

Список литературы

1. Прохоровская, Е. В. Генетические алгоритмы с вещественным кодированием при решении задач условной оптимизации / Е. В. Прохоровская, В. А. Тененев, А. С. Шаура // Интеллектуальные системы в производстве. – 2008. – № 2(12). – С. 46–55.
2. Ашманов, С. А. Введение в математическую экономику. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. литер., 1984. – С. 264–265.
3. Айзекс, Р. Дифференциальные игры. – М. : МИР, 1967. – С. 121–128.
4. Евтушенко, Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. литер., 1982. – С. 363–371.
5. Исаев, С. А. Решение задач нелинейного программирования с использованием схем самонастройки при построении штрафных функций // Электронный научный журнал «Исследовано в России». – Код доступа: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2005/126.pdf>

УДК 517.977

Д. В. Сахаров, студент

Ижевский государственный технический университет

ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ
СО МНОГИМИ УЧАСТНИКАМИ

Получены условия разрешимости задач преследования в дифференциальной игре со многими участниками, обладающими простым движением.

Введение

Дифференциальным играм простого преследования посвящены многочисленные работы [1–3]. Необходимые и достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего дает теорема Б. Н. Пшеничного, приведенная в работе [3] и ее переформулировка, полученная Н. Л. Григоренко в работе [1]. В работе [2] рассматривается задача простого преследования группы убегающих группой преследователей в случае, когда множество допустимых управлений игроков – шар с центром в начале координат. Линейная дифференциальная игра двух групп игроков рассматривается в [4]. В предлагаемой работе сняты существенные ограничения на множество допустимых управлений игроков.

Постановка задачи

В пространстве R^k ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $n + m$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и m убегающих $E_1, \dots, E_m$. Закон движения каждого из преследователей имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i, \quad u_i \in U, \quad i = 1, \dots, n.$$

Закон движения убегающего E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = v_j, \quad v_j \in U, \quad j = 1, \dots, m,$$

где $U \subset R^k$ – выпуклый компакт.

При $t = 0$ заданы начальные позиции преследователей $x_1^0, \dots, x_n^0$ и убегающих $y_1^0, \dots, y_m^0$, причем $x_i^0 \neq y_j^0$ ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$).

Цель группы преследователей состоит в том, чтобы осуществить поимку всех убегающих. Цель группы убегающих – помешать этому, т.е. предоставить возможность по крайней мере одному из убегающих уклониться от встречи.

Игру с n преследователями, m убегающими и заданными начальными положениями игроков $z^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$ будем обозначать $\Gamma(n, m, z^0)$.

Оценка числа убегающих, уклоняющихся от заранее заданного числа преследователей из любых начальных позиций

Будем говорить, что в игре $\Gamma(n, 1, z^0)$ устойчиво разрешима задача преследования, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого z в игре $\Gamma(n, 1, z)$ разрешима задача преследования, где $z = (x_1, \dots, x_n, y_1)$, $z^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0)$ и $\forall i \ \|x_i - x_i^0\| \leq \varepsilon$ и $\|y_1 - y_1^0\| \leq \varepsilon$ (это означает, что изменение начальных позиций любых игроков в пределах некоторого шара не влияет на исход игры).

Для данного выпуклого компакта U числом $a(U)$ будем обозначать наименьшее число преследователей, которые могут поймать одного убегающего, числом $b(U)$ – наименьшее число преследователей, для которых устойчиво разрешима задача преследования в игре $\Gamma(b(U), 1, z^0)$ из некоторых начальных позиций z^0 .

Лемма. Для любого выпуклого компакта U с непустой внутренностью существует число $b(U)$.

Доказательство. Пусть u – внутренняя точка компакта U , v – крайняя точка компакта, наиболее удаленная от u . В силу условия $u \in \text{int } U$ существует шар $D_R(u)$ радиуса R с центром в u , лежащий в U .

Пусть $\bar{K}(v) = \{t(v - D_R(U)), t \geq 0\}$, $K(v) = \{t(v - U), t \geq 0\}$. Тогда для всех крайних точек v_0 компакта U конус $\bar{K}(v)$ вложим в конус $K(v_0)$. Рассмотрим сферу единичного радиуса $S_1(v)$ с центром в точке v , и пусть $S(v) = S_1(v) \cap \bar{K}(v)$. В силу компактности сферы существует натуральное число m такое, что семейство множеств $\{S(v_i) - v_i\}$ ($i = 1, \dots, m$) покрывает сферу радиуса 1 с центром в начале координат. Полагаем $x_i^0 = u - v_i$, $i = 1, \dots, m$, а $y^0 = O$. Тогда в силу результатов работы [1] и по построению существует $\varepsilon > 0$ такое, что в игре $\Gamma(m, 1, \hat{z}^0)$ разрешима задача преследования, где $\hat{z}^0 = (\hat{x}_1^0, \dots, \hat{x}_m^0, \hat{y}^0)$, $z^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0, y^0)$ и $\forall i \ \|x_i^0 - \hat{x}_i^0\| \leq \varepsilon$, $\|y^0 - \hat{y}^0\| \leq \varepsilon$, следовательно, в игре $\Gamma(m, 1, z^0)$ устойчиво разрешима задача преследования и $b(U) \leq m$. Лемма доказана.

Следствие. Для любого выпуклого компакта U с непустой внутренностью существует число $a(U)$.

Теорема 1. Для любого выпуклого компакта U с непустой внутренностью и для любого целого неотрицательного числа n существуют начальные позиции игроков z^0 такие, что в игре $\Gamma(a(U) \cdot b(U)^n, b(U)^{n-1}(b(U) + a(U) \cdot n), z^0)$ разрешима задача преследования за конечное время.

Доказательство. Доказывать утверждение будем методом математической индукции по n . Пусть $n = 0$. В соответствии с определением числа $a(U)$ существуют начальные позиции игроков z^0 такие, что в игре $\Gamma(a(U), 1, z^0)$ разрешима задача преследования, следовательно, утверждение в этом случае справедливо. База индукции верна. Аналогично существуют начальные позиции $\hat{z}^0$ такие, что в игре $\Gamma(b(U), 1, \hat{z}^0)$ задача преследования будет устойчиво разрешимой. Обозначим данные начальные позиции преследователей $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{b(U)}$, убегающего – $\hat{y}$. Предположим, что утверждение имеет место для всех $n \leq p$. В частности существует z^0 такое, что в игре $\Gamma(a(U) \cdot b(U)^p, b(U)^{p-1}(b(U) + a(U) \cdot p), z^0)$ происходит поимка не позднее момента T . Зафиксируем данные начальные позиции.

Покажем, что утверждение выполняется при $n = p + 1$.

Пусть A – множество данных начальных позиций, R – радиус шара с центром в начале координат, который содержит все положения игроков в игре $\Gamma(a(U) \cdot b(U)^p, b(U)^{p-1}(b(U) + a(U) \cdot p), z^0)$ до момента T . Рассмотрим в пространстве R^k симплекс с вершинами $\beta \hat{x}_1, \dots, \beta \hat{x}_{b(U)}$. Сделаем трансляцию множества A на каждый из векторов $\beta \hat{x}_s$, $s = 1, \dots, b(U)$ и рассмотрим все точки вида $\beta \hat{x}_s + x_i^0$, где x_i^0 – начальное положение преследователя P_i в игре $\Gamma(a(U) \cdot b(U)^p, b(U)^{p-1}(b(U) + a(U) \cdot p), z^0)$, $\hat{x}_s$ – один из векторов $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{b(U)}$. В каждую из точек данного вида поместим по преследователю, получим $a(U) \cdot b(U)^{p+1}$ преследователей.

В каждую точку вида $y_j^0 + \beta \hat{x}_s$, где y_j^0 – начальное положение убегающего E_j в игре $\Gamma(a(U) \cdot b(U)^p, b(U)^{p-1}(b(U) + a(U) \cdot p), z^0)$, $\hat{x}_s$ – один из векторов $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{b(U)}$, поместим по убегающему, получим $b(U)^p(b(U) + a(U) \cdot p)$ убегающих. Еще $a(U) \cdot b(U)^p$ убегающих поместим внутрь шара D^0 единичного радиуса с центром в точке $\hat{y}$. Тогда общее число убегающих будет $b(U)^p \cdot (b(U) + a(U) \cdot (p + 1))$.

Рассмотрим получившуюся игру

$$\Gamma(a(U) \cdot b(U)^{p+1}, b(U)^p(b(U) + a(U) \cdot (p + 1)), z^0)$$

и покажем, что β можно выбрать так, чтобы в данной игре произошла поимка. В силу определения числа $b(U)$ в игре $\Gamma(b(U), 1, z^0)$ разрешима задача преследования, где $z^0 = (x_1, \dots, x_{b(U)}, y)$ и $\forall i \ \|x_i - \hat{x}_i\| \leq \varepsilon$, $\|\hat{y} - y\| \leq \varepsilon$. Понятно, что в игре

$\Gamma(b(U), 1, z^0)$ будет разрешима задача преследования, где $z^0 = (x_1, \dots, x_{b(U)}, y)$ и $\forall i$
 $\|x_i - \beta \hat{x}_i\| \leq \beta \varepsilon$, $\|\beta \hat{y} - y\| \leq \beta \varepsilon$. Выберем β так, чтобы $\beta \geq \frac{1}{\varepsilon} \max\{R, 1 + u^* T\}$, где
 $u^* = \max_{u \in U} \|u\|$. Покажем, что такой выбор β гарантирует поимку в игре
 $\Gamma(a(U) \cdot b(U)^{p+1}, b(U)^p (b(U) + a(U) \cdot (p+1)), z^0)$.

Обозначим через $A_j = A + \beta \hat{x}_j$, $j = 1, \dots, b(U)$; $\mu = a(U) \cdot b(U)^p$,
 $\nu = b(U)^{p-1} (b(U) + a(U) \cdot p)$, $P_1^i, \dots, P_\mu^i$ преследователей, начальные позиции кото-
 рых при $t = 0$ находятся в A_i ; через $E_1^i, \dots, E_\nu^i$ — убегающих, начальные позиции
 которых при $t = 0$ находятся в A_i , $i = 1, \dots, b(U)$; через $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_\mu$ — убегающих,
 начальные позиции которых при $t = 0$ лежат в шаре D^0 ; $x_1^i(T), \dots, x_\mu^i(T)$ — поло-
 жения преследователей $P_1^i, \dots, P_\mu^i$ в момент $t = T$; $\bar{y}_1(T), \dots, \bar{y}_\mu(T)$ — положения
 убегающих $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_\mu$ в момент $t = T$. Преследователи строят свои стратегии сле-
 дующим образом: сначала преследователи $P_1^i, \dots, P_\mu^i$ ловят убегающих $E_1^i, \dots, E_\nu^i$,
 $i = 1, \dots, b(U)$. В силу индукционного предположения поимка указанных убегающих
 произойдет не позднее момента T . В момент $t = T$ преследователи $P_1^1, \dots, P_{b(U)}^{b(U)}$
 начинают ловить убегающих $\bar{E}_i$, $i = 1, \dots, \mu$. В силу выбора β имеем $R \leq \beta \varepsilon$ и
 $1 + u^* T \leq \beta \varepsilon$, откуда для всех $i = 1, \dots, \mu$ и для всех $j = 1, \dots, b(U)$ выполнено
 $\|x_j^i(T) - \beta \hat{x}_j\| \leq \beta \varepsilon$ и $\|\bar{y}_i(T) - \beta \hat{y}\| \leq \beta \varepsilon$. Из последних неравенств и устойчивой раз-
 решимости задачи преследования в игре $\Gamma(b(U), 1, \hat{z}^0)$ следует возможность поим-
 ки убегающих $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_\mu$. В игре $\Gamma(a(U) \cdot b(U)^{p+1}, b(U)^p (b(U) + a(U) \cdot (p+1)), z^0)$
 происходит поимка. Теорема доказана.

В работе [2] вводится функция $f: N \rightarrow N$ следующим образом: $f(n) = \min\{m\}$
 в игре $\Gamma(n, m, z^0)$ происходит уклонение от встречи при любых начальных поло-
 жениях z^0 .

Следствие. Для любого выпуклого компакта U с непустой внутренностью су-
 ществует число $C(U) > 0$ такое, что для всех $n \in N$, $n > 1$ справедливо неравенст-
 во $f(n) \geq C(U) \cdot n \ln n$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что
 $f(a(U) \cdot b(U)^p) > b(U)^{p-1} \cdot (b(U) + a(U) \cdot p)$ для всех $p \in Z$, $p \geq 0$. Учитывая, что
 $a(U) \leq b(U)$ получаем $f(b(U)^p) \geq p \cdot a(U)^{p-1}$ для $p \in N$. Пусть n — произвольное
 натуральное число ($n \geq b(U)$), p — натуральное число такое, что $b(U)^p \leq n$ и
 $b(U)^{p+1} > n$. Тогда $f(n) \geq f(b(U)^p) \geq p \cdot a(U)^{p-1}$. Учитывая $p = [\log_{b(U)} n]$, полу-
 чаем требуемую оценку.

Построение стратегии убегающего, обеспечивающей его одновременную поимку несколькими преследователями

Будем рассматривать игру $\Gamma(n, 1, z^0)$. Обозначим $z_i = x_i - y$, $i = 1, \dots, n$. Считаем, что преследователи могут использовать стратегии вида $u_i(t) = U_i(t, z(s), v(s), 0 \leq s < t)$, а убегающий — позиционные стратегии $v(t) = V(t, z(t))$.

Теорема 2. Для любого z^0 , удовлетворяющего условию разрешимости задачи преследования группой преследователей одного убегающего, существует позиционное управление убегающего, при котором в момент окончания игры его ловят не менее чем $a(U)$ преследователей, т. е. если T — момент окончания игры, то $z_i(T) = 0$, $i = 1, \dots, a(U)$ и $z_i(t) \neq 0$ для всех i и $t \in [0, T)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную числовую последовательность l_j , $j = 1, 2, \dots$, $l_j > 0$ и $l_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Опишем итерационный процесс выбора управления убегающего для каждого l_j . Возьмем l_1 . По условию задачи $z_i(0) \neq 0$ для всех i . Если для всех $a(U)$ номеров i справедливо включение $z_i(0) \in S_{l_1}(0)$, то переходим к следующему числу l_2 . В противном случае для номеров $i_1, \dots, i_k$, $k < a(U)$ выполнено включение $z_{i_\xi}(0) \in S_{l_1}(0)$, $\xi = 1, \dots, k$ и $z_{i_\xi}(0) \notin S_{l_1}(0)$ для $\xi \neq 1, \dots, k$.

Обозначим $\{K_i\} = \{K(v_0) = \{t(v_0 - U), t \geq 0\} | v_0 - \text{крайняя точка компакта } U, z_i^0 \in K(v_0)\}$, где $i = i_1, \dots, i_k$. Выберем $v(s) = v_1$, $v_1 \in \partial U$, $v_1 \notin \{K_i\}$ для $i = i_1, \dots, i_k$ и $v_1 \in K$, где K — некоторый конус $K(v_0)$ такой, что $z_{i_\xi}(0) \in K$ для некоторого $\xi \neq 1, \dots, k$. При таком управлении в силу теоремы Н. Л. Григоренко [1] ни один из преследователей с номером $i = i_1, \dots, i_k$ убегающего не ловит. Покажем, что такое управление v_1 существует. Отметим, что существует крайняя точка $\hat{v}$ компакта U такая, что конус $K(\hat{v}) \notin \{K_i\}$ (в противном случае было бы выполнено условие разрешимости задачи преследования [1], т. е. $a(U) \leq k$ — противоречие). С другой стороны, по условию теоремы из позиции z^0 разрешима задача преследования, а значит, конус $K(\hat{v})$ содержит $z_{i_\xi}(0)$ для некоторого $\xi \neq 1, \dots, k$. Управление $\hat{v}$ является искомым.

Пусть убегающий придерживается такого управления при $s \in [0, t_1]$, где момент t_1 определяется соотношениями $z_{i_{\eta_1}}(s) \notin S_{l_1}(0)$ при $s < t_1$, а $z_{i_{\eta_1}}(t_1) \in S_{l_1}(0)$, где η_1 — некоторый номер такой, что $\eta_1 \neq 1, \dots, k$. Таким образом, t_1 — первый момент времени, когда преследующий игрок с номером i_{η_1} окажется в шаре $S_{l_1}(0)$. Если найдется преследователь с номером i_{η_2} , для которого $z_{i_{\eta_2}}(t_1) \notin S_{l_1}(0)$, то аналогично v_1 выбираем v_2 для $s \in [t_1, t_2]$, где момент t_2 определяется соотношениями $z_{i_{\eta_2}}(s) \notin S_{l_1}(0)$ при $t_1 \leq s < t_2$, а $z_{i_{\eta_2}}(t_2) \in S_{l_1}(0)$. Выбирая далее аналогичным об-

разом управления v_3, v_4 и т. д., убегающий соберет в $S_{l_i}(0)$ $a(U)$ преследователей, иначе он не будет пойман. Заметим, что на протяжении этого процесса $z_i(t) \neq 0$ для всех игроков.

Повторим этот процесс для l_2, l_3 и т. д. Выбранное управление убегания для любого l_j обеспечивает существование такого момента времени $t(l_j)$, что одновременно выполняются соотношения $z_j(t(l_j)) \in S_{l_j}(0)$, $z_i(s) \neq 0$, $s \leq t(l_j)$, $i = 1, \dots, a(U)$. Покажем, что такое управление убегающего обеспечивает результат, сформулированный в теореме. Предположим противное: поимка состоялась, но не все $a(U)$ преследователей поймали убегающего, т. е. существует момент времени T , для которого $z_{i_\xi}(T) = 0$, $\xi = 1, \dots, a(U) - m$, где $a(U) > m \geq 1$, причем для $t < T$ справедливо $z_i(t) \neq 0$ для $i = 1, \dots, a(U)$.

Возьмем $l < \min\{\|z_{i_k}\|, t \leq T, k = a(U) - m + 1, \dots, a(U)\}$, $l > 0$. Тогда при $t \leq T$ существуют номера i , для которых $z_i(t) \notin S_l(0)$, например $i_{a(U)-m+1}, \dots, i_{a(U)}$, а при $t > T$ существуют номера i , например $i_1, \dots, i_m$, для которых $z_i(t) = 0$. Таким образом, $v(t)$ таково, что существует $l > 0$ такое, что для любого t не выполняются одновременно условия $z_i(t) \neq 0$ и $z_i(t) \in S_l(0)$, $i = 1, \dots, a(U)$, что противоречит выбору управления убегающего. Теорема доказана.

Список литературы

1. Григоренко, Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 197 с.
2. Петров, Н. Н. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19. – С. 1366–1374.
3. Пиеничный, Б. Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. – 1976. – № 3. – С. 145–146.
4. Чикрий, А. А. Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 240 с.

УДК 519.254

Т. М. Спичкина, аспирант кафедры «Прикладная математика и информатика»
Ижевский государственный технический университет

СИНТЕЗ БЫСТРЫХ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ СВЕРТКИ

Приведен единый подход к генерации быстрых преобразований Фурье и, как следствие, синтез быстрых алгоритмов вычисления свертки.

Существует несколько подходов к вычислению свертки, но наиболее перспективными на данный момент являются методы, базирующиеся на Фурье-подобных преобразованиях, поскольку для них существуют быстрые преобразования (БП). В этом случае свертка вычисляется по схеме: