4. *Карпов, А. Е.* Научные основы и методы поведения независимых экспертиз / А. Е. Карпов, В. Г. Тоценко, А. Г. Ласковенко, И. А. Быков // Технологии экспертизы : учеб. пособие. – 2-е изд., доп. – М. : Изд-во МГУ, 2006.

5. *Чиркова, А. В.* Многокритерильная оптимизация функций большой размерности с помощью генетического алгоритма с вещественным кодированием // Интеллектуальные системы в производстве. – 2007. – № 2.

УДК 519.854

А. С. Шаура, студент
Ижевский государственный технический университет

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ПОИСКОМ ДОПУСТИМЫХ ОСОБЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ-РАВЕНСТВАМИ

Предложен алгоритм решения задач условной оптимизации при ограничениях-равенствах с применением генетических операторов с вещественным кодированием. В отличие от метода штрафных функций предлагаемый метод не требует подбора весовых коэффициентов, поскольку допустимые решения выбираются на этапе отбора, а их количество в популяции специально повышается.

В общем виде задача условной оптимизации с целевой функцией $F(X)$ и системой ограничений $g_i(X)$ и $h_i(X)$ имеет вид

$$F(X) = F(x_1, x_2, ..., x_N) \to \min ; \quad (1)$$

$$g_i(X) \le 0, \quad i = \overline{1, m_1} ; \quad (2)$$

$$h_i(X) = 0, \quad i = \overline{1, m_2} . \quad (3)$$

В частном случае задача условной оптимизации (1)–(3) может иметь более простой вид и принадлежать к одному из классов, выделенных по типу ограничений: задачи с ограничениями-неравенствами (1), (2) и задачи с ограничениями-равенствами (1), (3). Для каждого класса характерна своя специфика. В частности при решении исходной задачи с ограничениями в виде неравенств с помощью генетического алгоритма в популяции может присутствовать достаточно много допустимых особей, для которых выполняются ограничения $g_i(X)$, причем исходя только из функций ограничений нельзя как-либо сравнить эти особи между собой, поэтому они равнодопустимы, а лучшей из них логично считать ту особь, для которой функция минимальна. Эффективный метод решения таких задач, основанный на параллельном поиске допустимых особей, предложен в статье Прохоровской Е. В., Тененева В. А., Шауры А. С. (Интеллектуальные системы в производстве. 2008. № 2. С. 46–55).

В случае же ограничений-равенств понятие допустимости особи приобретает относительный характер, поскольку точное выполнение равенств (3) практически невозможно, поэтому говорить о допустимости можно лишь с некоторой оговоркой на то, что указанные равенства выполняются с известной погрешностью ε. Кроме того в отличие от задач с ограничениями-неравенствами в популяции всегда есть особь, для которой ограничения $h_i(X)$ выполняются с наименьшей погрешностью, что отличает ее от остальных, и можно говорить о ее лучшей приспособленности в популяции, т. к. решается задача условной минимизации, и в первую очередь на особей популяции накладывается требование выполнения ограничений, а уже потом – минимума целевой функции. Метод, предложенный в статье Прохоровской Е. В., Тененева В. А., Шауры А. С. для ограничений-неравенств, по аналогии можно применить и к задачам с ограничениями в виде равенств, но он уже не даст необходимой эффективности. Причиной этого является достаточно низкое число особей, которые бы удовлетворяли равенствам (3) с малыми погрешностями, т. е. особей, которых можно было бы назвать допустимыми в случае ограничений-равенств.

С учетом сказанного генетический алгоритм с методом параллельного поиска был доработан для задач (1), (3). При этом в исходном алгоритме изменилось понятие допустимости особей, и была добавлена дополнительная популяция $\widetilde{H}$ с целевой функцией (4), которая позволяет увеличить количество «хороших» особей в основной популяции ограничений $\widetilde{G}$:

$$H(X) = \sum_{i=1}^{i=m_2} |h_i(X)| \to \min . \tag{4}$$

Иными словами, основная цель введения популяции – это поиск особей – решений системы (3). Понятно, что такое решение может быть не единственным, поэтому как только найдено одно из решений, оно добавляется в основную популяцию $\widetilde{G}$ и параллельно начинается поиск следующего решения в популяции $\widetilde{H}$, таким образом, повышается процент допустимых особей в $\widetilde{G}$. Задачи эволюции основных популяций $\widetilde{F}$ и $\widetilde{G}$ те же, что и в [1] – поиск минимума исходной целевой функции (1) с акцентом на уже найденные допустимые решения.

В случае ограничений-равенств взаимодействие популяций в процессе поиска схематично представлено на рисунке.

В соответствии с рисунком если на некоторой итерации t в популяции $\widetilde{H}$ найдено решение $X_{\widetilde{H}}^{best}$ системы (3), то оно передается в популяцию $\widetilde{G}_t$. После чего популяции $\widetilde{F}_t$ и $\widetilde{G}_t$ скрещиваются (на схеме обозначено символом $\otimes$), и результат скрещивания $\widetilde{Y}$ замещает каждую из них. Для полученных таким образом $\widetilde{F}_{t+1}$ и $\widetilde{G}_{t+1}$ генерируется следующее поколение $\widetilde{F}_{t+2}$ и $\widetilde{G}_{t+2}$ по классическому генетическому алгоритму с целевыми функциями (1) и (4) соответственно. Параллельно с этим в популяции $\widetilde{H}$ ищется следующее допустимое решение. Фрагмент, представленный на рисунке, – это одна глобальная итерация алгоритма, поэтому далее все снова повторяется сначала.

Исходя из представленной схемы можно определить роль каждой популяции в предложенном алгоритме. Например, популяция $\widetilde{F}$ отвечает за поиск минимума функции (1) среди допустимых решений без учета ограничений непосредственно, популяция $\widetilde{G}$ – за поиск допустимых решений без учета характера минимизируемой функции, а популяция $\widetilde{H}$ позволяет разнообразить и повысить процент допустимых особей в $\widetilde{G}$. Связующим звеном является скрещивание $\widetilde{F}$ и $\widetilde{G}$, что позволяет объединить поиск минимума целевой функции с поиском допустимых особей и в конечном счете решать задачу условной минимизации.

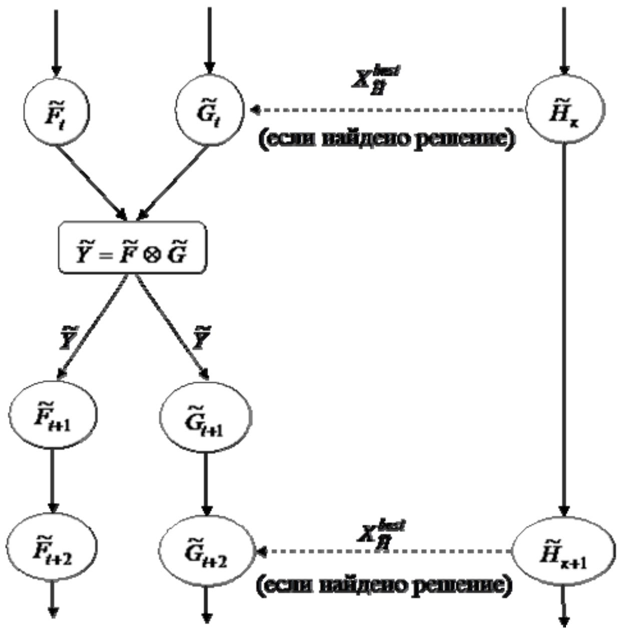

Схема взаимодействия популяций в процессе поиска

Тестирование предложенного генетического алгоритма с параллельным поиском допустимых особей (ГАПП) проводилось в сравнении с методом штрафных функций в сочетании с вещественным генетическим алгоритмом (ШФ) на задачах минимизации

– функции Розенброка:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n-1} 100\left(x_{i+1} - x_i^2\right)^2 + \left(1 - x_i\right)^2,\ x_i \in [-5,5],\ i = \overline{1, n-1};$$

глобальный минимум $x_i^{\text{опт}} = 1,\ i = \overline{1, n-1};\ F\left(X^{\text{опт}}\right) = 0;$

– многоэкстремальной функции Розенброка (м.э.):

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[1 + \left(x_i - 1\right)^2 \sin^2\left(2\pi x_i\right)\right]\left[100\left(x_{i+1} - x_i^2\right)^2 + \left(1 - x_i\right)^2\right],\ x_i \in [-5,5],\ i = \overline{1, n-1};$$

глобальный минимум $x_i^{\text{опт}} = 1,\ i = \overline{1, n-1};\ F\left(X^{\text{опт}}\right) = 0;$

– функции Растригина:

$$F(X)=\sum_{i=1}^{n}10\left(1-\cos\left(2\pi x_i\right)\right)+x_i^2,\ x_i\in[-5,5],\ i=\overline{1,n};$$

глобальный минимум $x_i^{\text{опт}}=0,\ i=\overline{1,n};\ F\left(X^{\text{опт}}\right)=0;$

– функции $F1$:

$$F(X)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_{i+1}^2+x_i^2\right)^{0,25}\left(\sin^2\left(50\left(x_{i+1}^2+x_i^2\right)^{0,1}\right)+1\right),\ x_i\in[-5,5],\ i=\overline{1,n-1};$$

глобальный минимум $x_i^{\text{опт}}=0,\ i=\overline{1,n-1};\ F\left(X^{\text{опт}}\right)=0;$

– при ограничениях, задающих окружность радиуса R для каждой пары соседних переменных:

$$x_i^2+x_{i+1}^2=R^2,\ i=\overline{1,\ n-1}. \tag{5}$$

Таким образом, количество ограничений-равенств равно размерности минимизируемой функции (1).

В тестовых задачах минимизация проводилась до тех пор, пока не выполнится условие

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left|h_i(X)\right|<\varepsilon,\ \varepsilon=0,001. \tag{6}$$

Задача 1. Минимизация функции Розенброка и многоэкстремальной функции Розенброка, когда глобальный минимум функции лежит на задаваемой границе (т. е. $R=\sqrt{2}$). Аналитическое значение минимума – $x_i^{\text{опт}}=1,\ i=\overline{1,n-1}$, $F\left(X^{\text{опт}}\right)=0$. Результаты по 20 запускам приведены в табл. 1 и 2 соответственно.

Таблица 1. **Минимизация функции Розенброка, когда глобальный минимум лежит на границе**

Метод	Размерность							
	$N=10$		$N=30$		$N=50$		$N=100$	
	min	время	min	время	min	время	min	время
ГАПП	10^{-8} [10^{-3}]	0,5	10^{-8} [10^{-5}]	2,4	10^{-8} [10^{-6}]	4,7	10^{-9} [10^{-6}]	10,1
ШФ	10^{-7} [10^{-1}]	2,3	10^{-7} [10^{-3}]	11,1	10^{-6}	15,8	10^{-6}	28,1

Таблица 2. **Минимизация многоэкстремальной функции Розенброка, когда глобальный минимум лежит на границе**

Метод	Размерность							
	$N=10$		$N=30$		$N=50$		$N=100$	
	min	время	min	время	min	время	min	время
ГАПП	10^{-7} [10^{-3}]	0,18	10^{-8}	0,3	10^{-8}	4,2	10^{-9}	9,2
ШФ	10^{-7} [10^{-2}]	1,7	10^{-6}	15,0	10^{-6}	19,9	10^{-6}	32,1

Из таблиц видно, что когда глобальный минимум лежит на границе, предложенный метод работает эффективнее: за меньшее время он позволяет найти меньшее значение, но в ряде случаев он сходится к точке $x_i = -1$, $i = \overline{1, n-1}$, где значение функции Розенброка и многоэкстремальной функции Розенброка не является оптимальным. Значение функций в этой точке равно 3636, 11716, 19796 и 39996 для размерностей $N = 10$, $N = 30$, $N = 50$ и $N = 100$ соответственно. Такие результаты объяснимы тем, что прекращение вычислений осуществляется по условию (6), а поскольку в указанной точке оно тоже выполнимо, и если не будет в популяции другой особи, для которой ограничения выполнялись бы с меньшей погрешностью, то выполнение алгоритма завершится с указанным ложным значением минимума. Описанная ситуация возможна, потому что специфика предлагаемого алгоритма такова, что лучшей признается особь, для которой наилучшим образом выполняются ограничения.

Задача 2. Минимизация функций размерности $N = 10$, $N = 30$ и $N = 50$, когда глобальный минимум не лежит на заданной границе. $R = 2$. Результаты по 20 запускам алгоритма приведены в табл. 3–5, в квадратных скобках указано наибольшее значение функции, полученное в серии запусков, а без скобок – наименьшее.

Таблица 3. **Сравнение методов на функциях размерности** $N = 10$

Функция	ГАПП		ШФ	
	Минимум	Время, с	Минимум	Время, с
Розенброка	310,35 [310,39]	0,16	310,24 [310,40]	4,3
Розенброка (м.э.)	324,38 [324,40]	0,07	324,35 [324,45]	8,2
Растригина	20,31; 20,47; 05,82; 20,24; 72,43; 05,18; 69,24; 20,00; 94,03; 205,82; 67,12; 8,15; 74,69; 32,74; 21,71; 68,58; 24,21; 91,38; 21,77; 20,56	1,6	205,81; 205,82; 205,82; 122,17; 205,81; 205,80; 205,81; 205,82; 205,81; 171,89; 37,25; 20,10; 54,98; 205,24; 205,81; 205,81; 205,82; 205,82; 205,81; 205,81	2,5
$F1$	20,3666 [20,3669]	5,13	20,365 [20,367]	5,7

Таблица 4. **Сравнение методов на функциях размерности** $N = 30$

Функция	ГАПП		ШФ	
	Минимум	Время, с	Минимум	Время, с
Розенброка	1000,09 [1000,10]	5,4	999,85 [1000,16]	8,3
Розенброка (м.э.)	1045,304 [1045,308]	2,7	1045,27 [1045,37]	10,0
Растригина	616,67; 209,65; 209,30; 616,25; 218,67; 160,08; 60,10; 617,25; 252,38; 251,48; 205,38; 214,62; 204,26; 617,41; 71,47; 215,75; 61,40; 341,02; 77,55; 61,03	17,5	617,44; 617,45; 617,46; 180,35; 191,39; 616,91; 616,91; 617,46; 617,42; 617,52; 617,48; 617,47; 617,45; 617,43; 617,44; 617,41; 71,47; 215,75; 616,67; 209,65	20,2
$F1$	65,57 [65,62]	40,7	65,620 [65,629]	47,7

Таблица 5. **Сравнение методов на функциях размерности** $N = 50$

Функция	ГАПП		ШФ	
	Минимум	Время, с	Минимум	Время, с
Розенброка	1689,79 [1689,81]	15,8	1689,71 [1689,90]	23,3
Розенброка (м.э.)	1766,203 [1766,209]	10,5	1766,14 [1766,24]	21,4
Растригина	–	–	–	–
$F1$	110,883 [110,886]	63,4	110,885 [110,887]	68,4

Для сравнения была реализована простейшая модификация метода штрафных функций с постоянной величиной штрафа. Из табл. 3–5 видно, что с функцией Растригина не справился ни один из методов. Причина этого – огромное число локальных экстремумов данной функции, в том числе и на заданной границе, причем некоторые из этих экстремумов мало отличаются как по координатам точек локального минимума, так и по значениям функции в этих точках, что хорошо видно из данных табл. 3. Для остальных тестовых функций генетический алгоритм с параллельным поиском допустимых особей оказался эффективнее, как в плане времени вычислений, так и потому, что найденные значения имели меньший разброс относительно реального значения минимума. К достоинствам этого метода также можно отнести и то, что он не требует настройки весовых коэффициентов для каждой конкретной функции и, следовательно, является достаточно универсальным.

В приведенных случаях предлагаемый метод быстрее справляется с поиском, поскольку в нем разделены поиск минимума и поиск допустимых решений. Несмотря на большое количество ограничений, они имеют достаточно простой вид, поэтому решить систему (3) и выбрать из допустимых решений наименьшее намного проще, чем искать минимум штрафной функции. В предложенном методе каждое следующее приближение удовлетворяет ограничениям лучше предыдущего, т. е. в процессе поиска значение условия (6) постоянно уменьшается, что нельзя сказать о методе штрафных функций. В методе с параллельным поиском минимизация проводится в направлении строгого убывания погрешности (6), в то время как в методе штрафных функций – в направлении убывания самой штрафной функции, имеющей сложный характер. Главная проблема метода штрафных функций заключается в том, что минимизируемая функция содержит в себе слагаемые соответствующие целевой функции и ограничениям, поэтому уменьшение слагаемых, соответствующих ограничениям, которое, как правило, ведет к увеличению слагаемого, соответствующего целевой функции, еще не ведет к уменьшению значения штрафной функции. Такое поведение штрафной функции наиболее заметно на конечных этапах алгоритма при приближении к минимуму, когда колебания значений целевой функции и погрешности (6) взаимно компенсируют друг друга и процесс поиска застревает в текущей точке, не давая перейти к следующему приближению.