привести к задаче условной оптимизации.

В качестве тестовых задач оптимального управления с ограничениями рассматриваются задача управляемого эндогенного научно-технического прогресса [2] и дифференциальная игра о долихобрахистохроне [2, 3]. Рассмотрим сущность, подходы и результаты реализации решения указанных задач.

Задача управляемого эндогенного научно-технического прогресса

Рассмотрим макроэкономическую модель, базирующуюся на понятии производственной функции. Пусть, например, мы имеем дело с прогрессом, величина Y выпуска которого определяется по функции Кобба – Дугласа вида [2]

$$Y = A(Q)F(K, L) = A(Q)K^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad (1)$$

где Y – национальный доход; K – объем основных фондов (капитал); L – объем трудовых ресурсов; $F(K, L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ – производственная функция; Q – суммарный объем капиталовложений в научно-технический прогресс; $A(Q)$ – мультипликатор прогресса, показывающий эффективность затрачиваемых «на науку» средств.

Динамика представленной модели определяется тем, в какой пропорции делится национальный доход между капиталовложениями на расширение основных фондов и на улучшение производства («на науку»). Таким образом, модель (1) определяет влияние научных исследований на темпы роста промышленного производства и эффективность капиталовложений в научные исследования.

На мультипликатор прогресса $A(Q)$ накладываются условия, аналогичные неоклассическим: $A'(Q) > 0$, $A''(Q) < 0$, $A(0) = 1$, $\lim_{Q \rightarrow \infty} A(Q) = \infty$, $\lim_{Q \rightarrow \infty} A'(Q) = 0$, $\lim_{Q \rightarrow 0} A'(Q) = \infty$. Поэтому за $A(Q)$ предлагается взять функцию вида

$$A(Q) = 1 + aQ^\gamma, \quad (2)$$

где $a > 0$ – произвольное число; γ – число из отрезка $[0;1]$.

Пусть $u \in [0;1]$ – доля национального дохода Y , направляемая на увеличение основных фондов. Величина $(1 - u)$ представляет собой долю национального дохода Y , направляемую «на науку», в научно-технический прогресс. Тогда:

$$\begin{cases} \frac{dK}{dt} = uY = uA(Q)K^\alpha L^{1-\alpha}, \\ \frac{dQ}{dt} = (1-u)Y = (1-u)A(Q)K^\alpha L^{1-\alpha}, \\ \frac{dL}{dt} = p(L), \end{cases} \quad (3)$$

где $p(L)$ – такая функция, что величина L не может стать бесконечной за конечное время.

Пусть (K_0, Q_0, L_0) – произвольное начальное состояние. Задание управления $u(t)$, $t \geq 0$, $0 \leq u(t) \leq 1$ позволяет из уравнений (1)–(3) определить траекторию $(K(t), Q(t), L(t))$.

Требуется за кратчайшее время T достигнуть заданного уровня объема основных фондов $\bar{K}$.

Имеем задачу условной оптимизации:

$$T \rightarrow \min; K = \bar{K}. \quad (4)$$

За основу решения задачи (2)–(4) был взят метод, основанный на разделении задачи условной оптимизации на две подзадачи безусловной оптимизации с использованием схемы наличия в алгоритме двух популяций, одна из которых состоит только из допустимых особей, другая – принимает полученные при скрещивании значения [1]. Условно назовем этот метод методом двух популяций.

Кроме того для сравнения работы выбранного метода представлена реализация еще одного метода, ранее уже применявшегося при решении подобных задач, – метода штрафных функций.

Результаты реализации метода штрафных функций

Для решения задачи управляемого эндогенного прогресса (2)–(4) методом штрафных функций потребовалось внести некоторые изменения в постановку исходной задачи.

Так, в системе (3)–(4) делается замена: $t = \tau \cdot \xi$, где ξ – дополнительный управляющий параметр; τ – новая независимая переменная, изменяющаяся на фиксированном отрезке $[0;1]$. С учетом таких изменений, после преобразования дифференциальных уравнений системы (3) по явной схеме Эйлера задача (3)–(4) примет вид

$$\begin{cases} K_{i+1} = K_i + \xi h u_i (1 + a Q_i^\gamma) K_i^\alpha L_i^{1-\alpha}, \\ Q_{i+1} = Q_i + \xi h (1 - u_i) (1 + a Q_i^\gamma) K_i^\alpha L_i^{1-\alpha}, \\ L_{i+1} = L_i + \xi h P(L), \end{cases} \quad (5)$$

$$\xi \rightarrow \min, K(\tau = 1) = \bar{K},$$

где $i = \overline{1, n}$; n – число разбиений; h – шаг равномерной сетки.

Таким образом, задача сводится к поиску вектора управлений $u(\tau)$ размерностью N , $\tau \in [0;1]$ и управляющего параметра ξ для системы (5) так, чтобы при $\tau = 1$ параметр ξ принимал возможное наименьшее значение и для данного ξ выполнялось условие $K(\tau = 1) = \bar{K}$.

Мы пришли к задаче с фиксированным временем, свободным правым концом, одним управляющим параметром и одним управляющим вектором.

Для возможности применения метода штрафных функций была составлена следующая целевая функция:

$$F(\xi, K) = \xi + A(K(1) - \bar{K})^2 \rightarrow \min, \quad (6)$$

где A – коэффициент функции штрафа.

Попытка реализовать модифицированный метод штрафных функций с адаптацией коэффициента функции штрафа A [5] в процессе вычисления привела к отрицательным результатам даже при небольшом количестве переменных N : полученный график вектора управлений $u(\tau)$ и значения параметра ξ совсем не соответствовали аналитическому решению (аналитическое решение приведено в табл. 1 и на рис. 1).

Таблица 1. Результаты решения задачи (5)–(6) методом штрафных функций

Кол-во переменных, N	Средний минимум целевой функции, $F(\xi, K)$	Среднее значение параметра ξ	Среднее значение отклонения $(K(1) - \bar{K})^2$	Аналитическое значение времени, T	Среднее время расчета, с
20	0,94411	0,94378	0,00033	0,90599	1,53
50	0,90921	0,90893	0,00028		4,89
100	0,89851	0,89826	0,00025		35,8

Примечание. Аналитическое решение найдено при разбиении $n = 100$ по схеме, приведенной в книге Ашманова С. А. [2].

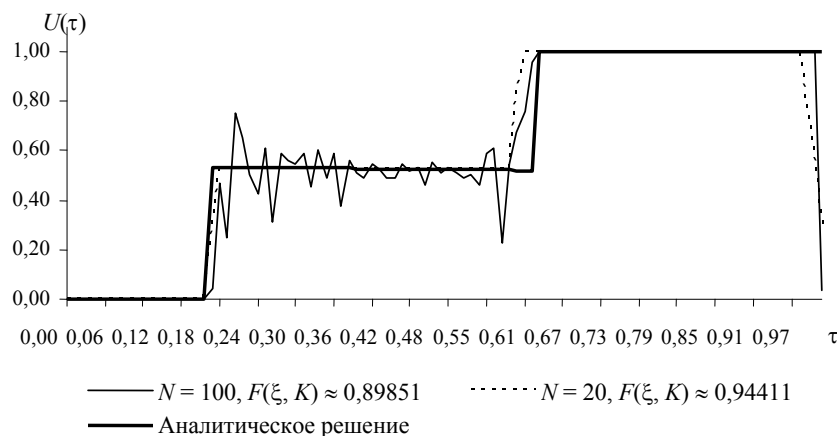


Рис. 1. Графики значений вектора управления $u(\tau)$, полученных методом штрафных функций, и аналитическое решение

Что касается метода с фиксированным коэффициентом штрафа A , то он показал довольно неплохие результаты: полученные график вектора управлений $u(\tau)$ и значения параметра ξ близки к реальным значениям (табл. 1, рис. 1). Реализация производилась со следующим набором параметров для системы (5):

$$(K_0, Q_0, L_0) = (0.9, 0.1, 1); \quad p(L) = L^{1-\alpha}; \quad \bar{K} = 10; \quad a = 4; \quad \alpha = 0.5; \quad \gamma = 0.5; \quad A = 1.$$

Рассматривая полученные результаты, прежде всего стоит обратить внимание на одну особенность, которую нельзя не заметить, – возрастание колебаний значений вектора управлений на заданном интервале при большом количестве переменных ($N = 50, \dots, 100$). Устранить частоту колебаний при большом количестве переменных можно следующим образом: для расчета K_i, Q_i, L_i ($i \in 1; n$) достаточно брать не все значения управляемого вектора, а лишь некоторые промежуточные значения.

В целом в табл. 1 и на рис. 1 представлены довольно неплохие результаты. Однако важно заметить, что здесь представлены наилучшие результаты, которые удалось достичь при реализации метода штрафных функций. Как показывают остальные результаты реализации этого метода, представленной на рис. 1 и в табл. 1 точности решений удастся достичь не всегда. Особенно явно это несоответствие проявляется при большом количестве переменных вектора управления (например, при $N = 100$) или при неверном подборе коэффициента штрафной функции A .

Таким образом, полученные результаты говорят о целесообразности поиска более эффективного метода решения задачи управляемого эндогенного научно-технического прогресса, чем методы штрафных функций.

Результаты реализации метода двух популяций

Решить задачу эндогенного научно-технического прогресса при использовании метода двух популяций можно различными способами. Один из способов аналогичен тому, что использовался при реализации метода штрафных функций (с дополнительным управляющим параметром ξ). В этом случае целевая функция и огра-

ничения примут вид: $F = \xi \rightarrow \min$; $K(1) = \bar{K}$. Результаты реализации данного подхода представлены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты решения задачи (5)–(6) методом двух популяций

Кол-во переменных, N	Средний минимум целевой функции, $F(\xi, K)$	$K^{best}(1)$	Аналитическое значение времени, T	Среднее время расчета, с
20	0,94444	10	0,90599	1,35
50	0,90958	10		6,21
100	0,89882	10		12,75

Вид графиков значений вектора управления $u(\tau)$ соответствует результатам, полученным методом штрафных функций (см. рис. 1).

Кроме описанного способа задачу управляемого эндогенного прогресса можно решить и другим, более простым способом (без дополнительного параметра ξ), также основанным на использовании метода двух популяций. Так, в качестве целевой функции и ограничений предлагается рассмотреть следующую систему:

$$T = \frac{\bar{K} - K_0}{K_N - K_0} t_\phi \rightarrow \min, \quad \bar{K} \leq K_N, \quad (7)$$

где t_ϕ – некоторое фиксированное время, отвечающее за интервал временного промежутка. Графически схема поиска решения указанной задачи представлена на рис. 2.

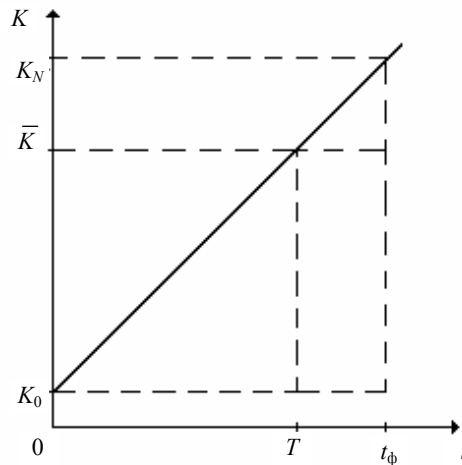


Рис. 2. Схема поиска решения задачи (2), (3), (7)

Итак, имеем задачу (2), (3), (7), причем систему (3) также целесообразно преобразовать по явной схеме Эйлера.

Данная постановка задачи за счет фиксации промежутка времени позволяет отбрасывать те наборы переменных, при которых время достижения значения $K = \bar{K}$

уже превышает некоторую фиксированную границу времени t_ϕ . Искусственно ограничивая область поиска минимального времени, мы значительно увеличиваем скорость поиска решения исходной задачи, обеспечивая при этом более высокую точность расчетов и достоверность результатов по сравнению с методами штрафных функций.

При первой же реализации данный метод показал хорошие результаты. Полученные значения были близки к аналитическому решению, при этом скорость расчетов была гораздо выше, чем при реализации вышеописанных подходов.

Результаты реализации метода двух популяций представлены в табл. 3 и на рис. 3. Реализация производилась со следующим набором параметров для системы (2),(3),(7): $(K_0, Q_0, L_0) = (0,9, 0,1, 1)$; $p(L) = L^{1-\alpha}$; $\bar{K} = 10$; $a = 4$; $\alpha = 0,5$; $\gamma = 0,5$; $t_\phi = 1$.

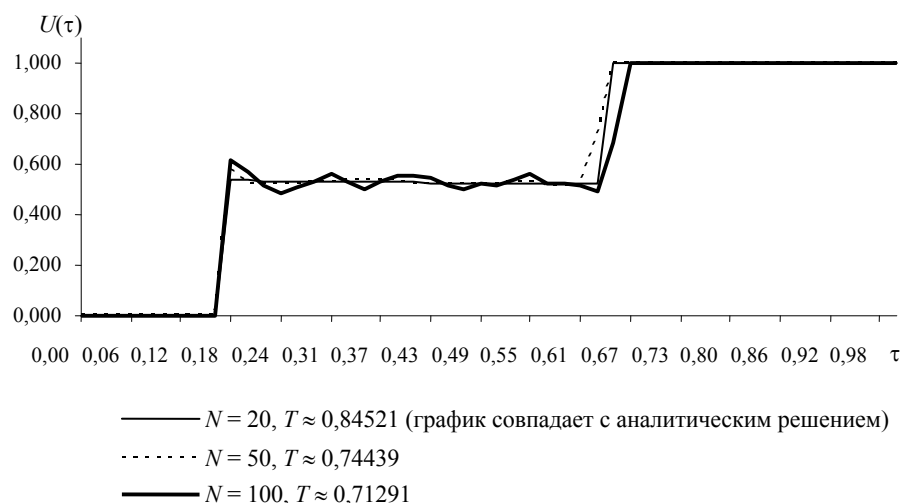


Рис. 3. Графики значений вектора управления $u(t)$, полученных методом двух популяций

Таблица 3. Результаты решения задачи (2), (3),(7) методом двух популяций

Кол-во переменных, N	Средний минимум целевой функции, T	Аналитическое значение времени, T	Среднее время расчета, с
20	0,8452131		0,98
50	0,744394	0,905989	2,25
100	0,712908		3,34

Стоит обратить внимание на тот факт, что полученные значения минимума времени T меньше значений, полученных остальными методами, в том числе и аналитических значений. Это связано с тем, что при данном подходе время T вычисляется из геометрических соображений и не зависит от числа разбиений n сетки, что дает более точные результаты. Остальные подходы, в частности и аналитическое решение [2], зависят от n (чем n больше, тем точность вычисления больше) и допускают тем самым некоторое отклонение.

В целом, основываясь на том, что метод двух популяций показал достаточно точные результаты и обеспечил высокую скорость поиска решения, о чем свидетельствуют представленные результаты, можно сделать вывод, что генетические алгоритмы хорошо справляются с решением задач управления с ограничениями, в частности с решением задач управляемого эндогенного научно-технического прогресса.

Протестируем эффективность применения генетических алгоритмов для решения более сложных задач оптимального управления с ограничениями.

Дифференциальная игра о долихобрахистохроне

Пусть дифференциальная игра описывается системой уравнений вида [3]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{y} \cos u + \frac{1+v}{2}, \\ \frac{dy}{dt} = \sqrt{y} \sin u + \frac{v-1}{2}, \end{cases} \quad (8)$$

где $u \in [0; 2\pi]$, $v \in [-1; 1]$ – управления.

Один игрок управляет функцией u и стремится за кратчайшее время провести фазовый вектор на множество M :

$$M = \{x, y : x = 0, y \geq 0\}. \quad (9)$$

Другой игрок управляет функцией v и стремится не допустить попадания на M или отсрочить его. Таким образом, задача (8)–(9) сводится к нахождению минимакса времени с учетом заданных ограничений, т. е. $\min_u \max_v F$ (F – целевая функция).

Для более объективной оценки эффективности работы исследуемых алгоритмов предлагается решить задачу (8)–(9), называемую задачей о долихобрахистохроне, также двумя методами – методом штрафных функций (ранее уже использовавшимся для решения подобных задач) и одним из методов, основанных на генетических алгоритмах с выбором допустимых решений на этапе отбора.

Реализация того и другого методов предполагает, что задача оптимального управления с ограничениями (8)–(9) сводится к задаче условной оптимизации. При этом аналогично решению задачи эндогенного прогресса предварительно осуществляются преобразования системы (8): делается замена $t = \tau \cdot \xi$ (ξ – управляющий параметр, $\tau \in [0; 1]$); дифференциальные уравнения системы (8) преобразуются по явной схеме Эйлера.

Результаты реализации метода штрафных функций

Для возможности применения метода штрафных функций была составлена следующая целевая функция:

$$F = F(\xi, x) = \xi + Ax^2 \rightarrow \min_u \max_v, \quad (10)$$

где A – коэффициент функции штрафа.

Реализация метода штрафных функций производилась со следующим набором параметров: $(x_0; y_0) = (3; 1,5)$; $A = 10$.

Количество переменных N векторов u и v , число разбиений n равномерной сетки (для нахождения x и y) принимают различные значения. Причем количество

переменных N векторов u и v не обязательно должно соответствовать числу разбиений n равномерной сетки. Так, при реализации методов (в том числе и метода, не использующего штрафные функции) для небольшого количества переменных ($N = 10, N = 30$) использовалось число разбиений $n = 10 \cdot N$, а при большом количестве переменных ($N = 100$) – число разбиений $n = N$. При большом количестве переменных ($N = n = 100$) могут быть заметны колебания значений векторов управлений на заданном интервале (рис. 7). Если же число разбиений n больше количества переменных ($N = 10, N = 30$), то достигается так называемый эффект сглаживания значений (рис. 5).

Что касается задачи нахождения условного минимакса $\min_u \max_v F(\xi, x)$, то она решалась следующим образом: на этапе формирования популяции для каждого фиксированного u определялось значение v , удовлетворяющее максимальному значению целевой функции (поиск по $v: F(\xi, x) \rightarrow \max_v$). Затем на этапе элитного отбора для каждой пары особей определялось значение целевой функции и отбиралась особь, удовлетворяющая минимальному значению функции среди имеющихся (поиск по $u: [\max_v F(\xi, x)] \rightarrow \min_u$).

Результаты реализации метода штрафных функций представлены в табл. 4 и на рис. 4–6.

Таблица 4. Результаты решения задачи (8)–(10) методом штрафных функций

Кол-во переменных, N	Средний минимум целевой функции, $F(\xi, x)$	Среднее значение функции ζ	Среднее значение X_n^{best}	Среднее время расчета, с	Среднее кол-во итераций
10	5,203019	5,168995	0,058330	30,34	380
30	5,161929	5,126750	0,059312	127,15	745
100	—	—	—	>250	>3500

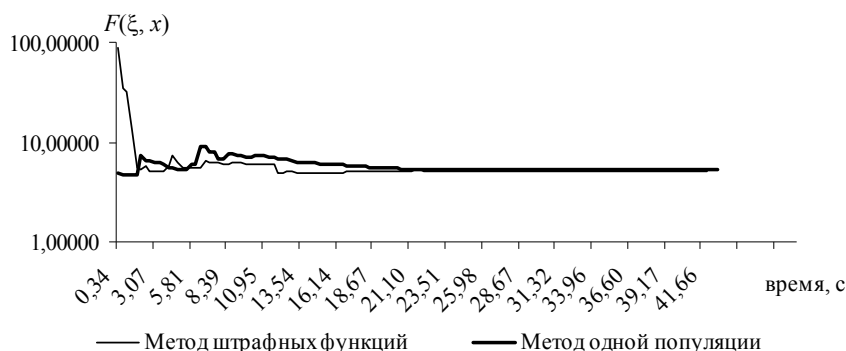
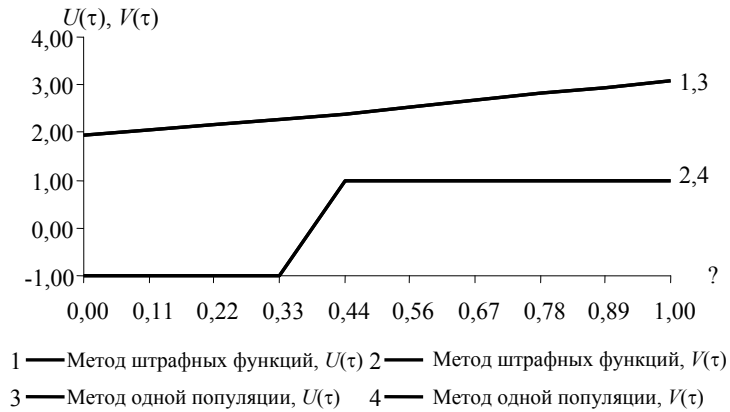
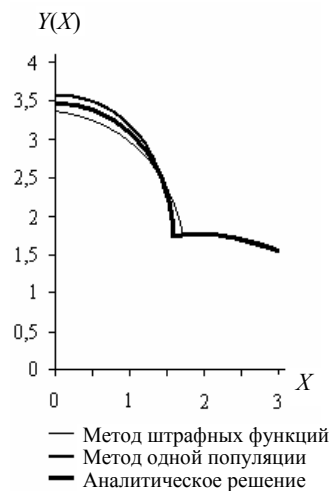


Рис. 4. Графики значений целевой функции $F(\xi, x)$ при $N = 10$

Рис. 5. Графики значений векторов управлений $u(\tau), v(\tau)$ при $N = 10$ Рис. 6. Графики решений $y = y(x)$ при $N = 10$

Представленные результаты решения задачи о долихобрахистохроне свидетельствуют о хорошей сходимости и об эффективности метода штрафных функций лишь при небольшом количестве переменных N . Как видно из табл.4, при большом количестве переменных N данный метод совсем не пригоден. Например, при $N = 100$ как целевая функция, так и векторы управлений продолжают колебаться на протяжении длительного времени ($t > 250$ с), а график решения $y = y(x)$ совсем отличен от аналитического решения.

Анализируя результаты метода штрафных функций, не стоит забывать и о главном недостатке метода, который, собственно, уже был отмечен неоднократно: зависимость от коэффициента штрафа A . При данной реализации коэффициент штрафа A определялся подбором. Так что время, затраченное на такой подбор, можно смело приплюсовать ко всем результатам, полученным данным методом.

Результаты реализации метода, основанного на генетических алгоритмах с выбором допустимых решений на этапе отбора

При решении задачи о долинхобрахистохроне методом, основанным на генетических алгоритмах с выбором допустимых решений на этапе отбора, целесообразно рассмотреть следующие целевую функцию и ограничения:

$$\begin{aligned} F = F(\xi) &= \xi \rightarrow \min_u \max_v; \\ x &= 0 \mid \xi \rightarrow \min_u; \\ x &\geq x_0 \mid \xi \rightarrow \max_v. \end{aligned} \quad (11)$$

В отличие от решения задачи эндогенного прогресса, за основу решения задачи (8), (9), (11) был взят не метод двух популяций, а метод одной популяции. Суть этого метода в том, что генетический алгоритм условной оптимизации проходит цикл, аналогичный циклу при безусловной оптимизации с той лишь разницей, что решение ищется среди только тех особей, которые удовлетворяют заданным ограничениям.

Использование дополнительных популяций при решении задач условной оптимизации [1], в основном, было необходимо для заполнения популяций как можно большим количеством допустимых особей, в связи с чем и увеличивалась эффективность поиска решения. Однако в задаче (8), (9), (11) ограничения достаточно просты и значений управляющих параметров, удовлетворяющих заданным ограничениям, в популяции достаточно много. Поэтому при решении данной задачи нет необходимости использовать дополнительные популяции. Результаты реализации метода одной популяции лишь подтверждают рассуждения о том, что проблем с поиском допустимых значений не возникает.

Для более эффективной работы достаточно простого метода одной популяции, можно периодически использовать поиск в суженной области вокруг лучшей особи. На каждой итерации использовать такой поиск нет необходимости.

Предложенный подход при решении исследуемой задачи дает хорошие результаты, значительно ускоряя сходимость.

Что касается задачи нахождения условного минимакса $\min_u \max_v \xi$, то она решалась таким же образом, как и при использовании метода штрафных функций. Единственное отличие заключалось в том, что максимум по v и минимум по u отыскивались с учетом ограничений: поиск происходил среди особей, которые удовлетворяли заданным ограничениям.

Результаты реализации метода одной популяции представлены в табл. 5, на рис. 4–6, 7–8. Реализация производилась со следующим набор параметров: $(x_0; y_0) = (3; 1, 5)$.

Таблица 5. Результаты решения задачи (8), (9), (11) методом одной популяции

Кол-во переменных, N	Средний минимум целевой функции, $F(\xi)$	Среднее значение X_n^{best}	Среднее время расчета, с	Среднее кол-во итераций
10	5,247375	0,000000	23,57	350
30	5,343196	0,000000	48,14	730
100	5,724450	0,000000	59,41	980

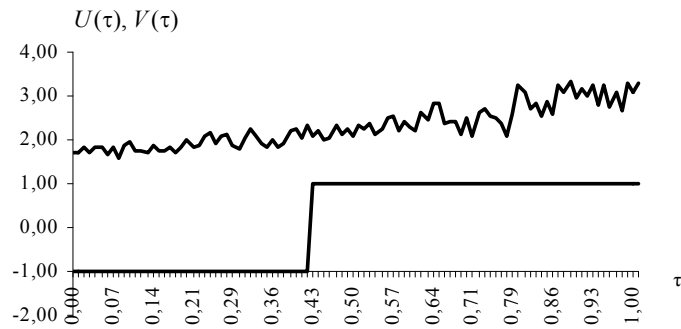


Рис. 7. График значений векторов управлений $u(\tau), v(\tau)$, полученных методом одной популяции, при $N = 100$

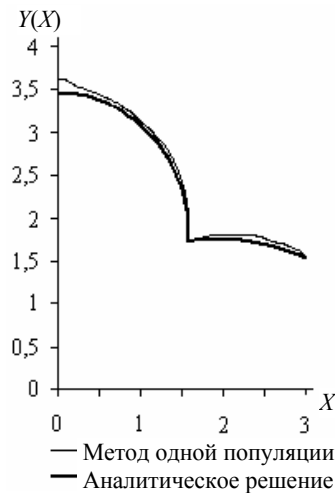


Рис. 8. График решения $y = y(x)$, полученного методом одной популяции, при $N = 100$

Представленные результаты свидетельствуют о хорошей сходимости и об эффективности метода одной популяции при решении дифференциальных игр, в частности при решении задачи о долинбрахистохроне. Причем в отличие от метода штрафных функций показана эффективность метода и при большом количестве переменных. Так, даже при $N = 100$ график решения $y = y(x)$ близок к аналитическому решению (рис. 8).

Рассматривая результаты реализации метода одной популяции при решении задачи (8), (9), (11) следует отметить некоторую особенность в постановке задачи, которая может повлиять на результаты решений.

В связи с тем что задача оптимального управления с ограничениями сводится к задаче условной оптимизации, постановка задачи может различаться. Возможность вариаций, в основном, касается ограничений. Поэтому имеет смысл разъяснить тип выбранных ограничений для решаемой задачи.

Перед тем как прийти к системе вида (11), были проанализированы различные варианты ограничений. Например, следующие:

$$x = 0 \mid \text{всегда} ; \quad (12)$$

$$x = 0 \mid \xi \rightarrow \min_u ; x > 0 \mid \xi \rightarrow \max_v ; \quad (13)$$

$$x = 0 \mid \xi \rightarrow \min_u ; x > x_0 \mid \xi \rightarrow \max_v . \quad (14)$$

Основываясь на том факте, что игрок, управляющий функцией u , стремится достичь $x = 0$, а игрок, управляющий функцией v , – не допустить попадания, то логичнее всего, что ограничения примут вид (14). Однако для того чтобы оценить влияние вида ограничения на результат и обосновать тем самым выбор ограничений, метод одной популяции был реализован при различных видах ограничений. Как показали проведенные исследования, при использовании ограничений вида (12) и (13) график решения $y = y(x)$ существенно отличается от реального решения. Верных результатов удастся достичь при выборе ограничений вида (14).

Анализируя решения представленных задач, можно заметить еще одну особенность работы исследуемых методов: если метод одной популяции ищет минимальное (максимальное) значение целевой функции среди особей, удовлетворяющих ограничениям, то метод штрафных функций ищет одновременно и минимум (максимум) целевой функции, и минимум (максимум) функции ограничений. При этом очевидно, что полученные этими методами решения будут различаться: не факт, что решение, достигнутое методом штрафных функций, будет удовлетворять заданным ограничениям; решение, достигаемое методом одной популяции, наоборот, в первую очередь будет отслеживать соответствие ограничениям. Указанное различие явно отражают и результаты, представленные в табл. 4–5: так, все X_n^{best} , полученные методом одной популяции, точно соответствуют ограничению $x = 0 \mid \xi \rightarrow \min_u$, чего нельзя сказать о X_n^{best} , полученных методом штрафных функций (здесь решение допускает некоторую погрешность); эти различия, соответственно, находят отражение и в значениях целевых функций.

Заключение

Таким образом, результаты проведенных исследований показали, что применение генетических алгоритмов с вещественным кодированием эффективно как для решения задач условной оптимизации, так и для решения задач оптимального управления с ограничениями, сводящихся к задачам условной оптимизации. При сопоставлении описанного подхода с другими методами условной оптимизации, в частности с методом штрафных функций, выявляется его явное превосходство: оно выражается как в отсутствии начальных приближений и дополнительных параметров, неверное задание которых может привести к расхождению методов, так и в скорости сходимости, точности решений, устойчивости алгоритмов при увеличении количества переменных оптимизируемых функций независимо от наличия ограничений.

Список литературы

1. Прохоровская, Е. В. Генетические алгоритмы с вещественным кодированием при решении задач условной оптимизации / Е. В. Прохоровская, В. А. Тенев, А. С. Шаура // Интеллектуальные системы в производстве. – 2008. – № 2(12). – С. 46–55.
2. Ашманов, С. А. Введение в математическую экономику. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. литер., 1984. – С. 264–265.
3. Айзекс, Р. Дифференциальные игры. – М. : МИР, 1967. – С. 121–128.
4. Евтушенко, Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. литер., 1982. – С. 363–371.
5. Исаев, С. А. Решение задач нелинейного программирования с использованием схем самонастройки при построении штрафных функций // Электронный научный журнал «Исследовано в России». – Код доступа: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2005/126.pdf>

УДК 517.977

Д. В. Сахаров, студент

Ижевский государственный технический университет

ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ
СО МНОГИМИ УЧАСТНИКАМИ

Получены условия разрешимости задач преследования в дифференциальной игре со многими участниками, обладающими простым движением.

Введение

Дифференциальным играм простого преследования посвящены многочисленные работы [1–3]. Необходимые и достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего дает теорема Б. Н. Пшеничного, приведенная в работе [3] и ее переформулировка, полученная Н. Л. Григоренко в работе [1]. В работе [2] рассматривается задача простого преследования группы убегающих группой преследователей в случае, когда множество допустимых управлений игроков – шар с центром в начале координат. Линейная дифференциальная игра двух групп игроков рассматривается в [4]. В предлагаемой работе сняты существенные ограничения на множество допустимых управлений игроков.

Постановка задачи

В пространстве R^k ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $n + m$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и m убегающих $E_1, \dots, E_m$. Закон движения каждого из преследователей имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i, \quad u_i \in U, \quad i = 1, \dots, n.$$

Закон движения убегающего E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = v_j, \quad v_j \in U, \quad j = 1, \dots, m,$$

где $U \subset R^k$ – выпуклый компакт.