

УДК 621.391

О. В. Пономарева, кандидат технических наук, доцент;
В. А. Пономарев, доктор технических наук, профессор
Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

ИЗМЕРЕНИЕ ТЕКУЩЕГО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ФУРЬЕ-СПЕКТРА КОМПЛЕКСНЫХ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ НА КОНЕЧНЫХ ИНТЕРВАЛАХ

Исследованы методы и алгоритмы «скользящих» и «скачущих» спектральных измерений на конечных интервалах. Предложены теоретические основы измерения текущих энергетических фурье-спектров дискретных сигналов. Приведены теоретические и практические результаты оценивания инвариантности текущих энергетических фурье-спектров комплексных и действительных тональных компонент.

Ключевые слова: дискретный сигнал, конечный интервал, «скользящие» спектральные измерения, базис, дискретные экспоненциальные функции, текущий фурье-спектр, инвариантность

Введение

Постоянное расширение круга приложений цифрового спектрального фурье-анализа дискретных сигналов на конечных интервалах объясняется, с одной стороны, преимуществами цифровой обработки сигналов (ЦОС), среди которых следует назвать гарантированную точность, идеальную воспроизводимость результатов, высокую производительность и экономичность, с другой стороны – проведением интенсивных исследований в данной области по созданию и разработке новых методов.

В практике ЦОС часто приходится иметь дело с сигналами, фурье-спектр которых изменяется во времени [1]. Например, с измерениями фурье-спектров таких сигналов сталкиваются в таких предметных областях, как радиолокация, виброакустическая диагностика, распознавание и синтез речи, пассивная гидролокация, биомедицина [2, 3]. Способ, позволяющий проводить такие измерения, называется скользящим спектральным измерением [4] и заключается в определении фурье-спектра сигнала на k -частоте во временном окне в N отсчетов. При этом перед повторным спектральным измерением окно смещается на один отсчет, а скользящие измерения могут проводиться на одной частоте или группе частот.

Энергетический фурье-спектр сигнала (на одной частоте или группе частот), измеряемый во временном окне при его сдвиге на один отсчет, принято называть «текущим энергетическим фурье-спектром». Если сдвиг временного окна осуществляется более чем на один отсчет, то такой спектр называют «скачущим энергетическим фурье-спектром» [1]. Следовательно, «скачущие» измерения являются частным случаем «скользящих» измерений (прореженным их вариантом).

Цель настоящей работы – исследование инвариантности текущего энергетического фурье-спектра комплекснозначных и действительных дискретных сигналов на конечных интервалах.

Измерение фурье-спектра сигнала в базисе дискретных экспоненциальных функций

Прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) в матричной форме задается следующими соотношениями [5, 6]:

$$S_N = \frac{1}{N} F_N X_N, \quad X_N = F_N^* S_N, \quad (1)$$

где * – знак комплексного сопряжения; $X_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ – представление дискретного сигнала $x(n)$; $n = \overline{0, N-1}$, в виде вектора N -мерного линейного пространства; T – знак транспонирования; $S_N = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T$ – вектор коэффициентов разложения X_N по системе дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ), задаваемой матрицей F_N :

$$F_N = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right). \quad (2)$$

Пара преобразований ДПФ в обычной форме задается следующими соотношениями:

$$S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k) W_N^{-kn},$$

$$k = \overline{0, (N-1)}. \quad (3)$$

Для дискретного преобразования Фурье вводятся понятия энергетического спектра $G_N(k)$ и спектра мощности $P_N(k)$ [7, 8]:

$$G_N(k) = \frac{P_N(k)}{\Delta f} = N |S_N(k)|^2, \quad P_N(k) = |S_N(k)|^2,$$

$$\Delta f = \frac{1}{N}. \quad (4)$$

Переход от нормированной Δf к «истинной» $\Delta f_{\text{ист}}$ осуществляется согласно выражению $\Delta f_{\text{ист}} = \Delta f \cdot F_s$, где F_s – частота дискретизации сигнала $x(n)$.

Отметим, в рамках теории дискретных сигналов на конечных интервалах любые линейные преобразования сигналов не должны выводить их за пределы интервала N [5, 9]. В ДПФ сдвиг сигнала X_N определяется как циклическая перестановка его отсчетов. Матрица сдвигов исходного сигнала X_N в случае применения ДПФ является циркулянтной матрицей и имеет вид:

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \dots & x(N-1) \\ x(N-1) & x(0) & \dots & x(N-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(1) & x(2) & \dots & x(0) \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (5)$$

Если использовать квадратную матрицу сдвига размерности N :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

то выражение (5) можно представить в следующем виде:

$$C = \begin{bmatrix} X_N^T M^0 \\ X_N^T M \\ \dots \\ X_N^T M^{N-1} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где M^0 – единичная матрица; M^k , $k = \overline{1, N-1}$ – обозначает возведение матрицы M в степень k .

Вообще говоря, теория спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в любом базисе базируется на трех основных и взаимосвязанных положениях [5, 6, 9]:

- определение сигнала на конечном множестве N точек;
- определение сдвига сигнала как некоторой операции по перестановке его отсчетов внутри конечного интервала;
- определение системы дискретных базисных функций.

Как показано выше, в рамках ДПФ определены все вышеперечисленные положения.

В практике применения аппарата ДПФ необходимо учитывать следующие важные моменты.

- В принципе ДПФ последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ можно рассматривать как некоторое приближение к преобразованию Фурье от функции $x(t)$, порождающей последовательность $x(n)$. Однако, и это следует подчеркнуть, свойства ДПФ являются точными и не являются приближенными, основанными на свойствах преобразования Фурье непрерывных сигналов [10].

- ДПФ и ОДПФ позволяют взаимно однозначно отображать в частотную область (во временную область) последовательности, заданные во временной области (в частотной области) на конечных интервалах, в виде последовательностей, заданных также на конечных интервалах, но уже в частотной области (во временной области). Такая возможность обеспечивается за счет того, что ДПФ и ОДПФ осуществляют циклический сдвиг последовательностей во временной и частотной областях соответственно.

- С точки же зрения приложений ДПФ важно понимать, что данный метод, наряду с достоинствами, имеет и ряд недостатков, связанных с проявлением специфических эффектов, сопровождающих его практическое применение.

Отметим некоторые из них:

1. Коэффициенты ДПФ $S_N(k)$ последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ равны значениям z-преобразования последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ на единичной окружности. Однако ДПФ не дает ответа на вопрос: каковы значения z-преобразования последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ между этими точками, порождая так называемый «эффект частотола».

2. Применению ДПФ сопутствует так называемый «эффект размывания спектральных составляющих» (часто называемый «эффектом утечки»). Данный эффект связан с тем, что при выполнении спектрального анализа исследуемой функции мы измеряем циклическую свертку спектра исследуемой функции с функцией вида $\frac{\sin x}{N \sin(x/N)}$, которая не локализована, а размыта по частоте (отсюда и название эффекта).

Методы и алгоритмы проведения скользящих спектральных измерений

Одним из методов осуществления скользящих спектральных измерений на k -й частоте является использование одной секции (или нескольких секций) обобщенного комплексного фильтра на основе частотной выборки (ФОЧВ). В основе ФОЧВ лежит возможность реализации КИХ-фильтра с N ответвлениями в виде последовательного соединения гребенчатого фильтра и банка из N комплексных резонаторов, одна секция которого приведена на рис. 1 [1, 4].

Структура, изображенная на рис. 1, позволяет эффективно осуществлять скользящие спектральные измерения на фиксированном множестве частот:

$$\{2\pi k/N\}, \quad (8)$$

где $k = \overline{0, N-1}$, N – число отсчетов сигнала задержки входной последовательности $x(n)$ в гребенчатом фильтре.

Скользящие спектральные измерения на k -й частоте могут осуществляться и методом ДПФ (вычисление k -го бина ДПФ (1), (3)) в скользящем окне длительностью в N отсчетов (r – число отсчетов, на которое сдвигается окно в N отсчетов вправо по сигналу $x(m)$):

$$S_N^{(r)}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n+r) W_N^{kn}, \text{ где } k = \overline{0, N-1};$$

$$r = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Необходимо отметить, что проведение скользящих измерений на k -й частоте фильтром на основе частотной выборки (рис. 1) более эффективно, чем методом ДПФ. Это связано, прежде всего, с тем, что структура ФОЧВ, в отличие от ДПФ, дает возможность использовать метод рекуррентного расчета значений спектра на выходе комплексного резонатора. Действительно, из анализа структуры секции ФОЧВ (рис. 1) непосредственно следует, что в этом

случае для выполнения скользящего спектрального измерения на k -й частоте необходимо (после выхода на режим скользящего измерения) выполнить всего два комплексных умножения на входной отсчет (при выполнении ДПФ необходимо выполнить N комплексных умножений).

В [4] рассмотрен алгоритм однобинового скользящего ДПФ (СДПФ), который позволяет рекуррентно вычислять значение k -го бина N -точечного ДПФ в скользящем окне длительностью N отсчетов. Предложенный алгоритм более эффективен (с точки зрения вычислений), чем алгоритм ДПФ. В результате появляется возможность проводить спектральные измерения с той же частотой, с которой приходят входные отсчеты.

Разностное уравнение СДПФ имеет вид [4]:

$$X^m(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}m} [X^m(n-1) + x(n) - x(n-N)]. \quad (10)$$

Реализация соотношения (3) приводит к КИХ-фильтру, структура которого приведена на рис. 2.

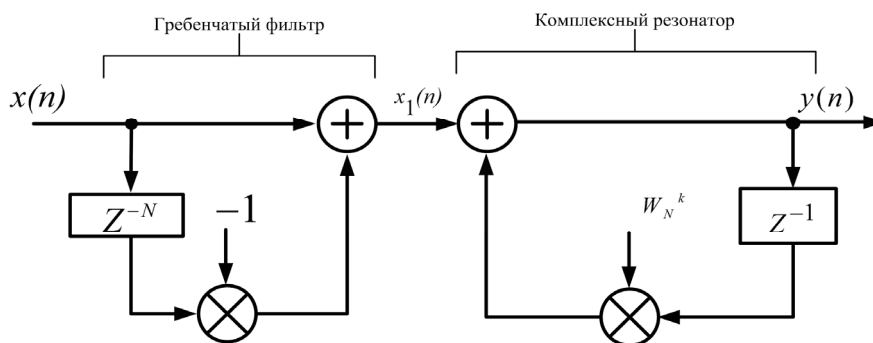


Рис. 1. Структурная схема фильтра на основе частотной выборки – ФОЧВ

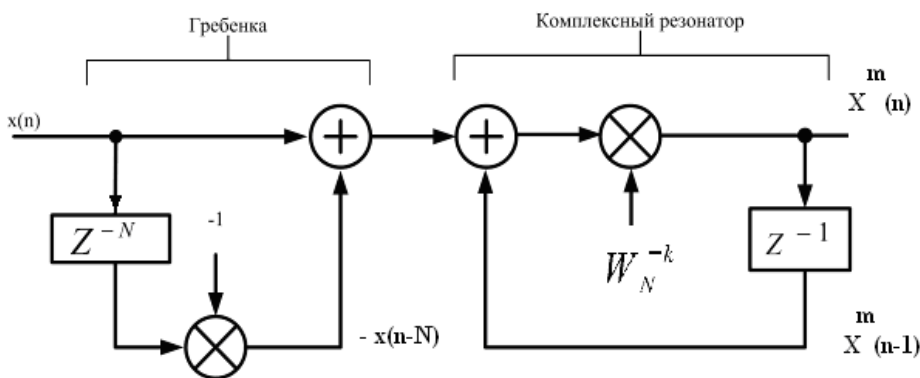


Рис. 2. Структура фильтра однобинового скользящего ДПФ

Отметим, что общим недостатком ДПФ и рассмотренных методов является фиксированность множества значений частот, на которых можно осуществлять скользящие спектральные измерения (8).

Рассмотрим вопрос инвариантности энергетического фурье-спектра дискретных сигналов при скользящих измерениях для двух видов продолжения входного дискретного сигнала:

- «естественного» («реального») продолжения сигнала;
- «искусственного» продолжения сигнала, «навязанного» дискретным преобразованием Фурье.

Инвариантность текущего энергетического фурье-спектра дискретных сигналов

Отметим, что широкое применение преобразования Фурье к анализу стационарных процессов и сис-

тем основано главным образом на фундаментальном свойстве, отмеченном Н. Винером – свойстве инвариантности экспоненциального базиса к циклическому сдвигу [5].

Введем символическое обозначение для ДПФ и ОДПФ циклической (N -периодической) последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$:

$$x(n) \xrightarrow{F} S_N(k). \quad (11)$$

Тогда теорему сдвига для ДПФ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{если } x(n) \xrightarrow{F} S_N(k), \text{ то} \\ x(n+m) \xrightarrow{F} W_N^{-km} S_N(k). \end{aligned} \quad (12)$$

Из данной теоремы непосредственно следует инвариантность энергетического спектра (4) N -периодической последовательности $x_N(n+rN) = x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$.

Разностное уравнение (10) скользящего измерения на k -й частоте фурье-спектра дискретного сигнала $x(n)$ при естественном его продолжении и сдвиге временного окна на m отсчетов запишем в следующем виде:

$$S_m(k) = W_N^{-k} S_{(m-1)}^*(k), \quad (13)$$

где $W_N^{-k} = \exp\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$; $m = \overline{1, 2, 3, \dots}$ – сдвиг временного окна; $S_{(m-1)}^*(k) = [S_{(m-1)}(k) - x(m-1) + x(m-1+N)]$ N – число отсчетов во временном окне (длина окна); $S_0(k) = S_{(m-1)}(k) \big|_{m=1}$ – значение на k -й частоте коэффициента ДПФ при выходе алгоритма на режим скользящего измерения.

Используя тригонометрическую форму записи комплексного числа, запишем $S_{(m-1)}(k)$, $S_{(m-1)}^*(k)$ в следующем виде:

$$S_{(m-1)}(k) = |S_{(m-1)}(k)| \cdot [\cos(\phi_{(m-1)}) + j \sin(\phi_{(m-1)})]; \quad (14)$$

$$S_{(m-1)}^*(k) = |S_{(m-1)}^*(k)| \cdot [\cos(\phi_{(m-1)}^*) + j \sin(\phi_{(m-1)}^*)],$$

где $|S_{(m-1)}(k)| = \sqrt{\{\operatorname{Re}[S_{(m-1)}(k)]\}^2 + \{\operatorname{Im}[S_{(m-1)}(k)]\}^2}$

$$\cos(\phi_{(m-1)}) = \frac{\operatorname{Re}[S_{(m-1)}(k)]}{|S_{(m-1)}(k)|}; \quad \sin(\phi_{(m-1)}) = \frac{\operatorname{Im}[S_{(m-1)}(k)]}{|S_{(m-1)}(k)|};$$

$$|S_{(m-1)}^*(k)| = \sqrt{\{\operatorname{Re}[S_{(m-1)}(k) - x(m-1) + x(m-1+N)]\}^2 + \{\operatorname{Im}[S_{(m-1)}(k) - x(m-1) + x(m-1+N)]\}^2};$$

$$\cos(\phi_{(m-1)}^*) = \frac{\operatorname{Re}[S_{(m-1)}(k) - x(m-1) + x(m-1+N)]}{|S_{(m-1)}^*(k)|};$$

$$\sin(\phi_{(m-1)}^*) = \frac{\operatorname{Im}[S_{(m-1)}(k) - x(m-1) + x(m-1+N)]}{|S_{(m-1)}^*(k)|}.$$

Учитывая, что

$$|W_N^{-k}| = \cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = 1;$$

$$W_N^{-k} = 1 \cdot [\cos(\beta_k) + j \sin(\beta_k)]; \quad \beta_k = \frac{2\pi}{N}; \quad (15)$$

$$|(a+jb) \cdot (c+jd)| = |a+jb| \cdot |c+jd|;$$

$$S_m(k) = |S_m(k)| \cdot [\cos(\phi_{(m-1)}^* + \beta_k) + j \sin(\phi_{(m-1)}^* + \beta_k)];$$

$$|S_{(m-1)}^*(k)| = |S_m(k)|,$$

представим разностное уравнение (13) в следующей форме:

$$\begin{aligned} S_m(k) &= W_N^{-k} S_{(m-1)}^*(k) = \\ &= |S_{(m-1)}^*(k)| \cdot [\cos(\phi_{(m-1)}^* + \beta_k) + j \sin(\phi_{(m-1)}^* + \beta_k)] = \\ &= |S_m(k)| \cdot [\cos(\phi_{(m-1)} + \beta_k) + j \sin(\phi_{(m-1)} + \beta_k)], \end{aligned} \quad (16)$$

где $\phi_{(m-1)}^* = \arccos \frac{\operatorname{Re}[S_{(m-1)}^*(k)]}{|S_{(m-1)}^*(k)|}$.

Из соотношения (16) непосредственно следует, что значение текущего энергетического фурье-спектра сигнала $x(n)$ на k -й частоте равно:

$$\begin{aligned} G_m(k) &= N \cdot |S_{(m-1)}^*(k)|^2 = \\ &= N \cdot \{\operatorname{Re}^2[(S_{(m-1)}(k)) - x(m-1) + x(m-1+N)] + \\ &+ \operatorname{Im}^2[(S_{(m-1)}(k)) - x(m-1) + x(m-1+N)]\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Введя комплекснозначную функцию $c(m) = \{-x(m) + x(m+N)\}$, представим выражение (17) в следующем виде:

$$\begin{aligned} G_m(k) &= N \cdot \{\operatorname{Re}^2[(S_{(m-1)}(k)) - c(m)] + \\ &+ \operatorname{Im}^2[(S_{(m-1)}(k)) - c(m)]\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Можно показать, что текущий энергетический фурье-спектр комплекснозначного сигнала $x(n)$ на k -й частоте будет инвариантным к временному сдвигу (т. е. не будет зависеть от сдвига сигнала m) при выполнении равенства:

$$\begin{aligned} \{\operatorname{Re}(S_{(m-1)}(k) - \operatorname{Re}(c(m))) \cdot \operatorname{Re}(c(m)) + \\ + [\operatorname{Im}(S_{(m-1)}(k) + \operatorname{Im}(c(m))) \cdot \operatorname{Im}(c(m))\} = 0. \end{aligned}$$

Частный случай выполнения этого тождества рассмотрен выше (12) (т. е. при равенстве $\operatorname{Re}[c(m)] = \operatorname{Im}[c(m)] = 0$). Еще один частный случай будет приведен ниже. В общем же случае текущий энергетический фурье-спектр действительного сигнала $x(n)$ на k -й частоте не будет инвариантным к временному сдвигу сигнала. Данный эффект авторы назвали «эффектом неинвариантности». На рис. 3 иллюстрируется эффект неинвариантности текущего

энергетического спектра для комплекснозначного $x(n)$ и действительного $y(n)$ сигналов:

$$x(n) = \cos \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)n \right] + j \sin \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)n \right] + \cos \left[\frac{2\pi}{N}(k_1+q_1)n \right] + j \sin \left[\frac{2\pi}{N}(k_1+q_1)n \right]; \quad (19)$$

$$y(n) = \cos \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)n \right] + \cos \left[\frac{2\pi}{N}(k_1+q_1)n \right];$$

$$k = 7, k_1 = 13; q = 1/3, q_1 = 1/4. \quad (20)$$

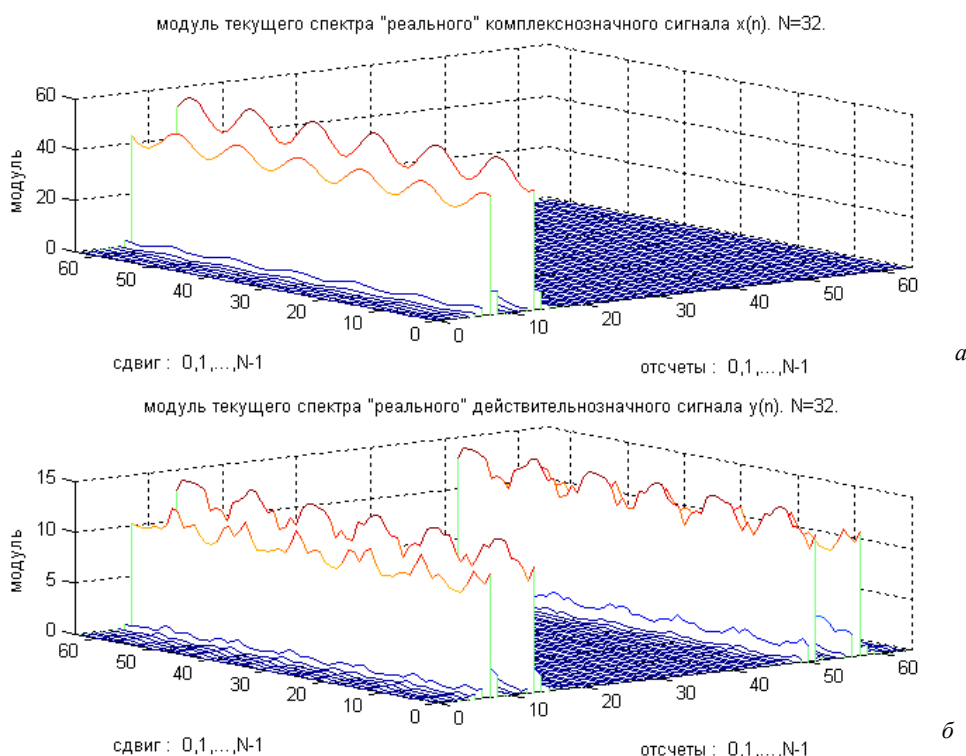


Рис. 3. Эффект неинвариантности текущего энергетического спектра для комплекснозначного сигнала $x(n)$ (а) и действительного сигнала $y(n)$ (б)

Инвариантность текущего энергетического фурье-спектра комплекснозначных и действительных тональных компонент

Рассмотрим измерение текущего энергетического фурье-спектра во временном окне в N отсчетов комплекснозначной гармонической компоненты вида:

$$x(n) = \cos \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)n \right] + j \sin \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)n \right], \quad \text{где} \\ 0 \leq q < 1. \quad (21)$$

Нетрудно установить, что если сигнал (21) на интервале анализа укладывается в целое число ее (компоненты) периодов (т. е. $q = 0$), то из предыдущих результатов непосредственно следует инвариантность энергетического спектра к временному сдвигу сигнала, так как в этом случае естественное продолжение сигнала во временном окне будет совпадать с циклическим (периодическим) продолжением, которое «навязывается» ДПФ [11, 12].

Для нашего частного случая, вместо комплекснозначной функции $c(m)$ (18), введем функцию вида:

$$c_q(m) = \text{Re}[c_q(m)] + j \text{Im}[c_q(m)], \quad (22)$$

где $\text{Re}[c_q(m)] = \{\text{Re}[x(m-1+N)] - \text{Re}[x(m-1)]\} =$

$$= \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1+N) \right] - \cos \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1) \right] \right\};$$

$$\text{Im}[c_q(m)] = \{\text{Im}[x(m-1+N)] - \text{Im}[x(m-1)]\} =$$

$$= \sin \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1+N) \right] - \sin \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1) \right].$$

В силу периодичности и симметричности функций $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ первые члены разностей: $\text{Re}[c_q(m)]$ и $\text{Im}[c_q(m)]$ можно преобразовать к виду:

$$\cos \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1+N) \right] = \\ = \cos \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1) + 2\pi q \right] =$$

$$= \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1)\right] \cos(2\pi q) - \sin\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1)\right] \sin(2\pi q); \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \sin\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1+N)\right] = \\ & = \sin\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1) + 2\pi q\right] = \\ & = \sin\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1)\right] \cos(2\pi q) + \\ & + \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1)\right] \sin(2\pi q). \quad (24) \end{aligned}$$

Тогда выражение (22) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} c_q(m) = & \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1)\right] \cdot [\cos(2\pi q) - 1] - \\ & - \sin\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1)\right] \sin(2\pi q) + \\ & + j \left\{ \sin\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1)\right] \cdot [\cos(2\pi q) - 1] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. + \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1)\right] \sin(2\pi q) \right\} = \\ & = -2 \sin^2(\pi q) \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1)\right] - \\ & - \sin\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1)\right] \sin(2\pi q) - \\ & - j 2 \sin^2(\pi q) \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1)\right] + \\ & + \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1)\right] \sin(2\pi q). \quad (25) \end{aligned}$$

На рис. 4 показано изменение реальной и мнимой части функции $c_q(m)$ в координатах сдвиг m и параметр q при определенных значениях частоты k и длительности сигнала N .

Как мы видим, максимум амплитуд функций $\text{Re}[c_q(m)]$ и $\text{Im}[c_q(m)]$ равен двум, соответствует значению $q = 1/2$ и не зависит от N и k . Среднее значение функций $\text{Re}[c_q(m)]$ и $\text{Im}[c_q(m)]$ при фиксированном q равно нулю.

На рис. 5 приведено изменение дисперсий функций $\text{Re}[c_q(m)]$ и $\text{Im}[c_q(m)]$ в зависимости от q .

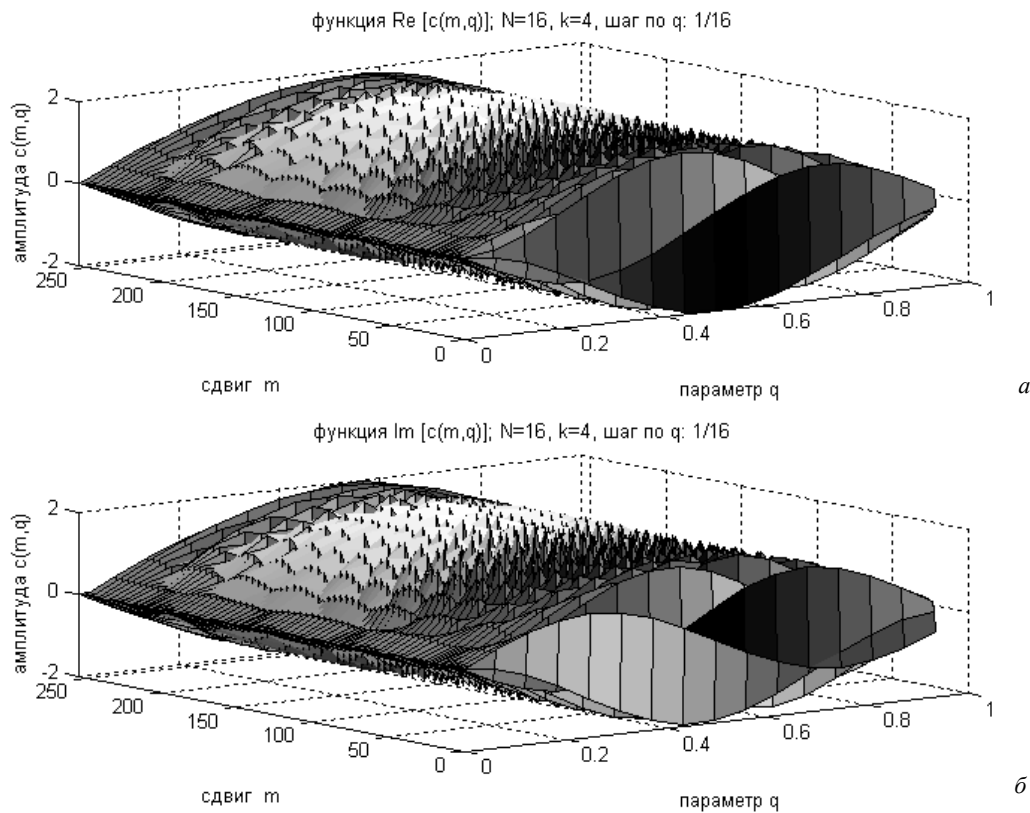


Рис. 4. Изменение реальной (а) и мнимой (б) частей функции $c_q(m)$ в координатах сдвиг m и параметр q при определенных значениях частоты k и длительности сигнала N

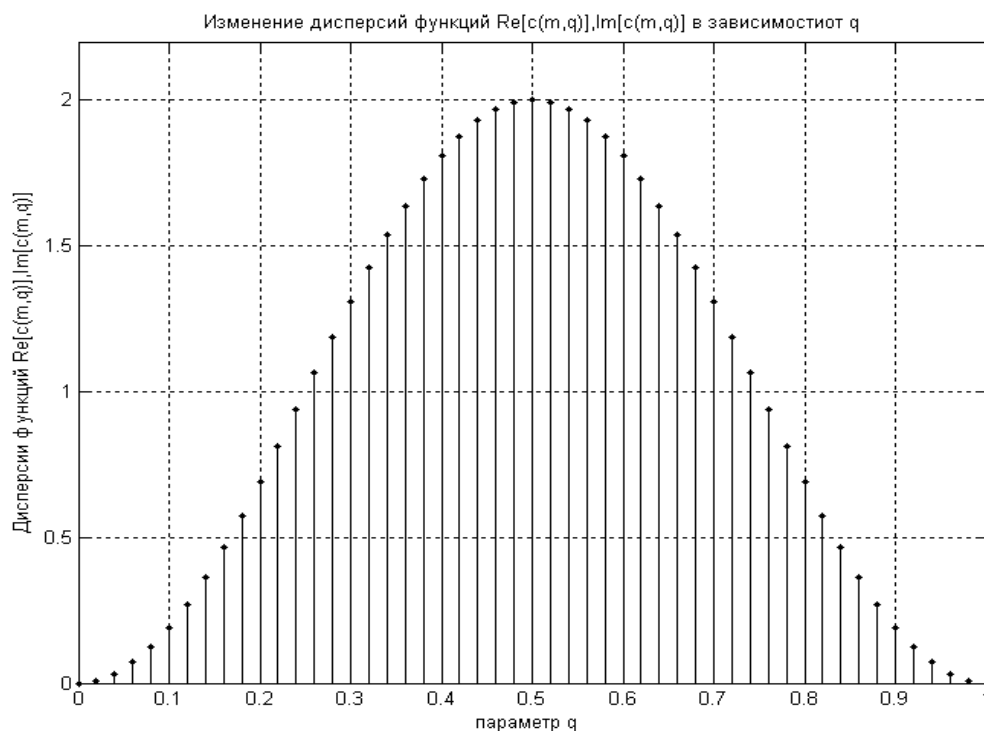


Рис. 5. Изменение дисперсий функций $\text{Re}[c_q(m)]$ и $\text{Im}[c_q(m)]$ в зависимости от параметра q

Отметим, что полученные выше результаты легко распространить и на действительные сигналы, положив $\text{Im}[x(n)] = 0$.

Измерения текущего энергетического фурье-спектра проведем для комплекснозначных сигналов $x_i(n)$ вида:

$$x(n) = \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)n\right] + j \sin\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)n\right];$$

$$x_1(n) = \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k_1+q_1)n\right] + j \sin\left[\frac{2\pi}{N}(k_1+q_1)n\right];$$

$$x_2(n) = \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k_2+q_2)n\right] + j \sin\left[\frac{2\pi}{N}(k_2+q_2)n\right],$$

где $k = 4$, $k_1 = 7$; $k_2 = 13$; $q = 1/2$, $q_1 = 1/4$, $q_2 = 0$ и действительных $y_i(n)$ сигналов вида:

$$y(n) = \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k+q)n\right]; \quad y_1(n) = \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k_1+q_1)n\right];$$

$$y_2(n) = \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k_2+q_2)n\right],$$

где $k = 4$, $k_1 = 7$, $k_2 = 13$; $q = 1/2$, $q_1 = 1/3$, $q_2 = 0$.

На рис. 6 приведены результаты измерения текущих энергетических фурье-спектров действительных сигналов $y(n) \Rightarrow a$; $y_1(n) \Rightarrow b$; $y_2(n) \Rightarrow v$.

На рис. 7 приведены результаты измерения текущих энергетических фурье-спектров комплекснозначных сигналов $x(n) \Rightarrow a$; $x_1(n) \Rightarrow b$; $x_2(n) \Rightarrow v$.

На рис. 6, а, б мы видим проявление сразу двух явлений, сопровождающих цифровую спектральную обработку действительных сигналов. Это известный эффект размывания спектральных составляющих (называемый часто эффектом утечки, англ. *leakage*) и эффект неинвариантности, выявленный в настоящей работе (англ. *non-invariance*). При этом если значение параметра q равно нулю (рис. 6, в), то ни один из эффектов не проявляется. Отсутствие проявления в этом случае эффекта утечки объясняется тем, что коэффициенты ДПФ «падают» в нули z -преобразования на единичной окружности отрезка гармонической компоненты. А отсутствие проявления эффекта неинвариантности связано с тем, что естественное продолжения сигнала во временном окне совпадает с циклическим (периодическим) продолжением, «навязываемым» ДПФ.

При измерении текущих энергетических спектров одиночных комплекснозначных сигналов (рис. 7) наблюдается проявление только одного эффекта – эффекта размывания спектральных составляющих. Эффект неинвариантности в этом частном случае не проявляется, как при $q = 0$ (рис. 7, в), так и при $q \neq 0$ (рис. 7, а, б). Если же комплекснозначный сигнал представляет собой сумму комплекснозначных сигналов (например, сигнал вида (20)), то при измерении текущего энергетического спектра такого сигнала мы видим проявление как эффекта размывания спектральных составляющих, так и эффекта неинвариантности (рис. 3, а).

Заключение

Преимущества цифровой обработки сигналов определяют постоянное расширение применения цифровых спектральных методов в различных областях научных исследований [13–18]. Подчеркнем, что переход от аналоговых методов спектрального анализа к цифровым методам требует (как правило, для каждой предметной области) проведения дополнительных исследований процессов и эффектов, сопровождающих такой переход. Это утверждение в полной мере относится и к спектральному анализу дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе ДЭФ. Проведение таких исследований представляется важным, так как у исследователей часто преобладают знания в конкретной предметной области, а не в области цифровых методов обработки сигналов. И, как показывает практика, важные процессы и эффекты, возникающие в приложениях цифрового спектрального анализа, часто ускользают от внимания исследователей, что в конечном счете, как правило, приводит к ошибочным выводам.

Проведенные исследования выявленного авторами работы эффекта неинвариантности текущего спектра позволяют:

- во-первых, повысить эффективность применения цифрового спектрального анализа во многих его приложениях. В частности, при решении задач по обнаружению и выявлению скрытых периодичностей (гармонических, тональных компонент) в таких предметных областях, как радиолокация, виброакустическая диагностика, пассивная гидролокация, биомедицина и т. д.;
- во-вторых, по-новому взглянуть на результаты измерения на конечных интервалах текущих фурье-спектров и текущих энергетических фурье-спектров сигналов, а также дать численную оценку неинвариантности текущих энергетических фурье-спектров действительных тональных компонент.

Библиографические ссылки

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
2. Оппенгейм Э. Применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1980. – 550 с.
3. Неразрушающий контроль : справочник : в 8 т. / под общ. ред. В. В. Клюева. – Т. 7 : в 2 кн. – Кн. 1: В. И. Иванов, И. Э. Власов. Метод акустической эмиссии. – Кн. 2: Ф. Я. Балицкий, А. В. Барков, Н. А. Баркова и др. Вибродиагностика. – 2-е изд., испр. – М.: Машиностроение, 2006. – 829 с.
4. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов = Understanding Digital Signal Processing : пер. с англ. / под ред. А. А. Бритова. – [2-е изд.]. – М.: Бинум-Пресс, 2007. – 656 с.
5. Пономарева О. В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе параметрических дискретных экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов. – 2010. – № 2. – С. 7–12.
6. Пономарева О. В. Вероятностные свойства спектральных оценок, полученных методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуал. системы в пр-ве. – 2010. – № 2. – С. 36–41.
7. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. – 2011. – № 1. – С. 2–6.
8. Пономарева О. В. Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 2. – С. 2–5.
9. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Скользящее параметрическое ДПФ в задачах обнаружения тональных компонент // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 4. – С. 2–7.
10. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач интерполяции и свертки функций // Радиотехника и электроника. – 1984. – Т. 29, № 8. – С. 1561–1570.
11. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Временные окна при оценке энергетических спектров методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Автометрия. – 1983. – № 4. – С. 39–45.
12. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Обобщение дискретного преобразования Фурье для интерполяции во временной области // Известия вузов СССР – Радиоэлектроника. – 1983. – Т. 26, № 9. – С. 67–68.
13. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2013. – № 2. – С. 10–15.
14. Алексеев В. А., Пономарев В. А., Пономарева О. В. Методология определения погрешностей измерения вероятностных характеристик случайных процессов, реализуемых процессорными измерительными средствами // Интеллектуал. системы в пр-ве. – 2010. – № 2. – С. 91–99.
15. Пономарева О. В., Алексеев В. А., Пономарев В. А. Цифровой периодограммный анализ и проблемы его практического применения // Вестн. Ижев. гос. техн. ун-та. – 2013. – № 2. – С. 130–133.
16. Пономарева О. В., Пономарева Н. В. Модификация фильтра на основе частотной выборки для решения задач цифровой обработки случайных процессов со скрытыми периодичностями // Интеллектуал. системы в пр-ве. – 2012. – № 2. – С. 122–129.
17. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарев В. А. Обобщение алгоритма Герцеля для решения задач выявления скрытых периодичностей // Интеллектуал. системы в пр-ве. – 2013. – № 1. – С. 41–46.
18. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Виброакустическое диагностирование коробок передач станков цифровыми методами // Станки и инструмент. – 1983. – № 9. – С. 18–21.

* * *

O. V. Ponomareva, PhD in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
V. A. Ponomarev, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Measurement of current energy Fourier spectrum of complex and real discrete signals on finite intervals

Methods and algorithms of "sliding" and "jumping" spectral measurements on finite intervals were investigated. The theory of measuring the current energy Fourier spectrums of digital signals were suggested. Theoretical and practical results of estimating the invariance of current energy Fourier spectrums of complex and actual tonal components were shown.

Keywords: digital signal, final interval, "sliding" spectral measurement, basis, discrete exponential function, current Fourier spectrum, invariance