что обосновывается содержанием в нем нескольких подходов. Для того чтобы отделить различные составляющие алгоритма Винограда, они пронумерованы: одинаковые части отвечают за один и тот же этап выполнения алгоритма.

Список литературы

1. Макклеллан, Дж. Х. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов [Текст] / Дж. Х. Макклеллан, Ч. М. Рейдер – М. : Радио и связь. 1983. – 264 с.
2. Власенко, В. А. Методы синтеза быстрых алгоритмов свертки и спектрального анализа сигналов [Текст] / В. А. Власенко, Ю. М. Лаппа, Л. П. Ярославский – М. : Наука. 1990. – 180 с.
3. Лабунец, В. Г. Алгебраическая теория сигналов и систем [Текст] / В. Г. Лабунец. – Красноярск : Изд-во Красноярского ун-та. 1984. – 244 с.

УДК 517.929.2

Д. Н. Спичкин, аспирант кафедры «Прикладная математика и информатика»
Ижевский государственный технический университет

**О РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ
ВТОРОГО ПОРЯДКА С МОДУЛЯРНОЙ АРИФМЕТИКОЙ**

Приведены и доказаны теоремы о свойствах решений линейных однородных разностных уравнений второго порядка с модулярной арифметикой.

Введение

Обозначим через $[a, b] = \{a, a + 1, \dots, b\}$ упорядоченное множество неотрицательных целых чисел. Пусть $x = (x_1 \dots x_n)_m$, $p = (p_1 \dots p_n)_m$ – n -разрядные m -ичные представления этих чисел. Под операцией $x \ominus_m p$ понимаем поразрядную разность по модулю m (операция m -сдвига [1]).

Определение. Линейное разностное уравнение, где в качестве сдвига аргумента берется m -сдвиг называется линейным m -разностным уравнением или разностным уравнением с модулярной арифметикой.

Решениями линейных m -разностных уравнений произвольного порядка являются функции Виленкина – Крестенсона (ВКФ), записываемые в форме Пэли [1]:

$$\text{Pal}(p, x) = \exp\left(i \frac{2\pi}{m} \sum_{j=1}^n p_{n+1-j} x_j\right), \tag{1}$$

где x – аргумент, p – параметр, $(p, x) \in [0, m^n - 1] \times [0, m^n - 1]$, i – мнимая единица.

При решении линейных m -разностных уравнений часть разрядов параметра p фиксируется, а часть остается произвольной [1].

Будем рассматривать и исследовать свойства решений линейного m -разностного уравнения второго порядка

$$y(x \ominus_m 2) + k_1 y(x \ominus_m 1) + k_2 y(x) = 0. \tag{2}$$

Решение уравнений второго порядка при $m > 2$. Общие замечания

Рассмотрим линейное однородное m -разностное уравнение второго порядка (2).

Будем искать его фундаментальные решения в виде ВКФ (1):

$$y_0(x) = \text{Pal}(p, x) = e^{i \frac{2\pi}{m} \sum_{i=1}^n p_{n+1-i} x_i} = W^{\sum_{i=1}^n p_{n+1-i} x_i}, \quad (3)$$

где $W = e^{i \frac{2\pi}{m}}$, и под знаком суммы операции умножения и сложения проводятся по модулю m (в смысле обычной модулярной арифметики, описанной в [2]).

Подставим выражение (3) в исходное уравнение (2):

$$W^{p_1(x_n-2) + \sum_{i=1}^{n-1} p_{n+1-i} x_i} + k_1 W^{p_1(x_n-1) + \sum_{i=1}^{n-1} p_{n+1-i} x_i} + k_2 W^{p_1 x_n + \sum_{i=1}^{n-1} p_{n+1-i} x_i} = 0,$$

поскольку $W^{\sum_{i=1}^{n-1} p_{n+1-i} x_i} \neq 0$, то разделим на него обе части полученного уравнения:

$$W^{p_1(x_n-2)} + k_1 W^{p_1(x_n-1)} + k_2 W^{p_1 x_n} = 0;$$

$$W^{p_1 x_n} W^{-2p_1} + k_1 W^{p_1 x_n} W^{-p_1} + k_2 W^{p_1 x_n} = 0;$$

поскольку $W^{p_1 x_n} \neq 0$, то сократим на него обе части:

$$W^{-2p_1} + k_1 W^{-p_1} + k_2 = 0. \quad (4)$$

Определение. Выражение (4) называется *характеристическим уравнением* (относительно p) уравнения (2).

Заметим, что первые два слагаемых в (4), взятые без коэффициентов, представляют собой частные случаи сопряженных ВКФ при $p = 1$ и $p = 2$ соответственно:

$$\overline{\text{Pal}(p, 1)} = e^{-i \frac{2\pi}{m} (p_n \cdot 0 + \dots + p_2 \cdot 0 + p_1 \cdot 1)} = W^{-p_1};$$

$$\overline{\text{Pal}(p, 2)} = e^{-i \frac{2\pi}{m} (p_n \cdot 0 + \dots + p_2 \cdot 0 + p_1 \cdot 2)} = W^{-2p_1}.$$

Решим уравнение (4):

$$(W^{-p_1})^2 + k_1 W^{-p_1} + k_2 = 0,$$

следовательно,

$$(W^{-p_1})_{1,2} = \frac{-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 - 4k_2}}{2} = -\frac{k_1}{2} \pm \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2}. \quad (5)$$

Соотношение (5) накладывает ряд ограничений на выбор коэффициентов k_1 и k_2 , а именно:

1) так как модуль комплексной экспоненты $W^{-p_1} = e^{-i\frac{2\pi}{m}p_1}$ в левой части равенства есть единица, то коэффициенты k_1 и k_2 должны быть связаны соотношением

$$\left| -\frac{k_1}{2} \pm \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2} \right| = 1; \quad (6)$$

2) коэффициенты k_1 и k_2 , при заданном модуле m должны быть такими, чтобы

$$p_1 \in [0, m-1].$$

Решения характеристического уравнения (4) дают два значения разряда p_1 , которые обозначим $p_1^{(1)}$ и $p_1^{(2)}$. С учетом этих обозначений общее решение m -разностного уравнения (2) может быть записано в виде

$$y(x) = A\text{Pal}(p^{(1)}, x) + B\text{Pal}(p^{(2)}, x), \quad (7)$$

где A и B – константы, определяемые начальными условиями; $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ – произвольные частоты с фиксированными старшими m -ичными разрядами $p_1^{(1)}$ и $p_1^{(2)}$ соответственно.

Данные результаты приведены в [1], однако этот пример далее рассматривается там лишь для частного случая ($k_1 = 0, k_2 = 1$), а мы проведем более полный анализ уравнений 2-го порядка, стараясь обобщить приведенные в [1] результаты.

Решение линейных однородных m -разностных уравнений второго порядка при $m > 2$

Считаем, что рассматриваемые уравнения имеют только вещественные коэффициенты $k_i, i = 1, 2$.

Из формулы (5) приходим к соотношению

$$W_{1,2}^{-p_1} = -\frac{k_1}{2} \pm \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2}.$$

Из условия (6) следует, что

$$-\frac{k_1}{2} \pm \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2} = \pm 1.$$

Выделим два случая:

$$\text{А) } \frac{k_1^2}{4} - k_2 \geq 0 \Leftrightarrow k_2 \leq \frac{k_1^2}{4};$$

$$\text{Б) } \frac{k_1^2}{4} - k_2 < 0 \Leftrightarrow k_2 > \frac{k_1^2}{4}.$$

Рассмотрим случай А.

Для удобства введем обозначения:

$$a = -\frac{k_1}{2}; \quad b = \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2}. \quad (8)$$

Поэтому, согласно (6), получим $|a \pm b| = 1$, причем $b \geq 0$.

Возможны следующие ситуации:

1) $a + b = 1, a - b = 1$, тогда $a = 1 - b \Rightarrow a - b = 1 - b - b = 1 - 2b, 1 = 1 - 2b$, следовательно, $b = 0, a = 1$;

2) $a + b = 1, a - b = -1$, тогда $-1 = 1 - 2b$, следовательно, $b = 1, a = 0$;

3) $a + b = -1, a - b = 1$, тогда $a = -1 - b \Rightarrow a - b = -1 - b - b = -1 - 2b, 1 = -1 - 2b$, следовательно, $b = -1, a = 0$;

4) $a + b = -1, a - b = -1$, тогда $-1 = -1 - 2b$, следовательно, $b = 0, a = -1$.

То есть всевозможными вариантами являются следующие:

$$W_1^{-p_1} = a + b = 1; \quad W_2^{-p_1} = a - b = -1 \Rightarrow b = 1, \quad a = 0.$$

$$W_1^{-p_1} = a + b = 1; \quad W_2^{-p_1} = a - b = 1 \Rightarrow b = 0, \quad a = 1.$$

$$W_1^{-p_1} = a + b = -1; \quad W_2^{-p_1} = a - b = 1 \Rightarrow b = -1, \quad a = 0.$$

$$W_1^{-p_1} = a + b = -1; \quad W_2^{-p_1} = a - b = -1 \Rightarrow b = 0, \quad a = -1.$$

Предпоследнее соотношение противоречит тому, что $b \geq 0$, поэтому в данном случае не существует линейного m -разностного уравнения с вещественными коэффициентами, имеющего решения в базисе ВКФ.

Следовательно, получаем следующие соотношения и разрешенные значения коэффициентов для уравнений второго порядка при $m > 2$.

1. При $-\frac{k_1}{2} + \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2} = 1, -\frac{k_1}{2} - \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2} = -1$ имеем:

$$a = -\frac{k_1}{2} = 0, \quad b = \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2} = 1.$$

Значит,

$$k_1 = 0, \quad k_2 = -1.$$

Решение характеристического уравнения будет два: $p_1^{(1)} = 0; p_1^{(2)} = \frac{m}{2}$, так как в

данном случае оно сводится к решению уравнений $e^{-i\frac{2\pi}{m}p_1} = \pm 1$.

Следовательно, при +1 имеем:

$$-i\frac{2\pi}{m}p_1^{(1)} = -i2\pi k, \quad k \in Z \Rightarrow p_1^{(1)} = mk \in [0, m-1] \Rightarrow p_1^{(1)} = 0.$$

При -1 имеем:

$$-i \frac{2\pi}{m} p_1^{(2)} = i(\pi - 2\pi k) \quad k \in Z \Rightarrow p_1^{(2)} = \frac{m}{2}(2k - \pi) \in [0, m - 1] \Rightarrow p_1^{(2)} = \frac{m}{2}.$$

2. При $-\frac{k_1}{2} + \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2} = 1, \quad -\frac{k_1}{2} - \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2} = 1$ имеем:

$$a = -\frac{k_1}{2} = 1, \quad b = \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2} = 0.$$

Следовательно,

$$k_1 = -2, \quad k_2 = 1.$$

Решение характеристического уравнения будет только одно: $p_1^{(1)} = 0$, так как в

данном случае оно сводится к решению уравнения $e^{-i \frac{2\pi}{m} p_1} = 1$.

Поэтому $-i \frac{2\pi}{m} p_1^{(1,2)} = 0 + i(\arg(1) - 2\pi k) = -i2\pi k \in [0, m - 1] \Rightarrow p_1^{(1,2)} = 0$, что в результате дает значение разряда $p_1^{(1,2)} = 0$.

3. При $-\frac{k_1}{2} + \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2} = -1, \quad -\frac{k_1}{2} - \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2} = -1$ имеем:

$$a = -\frac{k_1}{2} = -1, \quad b = \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2} = 0.$$

Следовательно,

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 1.$$

Решение характеристического уравнения снова будет только одно: $p_1^{(1,2)} = \frac{m}{2}$, так как в данном случае характеристическое уравнение сводится к решению уравнения $e^{-i \frac{2\pi}{m} p_1} = -1$.

Следовательно, доказана следующая теорема [3].

Теорема 1. Пусть в уравнении (2) коэффициенты $k_i, i = 1, 2$ – постоянные и вещественные, и пусть $k_2 \leq \frac{k_1^2}{4}$. Тогда возможны три ситуации (соотношения коэффициентов), при которых существуют решения уравнения (2) вида (1):

1) при $k_1 = 0, k_2 = -1$ решений характеристического уравнения (3) будет два:

$$p_1^{(1)} = 0; \quad p_1^{(2)} = \frac{m}{2};$$

2) при $k_1 = -2, k_2 = 1$ решение характеристического уравнения (3) будет только одно:

$$p_1^{(1,2)} = 0;$$

3) при $k_1 = 2, k_2 = 1$ решение характеристического уравнения (3) будет только одно:

$$p_1^{(1,2)} = \frac{m}{2}.$$

Рассмотрим случай Б.

В данном случае правую часть характеристического уравнения (4) можно записать в следующем виде:

$$-\frac{k_1}{2} \pm \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2} = -\frac{k_1}{2} \pm i\sqrt{k_2 - \frac{k_1^2}{4}}.$$

При обозначениях

$$a = -\frac{k_1}{2}, \quad b = \sqrt{k_2 - \frac{k_1^2}{4}}$$

правая часть характеристического уравнения (4) принимает вид

$$a \pm ib, \quad b > 0.$$

Условие (6) равносильно следующему:

$$|a \pm ib| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(-\frac{k_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{k_2 - \frac{k_1^2}{4}}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{k_2} = 1,$$

поскольку коэффициенты уравнения должны быть вещественными, то

$$k_2 = 1.$$

В случае Б предполагается, что

$$k_2 > \frac{k_1^2}{4} \Leftrightarrow 1 > \frac{k_1^2}{4} \Leftrightarrow |k_1| < 2 \Leftrightarrow k_1 \in (-2; 2).$$

Ограничение же на значения разряда p_1 дает следующее требование:

$$p_{1,2}^{(1)} = -m \left(\frac{\arctg\left(\frac{\pm\sqrt{4-k_1^2}}{-k_1}\right)}{2\pi} + k \right) \in [0, m-1], \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (9)$$

Обоснуем формулу (9). Поскольку

$$e^{-\frac{2\pi}{m}p_1} = -\frac{k_1}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{k_1^2}{4}},$$

то

$$\begin{aligned}
 -i \frac{2\pi}{m} p_1 &= \ln \left(\sqrt{\frac{k_1^2}{4} + 1 - \frac{k_1^2}{4}} \right) + i \left(\operatorname{arctg} \frac{\pm \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{4}}}{-\frac{k_1}{2}} + 2\pi k \right) = \\
 &= 0 + i \left(\operatorname{arctg} \frac{\pm 2 \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{4}}}{-k_1} + 2\pi k \right) = i \left(\operatorname{arctg} \frac{\pm \sqrt{4 - k_1^2}}{-k_1} + 2\pi k \right),
 \end{aligned}$$

где $k \in Z$, $k_1 \in (-2; 2)$.

Следовательно, получаем (9).

Доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть в уравнении (2) коэффициенты $k_i, i = 1, 2$ – постоянные и вещественные, и пусть $k_2 > \frac{k_1^2}{4}$. Тогда:

1) для существования решения вида (1) необходимо, чтобы

$$k_1 \in (-2; 2) \text{ и } k_2 = 1;$$

2) решениями характеристического уравнения (4) являются значения разряда $p_{1,2}^{(1)}$, определяемые из условия (9);

3) решения m -разностного уравнения (2) являются линейно независимыми.

Рассмотрим выражение (9) при некоторых конкретных значениях коэффициента k_1 .

1. Пусть $k_1 = 0$.

В этом случае

$$e^{-i \frac{2\pi}{m} p_1} = \pm i, \quad -i \frac{2\pi}{m} p_1^{(1,2)} = i(\arg(\pm i) + 2\pi k), \quad k \in Z.$$

Следовательно,

$$p_1^{(1,2)} = \frac{-m}{2\pi} \left(\begin{matrix} \frac{\pi}{2} \\ -\pi \\ \frac{-\pi}{2} \end{matrix} + 2\pi k \right) = m \left(\begin{matrix} \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{matrix} - k \right) \in [0, m-1],$$

следовательно,

$$p_1^{(1)} = m \left(\frac{-1}{4} + 1 \right) = \frac{3m}{4};$$

$$p_1^{(2)} = m \left(\frac{1}{4} - 0 \right) = \frac{m}{4}.$$

Мы видим, что получается два линейно независимых решения:

$$\text{Pal}(p^{(1)}, x); \text{Pal}(p^{(2)}, x).$$

В силу целочисленности разряда p_1 необходимо имеем, что m должно быть кратно 4.

Полученный результат (для значений коэффициентов $k_1 = 0, k_2 = 1$) приведен в [1]. Однако, как видно, он просто является частным случаем более общей теории.

2. При $k_1 \in (0, 2)$ получаем, что выражению

$$W^{-p_1} = \frac{-k_1 \pm i\sqrt{4-k_1^2}}{2}$$

соответствует следующее соотношение:

$$p_1^{(1,2)} = m \left(-k - \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2\pi} \arctg \frac{\sqrt{4-k_1^2}}{k_1} \right), p_1^{(1,2)} \in [0, m-1], k \in \mathbf{Z}.$$

3. При $k_1 \in (-2, 0)$ получаем, что выражению

$$W^{-p_1} = \frac{-k_1 \pm i\sqrt{4-k_1^2}}{2}$$

соответствует следующее соотношение:

$$p_1^{(1,2)} = m \left(\pm \frac{1}{2\pi} \arctg \frac{\sqrt{4-k_1^2}}{k_1} - k \right), p_1^{(1,2)} \in [0, m-1], k \in \mathbf{Z}.$$

Теорема 3. Пусть в уравнении (2) коэффициенты $k_i, i = 1, 2$ – постоянные и вещественные, и пусть $k_2 > \frac{k_1^2}{4}$. Тогда существует счетное множество различных уравнений (2), имеющих решения вида (1).

Доказательство. Согласно (9) верно соотношение

$$p_{1,2}^{(1)} = -m \left(\frac{\arctg \left(\mp \frac{\sqrt{4-k_1^2}}{k_1} \right)}{2\pi} + k \right) \in N^0 \Leftrightarrow \arctg \left(\mp \frac{\sqrt{4-k_1^2}}{k_1} \right) = \frac{p}{q} \pi,$$

где p и q – целые числа.

Следовательно,

$$\mp \frac{\sqrt{4-k_1^2}}{k_1} = \text{tg} \left(\frac{p}{q} \pi + \pi l \right), l \in \mathbf{Z}, \frac{4-k_1^2}{k_1^2} = \text{tg}^2 \left(\frac{p}{q} \pi + \pi l \right), 4 = \left(1 + \text{tg}^2 \left(\frac{p}{q} \pi + \pi l \right) \right) k_1^2,$$

$$k_1 = \frac{\pm 2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{p}{q}\pi + \pi l\right)}} \in (-2, 2).$$

Поскольку существует счетное множество параметров p, q, l , то существует и счетное множество коэффициентов $k_1 \in (-2, 2)$, а следовательно, и счетное количество линейных m -разностных уравнений второго порядка, имеющих решения в базисе ВКФ.

Теорема доказана.

Решение уравнений второго порядка при $m = 2$

Теперь рассмотрим случай $m = 2$, т. е. базис из функций Уолша, являющихся частным случаем ВКФ [1]. При этом ВКФ, входящие в характеристическое уравнение

$$\overline{\operatorname{Pal}}(p, 2) + k_1 \overline{\operatorname{Pal}}(p, 1) + k_2 = 0,$$

могут быть записаны в виде

$$\overline{\operatorname{Pal}}(p, 1) = \operatorname{Pal}(p, 1) = e^{i\pi p_1} = (-1)^{p_1};$$

$$\overline{\operatorname{Pal}}(p, 2) = \operatorname{Pal}(p, 2) = e^{i\pi p_2} = (-1)^{p_2},$$

где p_1 и p_2 – два старших разряда в двоичном представлении частоты p .

Следовательно, характеристическое уравнение приобретает вид

$$(-1)^{p_2} + k_1(-1)^{p_1} + k_2 = 0. \tag{10}$$

Отсюда видно, что на коэффициенты k_1 и k_2 опять должны быть наложены некоторые ограничения.

Должны одновременно удовлетворяться два из следующих четырех соотношений [1]:

- 1) $1 + k_1 + k_2 = 0 \quad (p_1 = 0, p_2 = 0),$
 - 2) $-1 + k_1 + k_2 = 0 \quad (p_1 = 0, p_2 = 1),$
 - 3) $1 - k_1 + k_2 = 0 \quad (p_1 = 1, p_2 = 0),$
 - 4) $-1 - k_1 + k_2 = 0 \quad (p_1 = 1, p_2 = 1).$
- (11)

В зависимости от того какая пара из этих уравнений удовлетворяется, будут получены две комбинации разрядов p_1 и p_2 , определяющие искомые частоты $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$. У этих частот окажутся фиксированными только два старших разряда, а остальные могут быть произвольными.

Не трудно заметить, что не все условия (11) являются совместными, а именно: несовместны условия 1 и 2, 3 и 4. Следовательно, доказана теорема.

Теорема 4. Пусть в уравнении (2) коэффициенты $k_i, i = 1, 2$ – постоянные и вещественные, и модуль $m = 2$. Тогда:

1) существует всего 4 m -разностных уравнения (2), имеющих решения в базисе ВКФ;

2) при решении уравнений (2) фиксируется два разряда параметра p , исходя из соотношений (11);

3) каждое уравнение (2) имеет по два линейно независимых решения.

О функции Коши для уравнений второго порядка

Определим функцию Коши для уравнения (2) следующим образом:

Определение. Функцию $k(x, s)$, удовлетворяющую однородному m -разностному уравнению (2) при каждом s по x и начальным условиям

$$k(s \ominus 2, s \ominus 2) = 0; k(s \ominus 1, s \ominus 2) = 1 \quad (12)$$

при каждом s , назовем функцией Коши.

Лемма 1. При $m > 2$ имеем:

$$(s \ominus 2) \oplus 1 = s \ominus 1.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\begin{aligned} (s \ominus 2) \oplus 1 &= (s_1 s_2 \dots ((s_n - 2)_m + 1)_m) = (s_1 s_2 \dots ((s_n + m - 2)_m + 1)_m) = \\ &= (s_1 s_2 \dots (s_n + (m - 2 + 1))_m) = (s_1 s_2 \dots (s_n + m - 1)_m) = (s_1 s_2 \dots (s_n - 1)_m) = s \ominus 1. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

При $m > 2$ построим следующий объект.

Пусть $y_1(t), y_2(t)$ – два линейно независимых решения уравнения (2), тогда введем функцию

$$k(x, s) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(s \oplus 1) & y_2(s \oplus 1) \end{vmatrix}}. \quad (13)$$

Данная функция по построению есть решение уравнения (2), и при этом

$$k(s \ominus 2, s \ominus 2) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(s \ominus 2) & y_2(s \ominus 2) \\ y_1(s \ominus 2) & y_2(s \ominus 2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(s \ominus 2) & y_2(s \ominus 2) \\ y_1(s \ominus 1) & y_2(s \ominus 1) \end{vmatrix}} = 0;$$

$$k(s \ominus 1, s \ominus 2) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(s \ominus 2) & y_2(s \ominus 2) \\ y_1(s \ominus 1) & y_2(s \ominus 1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(s \ominus 2) & y_2(s \ominus 2) \\ y_1(s \ominus 1) & y_2(s \ominus 1) \end{vmatrix}} = 1.$$

Действия с аргументом корректны на основании леммы 1. Следовательно, построенный объект есть функция Коши.

Важным случаем является случай $m = 2$. При таком значении m нельзя по приведенной формуле (13) построить функцию Коши, поскольку в отличие от обычной модулярной арифметики [2], где

$$2_{10} - 1_{10} = (10)_2 - (01)_2 = (01)_2 = 1_{10},$$

при m -сдвиге получаем:

$$2_{10} \ominus_2 1_{10} = (10)_2 \ominus_2 (01)_2 = ((1-0)_2 (0-1)_2) = (11)_2 = 3_{10} \neq 1_{10}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (s \ominus_2 2) \oplus_2 1 &= (s_1 s_2 \dots s_n)_2 \ominus_2 (00 \dots 10)_2 \oplus_2 (00 \dots 01)_2 = (s_1 s_2 \dots (s_{n-1} - 1)_2 (s_n + 1)_2) = \\ &= (s_1 s_2 \dots (s_{n-1} + 1)_2 (s_n + 1)_2) = s \oplus_2 3. \end{aligned}$$

Поэтому

$$k(s \ominus_2 1, s \ominus_2 2) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(s \ominus_2 2) & y_2(s \ominus_2 2) \\ y_1(s \ominus_2 1) & y_2(s \ominus_2 1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(s \ominus_2 2) & y_2(s \ominus_2 2) \\ y_1(s \oplus_2 3) & y_2(s \oplus_2 3) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y_1(s \ominus_2 10_2) & y_2(s \ominus_2 10_2) \\ y_1(s \ominus_2 01_2) & y_2(s \ominus_2 01_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(s \ominus_2 10_2) & y_2(s \ominus_2 10_2) \\ y_1(s \oplus_2 11_2) & y_2(s \oplus_2 11_2) \end{vmatrix}} \neq 1.$$

Значит, формула (13) не дает функции Коши в случае $m = 2$.

Замечание. Формула (13) аналогична соответствующим формулам для построения функции Коши классических разностных и дифференциальных однородных уравнений. Аналогия нарушается лишь в случае $m = 2$.

Список литературы

1. Трахтман, А. М. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах [Текст] / А. М. Трахтман, В. А. Трахтман. – М. : Сов. радио. 1975. – 239 с.
2. Виноградов, И. М. Основы теории чисел [Текст] / И. М. Виноградов. – М. : Наука. 1972. – 167 с.
3. Спичкин, Д. Н. О решениях разностных уравнений второго порядка на конечных интервалах [Текст] / Д. Н. Спичкин // Вестн. Удмуртск. гос. ун-та. – 2008. – Вып. 2. – С. 142–143.