

Анализ результатов позволяет сделать вывод, что появление трещин на фасаде здания действительно было вызвано неравномерной осадкой фундамента, которая, в свою очередь, возникла в результате локального ухудшения свойств грунтового массива. Можно считать, что построенная *пространственная модель* системы «грунт – фундамент – строение» адекватна реальной системе и ее можно использовать для анализа НДС аналогичных строений.

Библиографические ссылки

1. Горбунов-Пассадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И. Расчет конструкций на упругом основании. – М. : Стройиздат, 1984. – 679 с.
2. СНиП 2.01.03-84*. Бетонные и железобетонные конструкции. Нормы проектирования.
3. Елисеев В. Н., Телегина М. В. Особенности моделирования взаимосвязи пространственных данных различно-

го характера // Приволж. науч. вестн. – 2012. – № 5. – С. 13–15.

4. Муравьев К. А. Методики оценки трещиностойкости конструкционных сталей // Приволж. науч. вестн. – 2012. – № 3. – С. 18–27.

5. Ючиков Б. С., Добрынин А. О. Определение величины выпора куста из двуконусных свай силами морозного пучения в полевых условиях // Приволж. науч. вестн. – 2012. – № 12. – С. 23–37.

6. Зубенко В. Л., Емельянова И. В., Емельянов Н. В. Методика применения CAD/CAM/CAE-систем в научных исследованиях // Приволж. науч. вестн. – 2013. – № 2. – С. 18–23.

7. Корнилов Д. Ю., Гурьянова А. С. Применение метода свободного высоконагруженного удара для улучшения прочностных характеристик силикатных строительных материалов // Приволж. науч. вестн. – 2011. – № 2. – С. 5–7.

8. Алейников С. М. Метод граничных элементов в контактных задачах для упругих пространственно неоднородных оснований. – М. : АСВ, 2000. – 754 с.

* * *

V. I. Danilov, Deputy Chief Engineer-head of quality, Main department of special construction №8 of Russia Federal Agency of Special Construction

V. E. Lyalin, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Verification of a mathematical model based on the construction of a natural experiment deformation and destruction of the existing building for the changes in lithology ground conditions

This article considers the process of verification of the mathematical model based on the construction of a natural experiment of deformation and destruction of the existing building for the changes in lithology ground conditions. Analysis of the results suggests that the appearance of cracks in the facade of the building was indeed caused by the uneven foundation settlement, which, in turn, is the result of deterioration of local soil mass.

Keywords: deformation and failure of the structure, design, foundation settlement

Получено: 14.11.13

УДК 539.1.07

И. Н. Ефимов, доктор технических наук, профессор;

Е. А. Морозов, доктор технических наук, профессор

Чайковский технологический институт (филиал)

Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова

ФОКУСИРОВКА И УСКОРЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрена возможность ускорения заряженных частиц и их прецизионная фокусировка для получения высоких энергетических характеристик потока на мишени.

Ключевые слова: ускорение, прецизионная фокусировка, заряженные частицы, магнитное поле

Введение

Общая конструкция системы, обеспечивающей ускорение и фокусировку заряженных частиц, зависит от двух факторов. Первый определяется выбором вида равновесной траектории – траектории, в окрестности которой движутся заряженные частицы и на которой происходит их фокусировка. Второй – выбором типа поля, которое будет осуществлять ускорение и фокусировку. При этом на равновесной траектории функция потенциальной энергии частицы в выбранном поле должна иметь локальный минимум. Если равновесной траекторией является

окружность, то в качестве фокусирующего поля можно выбрать аксиально-симметричное магнитное поле. Такое поле строится на основе использования системы соосно расположенных контуров с током. Кроме того, если магнитное поле будет возрастать во времени, то возникающее индукционное электрическое поле будет осуществлять ускорение частиц.

Отметим два вида технических устройств с равновесной траекторией-окружностью и аксиально-симметричным магнитным полем. В электронных магнитных спектрометрах или бета-спектромет-

рах [1] используется постоянное аксиально-симметричное магнитное поле со степенной зависимостью радиальной составляющей. Поле прибора осуществляет прецизионную фокусировку электронов фиксированной энергии, выходящих из анализируемого образца на счетчике, при этом радиус фокусного пятна может составлять $10^{-4} - 10^{-5}$ м. В спектрометрах отсутствует ускорение, а электроны фокусируются на мишени, совершив менее одного оборота. В бетатронах [2] используется магнитное поле аналогичной конфигурации, возрастающее во времени, а ускорение частиц осуществляется под действием индукционного электрического поля. В бетатроне отсутствует прецизионная фокусировка, а фокусирующие свойства магнитного поля используются исключительно для удержания электронов вблизи равновесной траектории. Электроны совершают $10^3 - 10^5$ оборотов в процессе ускорения, в зависимости от скорости возрастания магнитного поля.

Уравнения Гамильтона

Возникает необходимость дальнейшего развития теории движения частиц в переменных магнитных полях и исследования их фокусирующих и ускоряющих свойств.

Функция Гамильтона и уравнения движения свободной релятивистской частицы в инерциальной системе отсчета S_0 имеют вид [3, 4]:

$$H_0 = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}, \quad (1)$$

$$\frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{c^2 p}{H}, \quad (2)$$

где r – радиус-вектор частицы; p – ее импульс; m – ее масса; c – скорость света.

Физической величиной, характеризующей магнитное поле, является магнитная индукция B , тем не менее, для теоретических исследований удобнее использовать векторный потенциал магнитного поля A , связанный с индукцией по закону

$$B = \nabla \times A. \quad (3)$$

Пусть теперь частица, имея заряд e , движется в магнитном поле задаваемым векторным потенциалом A . В этом случае в уравнениях (1), (2) необходимо перейти от импульса p к обобщенному импульсу P по закону

$$p = P - eA. \quad (4)$$

Подстановку (4) будем рассматривать как переход к новой системе отсчета S , а функция Гамильтона и уравнения движения заряженной частицы в ней будут иметь вид

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (P - eA)^2}, \quad (5)$$

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{c^2}{2H} \nabla (P - eA)^2, \quad (6)$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{c^2 (P - eA)}{H}, \quad (7)$$

где R – радиус-вектор частицы в системе отсчета S .

Связем с частицей, движущейся по равновесной траектории, систему отсчета S , в которой функция Гамильтона и уравнения движения (5)–(7) будут иметь вид

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + e^2 c^2 A_0^2}; \quad P = 0, \quad R = 0, \quad (8)$$

где A_0 – векторный потенциал на равновесной траектории. В инерциальной же системе отсчета S_0 , согласно (4), для нее будет выполняться условие

$$p = -eA. \quad (9)$$

Следовательно, равновесная траектория всегда совпадает с некоторой линией векторного потенциала, а изменение импульса равновесной частицы пропорционально изменению векторного потенциала.

Обозначим за A_{\max} максимальное значение векторного потенциала равновесной траектории, используя (9) и (2), получим

$$H_{\max} = \sqrt{m^2 c^4 + A_{\max}^2 e^2 c^2}. \quad (10)$$

Положим $A_{\max} = 1$ Тл·м, что для стационарной траектории радиуса $\rho_0 = 1$ м соответствует $B_{\max} = 1$ Тл. Пусть в поле осуществляется ускорение электронов, тогда имеем ультрарелятивистский случай $m^2 c^4 \ll A_{\max}^2 c^2$:

$$E_{\max} / e \approx A_{\max} c = 300 \text{ МэВ}.$$

Если осуществляется ускорение протонов или иных тяжелых частиц, то имеем классический случай $m^2 c^4 \gg A_{\max}^2 c^2$:

$$E_{\max} / e \approx A_{\max}^2 e / 2m \approx 50 \text{ МэВ}.$$

Полученные результаты позволяют утверждать, что при наличии прецизионной фокусировки можно достичнуть значительной плотности энергии на мишени.

Условие стационарности

Фокусирующие свойства векторного потенциала A определяются векторным полем как функцией точек пространства. С другой стороны, индукционное ускорение предполагает изменение векторного потенциала во времени. Поэтому естественно потребовать, чтобы фокусирующие свойства с течением времени оставались неизменными, т. е. чтобы траектории частиц не изменялись в процессе ускорения. Данное требование назовем условием стационарности. При этом вследствие гладкости функции векторного потенциала его выполнение для равновесной траектории является достаточным.

Формализуем условие стационарности. Полный дифференциал векторного потенциала складывается из двух частей: из его приращения во времени в данной точке пространства и его приращения при переходе от одной точки пространства к другой:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial t} dt + (v \nabla) A dt. \quad (11)$$

Согласно (9) также будет изменяться и импульс равновесной частицы в системе S_0 :

$$\frac{dp}{dt} = -e \left(\frac{\partial A}{\partial t} + (v \nabla) A \right). \quad (12)$$

Раскладывая (12) на нормальную и тангенциальную составляющую, запишем систему

$$\left(\frac{dp}{dt} \right)_n = e v (\nabla \times A), \quad \left(\frac{dp}{dt} \right)_t = e \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (13)$$

Нормальное ускорение связано со скоростью кинематическим уравнением

$$\left(\frac{dv}{dt} \right)_n = \frac{v^2}{\rho} n, \quad (14)$$

где ρ – радиус кривизны траектории. Используя (14), преобразуем первое уравнение (13)

$$(p \cdot v) \rho^{-1} n = e \cdot v (\nabla \times A)$$

или

$$p \times n = -e \rho \cdot \nabla \times A. \quad (15)$$

Интегрирование второго уравнения системы (13), при начальных условиях $p=0$, $A=0$, $t=0$, возвращает нас к уравнению (9). Умножая (9) на орт нормали, получим

$$p \times n = -e A \times n. \quad (16)$$

Сравнивая (15) и (16), запишем

$$A \times n = \rho \cdot \nabla \times A. \quad (17)$$

Выражение (17) является дифференциальной формой условия стационарности.

Интегрируя (17) по площади контура L , образованного линией поля векторного потенциала на стационарной траектории, получим интегральную форму условия стационарности:

$$\int_s (A \times n) ds = \int_S (\rho \cdot \nabla \times A) ds. \quad (18)$$

Если стационарная траектория представляет собой окружность радиуса $\rho = \rho_0$, то, применяя к правой части (18) теорему Стокса, запишем:

$$\int_s (\langle A \rangle \times n) ds = \rho_0 \cdot \oint_L A dl, \quad (19)$$

где $\langle A \rangle$ – вектор среднего значения поля векторного потенциала внутри контура, и, полагая $S = \pi \rho_0^2$ и $L = 2\pi \rho_0$, получим

$$\langle A \rangle = 2A, \quad (20)$$

где A – значение векторного потенциала на стационарной траектории.

Таким образом, если траекторией является окружность, то выполнение условия (20) обеспечивает ее стационарность. Умножим векторно обе части (23) на единичный вектор нормали n , возьмем ротор от обеих частей и, используя (3), выразим (3) через индукцию магнитного поля:

$$B = 0,5 \langle B \rangle. \quad (21)$$

Выражение (21) известно как бетатронное условие [2]: индукция магнитного поля в точках стационарной круговой траектории в любой момент времени составляет половину средней индукции поля внутри контура траектории.

Движение частицы по стационарной траектории

Рационально перейти к безразмерным величинам. Пусть стационарной траекторией является окружность радиуса ρ_0 , а максимальное значение векторного потенциала достигает A_{max} . Время, в течение которого происходит ускорение t_0 . Поскольку t_0 является временем возрастания векторного потенциала, то оно характеризует период изменения магнитного поля ускорителя. В частности, если поле в ускорителе изменяется по синусоидальному закону, то период ускорения равен одной четвертой периода изменения поля. Используя введенные константы, запишем безразмерные комбинации соответственно для времени, расстояния, векторного потенциала, импульса, скорости и энергии покоя:

$$t^* = t \cdot t_0^{-1}, \quad r^* = r \cdot \rho_0^{-1}, \quad A^* = A \cdot A_{max}^{-1}, \\ p^* = p \cdot e^{-1} A_{max}^{-1}, \quad v^* = v \cdot c^{-1}, \quad E_0^* = mc \cdot e^{-1} A_{max}^{-1}.$$

Безразмерная функция Гамильтона (2) для равновесной частицы будет иметь вид:

$$H_0^* = \sqrt{E_0^{*2} + p^{*2}}.$$

Учитывая, что равновесная частица в системе S_0 имеет только тангенциальную составляющую скорости, запишем безразмерные уравнения движения (3) в виде

$$\frac{dl^*}{dt^*} = \frac{t_0 c}{\rho_0} \frac{p^*}{H_0^*}, \quad p^* = A^*, \quad (22)$$

где dl^* – безразмерный дифференциал дуги окружности; $A^* = A(t^*)$ – заданная возрастающая функция.

Положим линейное возрастание векторного потенциала от нуля до A_{\max} , тогда $A^* = t^*$. Переходя к угловой координате и учитывая, что $dl^* = d\phi$, преобразуем (22) к виду

$$\frac{d\phi}{dt^*} = f_0^* \frac{t^*}{H_0^*}, \quad (23)$$

где $f_0^* = t_0 c \cdot \rho_0^{-1}$ – безразмерная циклическая частота движения.

Интегрируя (23) при начальных условиях $t_0 = 0$, $\phi = 0$, получим закон изменения угла при движении равновесной частицы по траектории окружности:

$$\phi = f_0^* H_0^* - E_0^{*2}. \quad (24)$$

Если ускоряются электроны, то имеет место ультрарелятивистский случай, для которого

$$\phi = f_0^* t^*. \quad (25)$$

Закон движения (25) позволяет оценить необходимую частоту изменения магнитного поля в прецизионном ускорителе. Для прецизионной фокусировки необходимым условием является $\phi < 2\pi$, иными словами, чтобы частицы, выходящие из источника, успевали сфокусироваться, совершив менее одного оборота. Следовательно, $f_0^* < 2\pi$. Переходя к разумной частоте, получим $v > 5 \cdot 10^7$ Гц, что значительно больше частоты изменения поля в бетатроне $v = 10^2 - 10^4$ Гц.

Аксиально-симметричное поле

Если стационарной траекторией является окружность, то в плоскости окружности, или центральной плоскости, линии векторного потенциала имеют вид концентрических окружностей и, следовательно, в полярной системе координат O_0, ρ, ϕ инерциальной системы отсчета S_0 векторный потенциал имеет только угловую составляющую $A_\phi = A$.

Построим на основе полярной системы O_0, ρ, ϕ цилиндрическую систему координат O_0, ρ, ϕ, Z и предположим, что векторный потенциал аксиально-симметричен относительно оси OZ . Тогда и в пространстве векторный потенциал имеет единственную угловую составляющую, которая является функцией ρ и z :

$$A = A(\rho, z). \quad (26)$$

В центральной плоскости векторный потенциал зависит только от радиальной координаты ρ , поэтому он будет симметричен относительно этой плоскости $A(-z) = A(z)$.

Из уравнений Максвелла [1] в отсутствие токов следует:

$$\nabla^2 A = 0. \quad (27)$$

Вычисляя лапласиан единственной радиальной составляющей (26), приходим к отношению

$$\nabla_z^2 A = -\nabla_\rho^2 A - \nabla_\rho (\rho^{-1} A), \quad (28)$$

которое определяет зависимость векторного потенциала вдоль оси O_0, Z как функции его изменений вдоль оси O_0, ρ .

Исследуем фокусирующие свойства приведенного векторного потенциала, для этого рассмотрим движение частиц, покидающих источник под малым углом, к стационарной траектории в системе отсчета S . Если в начальный момент угловой импульс таких частиц был равен угловому импульсу равновесной частицы, то их движение будет происходить в плоскости, перпендикулярной равновесной траектории, и, следовательно, движение будет двумерным. Построим в плоскости движения систему координат OXZ с осями, равнонаправленными осям $O_0\rho$, O_0Z системы отсчета S_0 . Используя введенную выше безразмерную форму, запишем функцию Гамильтона и уравнения движения рассматриваемых частиц:

$$H^* = \sqrt{E_0^{*2} + P_x^{*2} + P_z^{*2} + A^{*2}}; \quad (29)$$

$$\frac{dP_x^*}{dt^*} = -f_0 \frac{\nabla_x A^{*2}}{H^*} x, \quad \frac{dP_z^*}{dt^*} = -f_0 \frac{\nabla_z A^{*2}}{H} z; \quad (30)$$

$$\frac{dx^*}{dt} = f_0 \frac{P_x^*}{H^*}, \quad \frac{dz^*}{dt^*} = f_0 \frac{dP_z^*}{H^*}, \quad (31)$$

где $x^* = \rho_0^{-1} x$, $z^* = \rho_0^{-1} z$.

Разложим A^* в ряд в окрестности стационарной траектории до членов второго порядка малости и определим условия, при которых функция векторного потенциала будет обладать фокусирующими свойствами:

$$A^* = A_0^* + \nabla_{\rho_0} A^* \cdot x + \nabla_{z_0}^2 A^* \cdot z + 0,5 \cdot \nabla_{\rho_0}^2 A^* \cdot x^2 + 0,5 \cdot \nabla_{z_0}^2 A^* \cdot z^2, \quad (32)$$

где индексом «0» отмечено, что вычисление функции и взятие производных осуществляется на равновесной траектории, т. е. $x^* = 0$, $z^* = 0$.

Для осуществления фокусировки необходимо, чтобы динамические уравнения (30) описывали некоторый колебательный процесс. В линейном приближении для этого необходимо обращение в ноль линейных членов ряда (32) и отрицательный знак квадратичных членов за все время ускорения. В том же приближении уравнения (30) запишутся в виде

$$\frac{dP_x^*}{dt^*} = -\frac{f_0 A^*}{H^*} \nabla_{x_0}^2 A^* \cdot x, \quad \frac{dP_z^*}{dt^*} = -\frac{f_0 A^*}{H^*} \nabla_{z_0}^2 A^* \cdot z. \quad (33)$$

Вследствие явной зависимости векторного потенциала дифференциальные уравнения (31)–(33) представляют собой систему линейных уравнений с переменными коэффициентами, для решения которой необходимо использовать численные методы [5].

Заключение

Сформулированы и formalизованы условия стационарности прецизионной фокусировки потока заряженных частиц для переменного высокочастотного магнитного поля. Показана возможность построения таких полей, приведены их качественные и количественные характеристики. Результаты могут быть использованы в проектировании систем электронной и ионной оптики.

Библиографические ссылки

1. Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия : пер. с англ. : [в 4 вып.] / под ред. К. Зигбана. – М. : Атомиздат, 1969. – 567 с.

2. Большая советская энциклопедия : в 30 т. Т. 27: Ульяновск – Франкфорт / гл. ред. А. М. Прохоров. – 3-е изд. – М. : Совет. энцикл., 1977. – 624 с.

3. Ландау Л. Д., Лишинц Е. М. Теория поля. – 5-е изд., испр. и доп. – М. : Наука, 1967. – 460 с.

4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике / пер. с англ. А. В. Ефремова [и др.] ; под ред. Я. А. Смородинского. – М. : Мир, 1977. – [Вып.] 6: Электродинамика, 1977. – 346 с. – URL: [http://publ.lib.ru/ARCHIVES/F/FEYNMAN_Richard_Fillips/Feynman_R.F..._Feynmanovskie_lekcii_po_fizike._Vyp.6.\(1977\).%5Bdjv-fax%5D.zip](http://publ.lib.ru/ARCHIVES/F/FEYNMAN_Richard_Fillips/Feynman_R.F..._Feynmanovskie_lekcii_po_fizike._Vyp.6.(1977).%5Bdjv-fax%5D.zip) (дата обращения: 06.12.2013).

5. Ефимов И. Н., Морозов Е. А. Каноническое интегрирование гамильтоновых систем. – Екатеринбург ; Ижевск : Изд-во Ин-та экономики УрО РАН, 2006. – 198 с.

* * *

I. N. Efimov, DSc in Engineering, Professor, Tchaikovsky Technological Institute (branch) Kalashnikov Izhevsk State Technical University
E. A. Morozov, DSc in Engineering, Professor, Tchaikovsky Technological Institute (branch) Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Focus and acceleration of charged particles in high-frequency magnetic field

The possibility of acceleration of charged particles and their precision focus for high energy characteristics of the flow of the target is considered.

Keywords: acceleration, high-precision focusing, charged particles, magnetic field

Получено: 30.10.13

УДК 621.774.5+536.7

C. L. Ким, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник
Институт механики Уральского отделения РАН

ПОПРАВКИ К ПОТЕНЦИАЛУ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АТОМОВ МЕТАЛЛОВ НА ОСНОВЕ УЧЕТА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВНЕШНИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ОБОЛОЧЕК

Внесена поправка в физико-математическую модель взаимодействия атомов металлов, основанная на электростатическом взаимодействии между внешними электронными оболочками атомов химических элементов. Доработка физико-математической модели позволила получить непрерывный потенциал без особенностей 1-го рода.

Ключевые слова: математическая модель, межатомные связи, электронная оболочка атомов, потенциал

Квантово-механические методы, основанные на первых принципах [1], позволяют найти значения величин, характеризующих идеальный кристалл в целом – найти значения модулей упругости, параметров решеток, рассчитать фононный спектр и др., описать локальные искажения решетки при этом не удается. Кроме того, первопринципные методы чрезвычайно трудоемки, что фактически делает их неприемлемыми для решения задач материаловедения.

В целом необходимо признать, что, несмотря на огромные накопленные знания о структуре и свойствах вещества, строении атома, пока не существует универсального метода описания межатомных взаимодействий многокомпонентных материалов.

Согласно современным представлениям, взаимодействие атомов друг с другом осуществляется в основном посредством кулоновского взаимодействия их ядер и электронных оболочек [2]. Действительно, из четырех фундаментальных типов взаимодействия – внутриядерного, гравитационного, магнитного и электростатического – только последнее оказывает

ется существенным во взаимодействии атомов. Влияние квантовых эффектов и, в частности, принципа Паули в наибольшей степени проявляется в областях с высокой электронной плотностью, например во внутренних оболочках атомов.

Поскольку внутренние оболочки атомов экранируют ядро, а взаимодействие между атомами в кристаллическом состоянии осуществляется главным образом за счет внешних оболочек, плотность которых во много раз меньше внутренних, то влияние квантовых эффектов в межатомном взаимодействии оказывается незначительным. Если предположить, что электронные конфигурации атомов уже известны, то потенциальная энергия их взаимодействия (межатомный потенциал) может быть найдена, как энергия кулоновского взаимодействия ядер и оболочек атомов. Конфигурацию внешних электронных оболочек атома вовсе не обязательно определять на основе первых принципов. Предполагая вид функции распределения электронной плотности в атоме известным, можно определить параметры этого рас-