

УДК 621.384.3 + 621.1.016

М. С. Вологодина, аспирант  
Ижевский государственный технический университет

### ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА ПРОЦЕССОВ В ИНФРАКРАСНОМ НАГРЕВАТЕЛЕ

*Рассматриваются основные допущения, принимаемые для реализации сопряженной задачи теплообмена, которая возникает при расчете параметров инфракрасного нагревателя. Приводится обоснование этих допущений.*

Газовый инфракрасный нагреватель представляет собой отопительный прибор, испускающий лучистую энергию, т. е. обогрев пространства происходит так же, как и при воздействии солнечных лучей. Он состоит из горелочного блока, труб-излучателей и отражателя, располагающегося над излучающими трубами, для направления теплового потока с верхней стенки трубы в рабочую зону. Возможны различные конструкции излучателя этого прибора [1]. В данной статье рассмотрим одну из возможных конфигураций инфракрасного нагревателя, которая схематично изображена на рис. 1.

Для определения параметров инфракрасного нагревателя необходимо решать сопряженную задачу теплообмена между излучателем и отражателем. Эта задача в общем случае является трехмерной и весьма сложной в реализации, поскольку требует решения системы уравнений теплового баланса на поверхности каждого элемента нагревателя. Уравнения теплового баланса учитывают наличие между поверхностями лучистого теплообмена, характеризующегося угловыми коэффициентами излучения, нахождение которых в трехмерном случае сопряжено с большими трудностями.

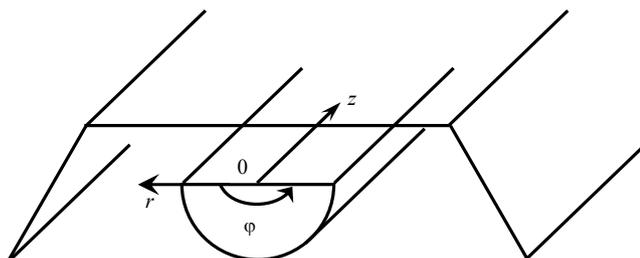


Рис. 1. Схема инфракрасного излучателя

Для упрощения вычислений предлагается эту задачу решать пошагово. Поскольку доля излучения, приходящая на рассматриваемый элемент с элементов, удаленных от него по оси  $Ox$ , незначительна, то ей можно пренебречь. Это допущение позволяет угловые коэффициенты излучения рассчитывать только для элементов, лежащих в одной плоскости по  $X$ . Соответственно, для пошаговой реализации трехмерной задачи сопряженного теплообмена необходимо найти шаг по оси  $Ox$ , при котором найденное решение будет удовлетворять некоторой заданной погрешности.

При поиске шага для нас существенным будет распределение температуры по оси  $OX$ , поэтому в каждом сечении по этой координате будем считать поток однородным и находить зависимость среднемассовой по сечению температуры газа от продольной координаты. Проинтегрировав полученное распределение температуры по длине трубы, получим результирующий тепловой поток с излучателя. Если температуру рассчитать только в определенных сечениях, то нахождение интеграла заменится нахождением квадратурной суммы по формуле прямоугольников. Задавшись величиной относительного отклонения квадратурной суммы от интеграла, можно найти соответствующую величину шага интегрирования, а значит и шаг для рассматриваемой трехмерной задачи сопряженного теплообмена.

Процесс теплообмена с окружающей средой описывается дифференциальным уравнением переноса тепла в газовой смеси [2]

$$c_p G \frac{dT(x)}{dx} = P_T \alpha_g (T_{ct}(x) - T(x)) \quad (1)$$

и уравнением для температуры стенки

$$\lambda_{ct} \frac{d^2 T_{ct}}{dx^2} + \alpha_g (T - T_{ct}) - \alpha_{эф} (T_{ct} - T_{окр}) = 0, \quad (2)$$

где  $c_p$  – удельная теплоемкость газа;  $G$  – массовый расход газа;  $T(x)$  – температура газа;  $T_{ct}(x)$  – температура стенки;  $P_T$  – периметр трубы;  $\alpha_g$  – коэффициент теплоотдачи от газа;  $\lambda_{ct}$  – теплопроводность материала стенки;  $\alpha_{эф}$  – эффективный коэффициент теплоотдачи от стенки трубы в окружающую среду;  $T_{окр}$  – температура вокруг излучателя.

Коэффициент теплоотдачи от газа для турбулентного течения равен

$$\alpha_g = \frac{Nu_g \lambda}{D}, \quad Nu_g = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4}, \quad Re = \frac{uD}{\nu_g},$$

где  $u$  – скорость газа;  $D$  – гидравлический диаметр;  $Pr$  – число Прандтля, рассматривается как физическая постоянная газа;  $\nu_g$  – кинематическая вязкость газа;  $\lambda$  – теплопроводность газа, которая определяется как  $\lambda = \mu c_p / Pr$ , где  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости газа, определяемый по формуле Саттерленда  $\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T_0 + T_S}{T + T_S}$ , в которой  $T_S$  – постоянная Саттерленда, имеющая значение, близкое к 122 К,  $T_0$  и  $\mu_0$  – абсолютная температура и коэффициент вязкости, соответствующие некоторому начальному состоянию газа.

Эффективный коэффициент теплоотдачи от стенки трубы в окружающую среду определяется как  $\alpha_{эф} = \alpha_0 + \alpha_{н}$ , где  $\alpha_0$  – коэффициент теплоотдачи, определяемый по формуле для свободной конвекции [3]:

$$\alpha_0 = \frac{Nu\lambda}{D}, \quad Nu = 0,47(Gr \cdot Pr)^{0,25}, \quad Gr = \frac{gD^3}{\nu^2} \beta_0 (T_{ст} - T_{окр}),$$

в которой  $\lambda$  – теплопроводность окружающей среды;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости воздуха;  $\beta_0 = \frac{1}{T_{окр}}$  – температурный коэффициент объемного расширения;  $\alpha_{л}$  – лучистый коэффициент теплоотдачи, равный [3]:

$$\alpha_{л} = \varepsilon\sigma(T_{ст}^2 + T_{окр}^2)(T_{ст} + T_{окр}),$$

где  $\varepsilon$  – степень черноты стенки;  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  – постоянная Стефана–Больцмана.

Для решения системы (1)–(2) строим итерационную процедуру:

1. Задаем начальное приближение для распределения температур  $T(x)$  и  $T_{ст}(x)$ . Выбираем шаг  $h$ .
2. Находим решение уравнения (2) методом итерационной прогонки, поскольку  $\alpha_{эф}$  зависит от температуры стенки трубы.
3. Используя найденное распределение  $T_{ст}(x)$ , методом Рунге–Кутты второго порядка решаем уравнение (1).
4. Проверяем выполнение условия  $\max(\delta_1, \delta_2) < \varepsilon$ , где  $\delta_1 = \max_i |T_i^n - T_i^{n-1}|$ ,  $\delta_2 = \max_i |T_{ст,i}^n - T_{ст,i}^{n-1}|$ ,  $\varepsilon$  – заданная точность. Если условие выполнилось, то получили распределения  $T^h(x)$ ,  $T_{ст}^h(x)$  и переходим к пункту 5, иначе к 2.
5. Делим шаг пополам, т. е.  $h = h/2$ , и переходим к пункту 2. Находим распределения  $T^{h/2}(x)$ ,  $T_{ст}^{h/2}(x)$ .
6. Если построенный итерационный метод сходится и устойчив, то с уменьшением шага величина

$$\Psi_h = \max_i \left| \frac{T_i^h - T_i^{h/2}}{T_i^{h/2}} \right| \quad (3)$$

должна уменьшаться. Проверяем выполнение условия  $|\Psi_h| < \varepsilon_1$ , где  $\varepsilon_1$  – заданная точность. Если условие выполнилось, то расчет окончен, найдены распределения  $T(x)$ ,  $T_{ст}(x)$ , иначе  $T^h(x) = T^{h/2}(x)$ ,  $T_{ст}^h(x) = T_{ст}^{h/2}(x)$  и переходим к пункту 5.

Найденное распределение температуры является точечной функцией  $(x_i, T_i)$ . Найдем ее аналитическую форму записи. Для этого воспользуемся методом наименьших квадратов (МНК).

Если в уравнении (1) коэффициент  $\alpha_g$  является константой, а температура стенки определяется из условия конвективного теплообмена на границе  $\alpha_g(T - T_{ст}) = \alpha_0(T_{ст} - T_{окр})$  и  $\alpha_0$  также является константой, то уравнение (1) имеет аналитическое решение. Это решение является экспонентой

$T = (T_0 - T_{\text{окр}})e^{-Ax} + T_{\text{окр}}$ , где  $A = \frac{P_1 \alpha_g \alpha_0}{\sigma c_p (\alpha_g + \alpha_0)}$ . Нелинейность коэффициентов теплообмена приводит к изменению функции, но при этом ее характер не меняется, поэтому будем искать функцию распределения температуры в виде  $T = a_1 e^{a_2 x} + b_1$ .

Выражение для суммы квадратов отклонения запишется как

$$\psi = \sum_{i=1}^m (a_1 e^{a_2 x_i} + b_1 - T_i)^2.$$

Итерационная процедура нахождения неизвестных параметров функции:

1. Выберем в качестве  $a_1$  величину  $a_1 = T_0 - T_{\text{окр}}$ ,  $T_0$  – температура на входе в излучатель, а в качестве  $b_1$  –  $b_1 = T_{\text{окр}}$ , тогда  $\psi = \psi(a_2)$ .

2. Необходимо, чтобы сумма квадратов отклонений  $\psi$  была минимальной. Будем искать  $a_2$  как точку минимума функции  $\psi = \psi(a_2)$ , тогда должно выполняться условие  $\frac{d\psi}{da_2} = \sum_{i=1}^m (a_1 e^{a_2 x_i} + b_1 - T_i) a_1 a_2 e^{a_2 x_i} = 0$ , где  $m$  – количество точек, по которым строится функция. Задаем начальное приближение для  $a_2$  и решаем нелинейное уравнение методом Ньютона.

3. Для найденного значения  $a_2$  «поправляем» значения  $a_1$  и  $b_1$ . Для этого необходимо решить систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^m (a_1 e^{a_2 x_i} + b_1 - T_i) e^{a_2 x_i} = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial b_1} = \sum_{i=1}^m (a_1 e^{a_2 x_i} + b_1 - T_i) = 0, \end{cases}$$

которая также решается методом Ньютона.

4. Проверяем условие, что среднеквадратическое отклонение не превышает некоторого значения  $\left| \frac{\psi}{m} \right| < \varepsilon$  или число последовательных «улучшений» больше некоторого значения (это условие вводится на случай, если дальнейшие «поправки» не ведут к уменьшению среднеквадратического отклонения). Если оно выполняется, то неизвестные  $a_2$ ,  $a_1$  и  $b_1$  найдены, иначе к пункту 5.

5. Поправляем поочередно сначала  $a_2$  для измененных  $a_1$  и  $b_1$ , а затем  $a_1$  и  $b_1$  для нового  $a_2$ . Проверяем условие пункта 4.

Зная аналитическую форму записи найденного распределения температур, можно найти величину отклонения квадратурной суммы от интеграла, которое для метода трапеций определяется по формуле

$$|\psi| = |J - \Sigma| \leq \frac{Mh^2}{24}(b-a),$$

где  $J$  – точное значение интеграла, а  $\Sigma$  – его квадратурная сумма;  $(b-a)$  – длина отрезка интегрирования (в нашем случае интегрирование ведется по длине трубы,

т. е. на отрезке  $[0, L]$ ),  $M = \max_{x \in [0, L]} T''(x)$  – максимум второй производной по длине трубы,  $h$  – шаг интегрирования, который необходимо определить, исходя из заданного относительного отклонения квадратурной суммы от точного интеграла.

Зададимся величиной относительного отклонения  $\varepsilon$ , тогда

$$|\bar{\psi}| = \left| \frac{J - \Sigma}{J} \right| \leq \frac{Mh^2}{24} L \frac{1}{|J|} = \varepsilon \Rightarrow h^2 = \frac{24\varepsilon|J|}{ML}. \quad (4)$$

Функция  $T(x)$  – убывающая (исходя из физического смысла процесса), и если  $T(x) = a_1 e^{a_2 x} + b_1$ , то  $a_2 < 0$ , а значит максимум второй производной  $M = \max_{x \in [0, L]} a_1 a_2^2 e^{a_2 x}$  будет достигаться при  $x = 0$  и равняться

$$M = a_1 a_2^2. \quad (5)$$

Для функции, заданной аналитически, можно найти точное значение интеграла:

$$J = \int_0^L (a_1 e^{a_2 x} + b_1) dx = \left( \frac{a_1}{a_2} e^{a_2 x} + b_1 x \right) \Big|_0^L = \frac{a_1}{a_2} e^{a_2 L} + b_1 L - \frac{a_1}{a_2}. \quad (6)$$

Задав  $\varepsilon$ , можно рассчитать величину шага интегрирования по формуле (4), а значит и число допустимых разбиений  $k = \frac{L}{h}$  инфракрасного нагревателя для замены трехмерной задачи сопряженного теплообмена на ряд последовательных двухмерных задач.

Характерными параметрами для инфракрасного нагревателя являются: 1) размеры излучателя  $R = 0,05$  м; 2) параметры на входе в трубу излучателя  $G = 3 \cdot 10^{-2}$  кг/с,  $T_0 = 1200$  °С,  $\mu_0 = 4,8 \cdot 10^{-5}$  Н · с/м<sup>2</sup>. Для расчета зададим температуру среды  $T_{\text{окр}} = 27$  °С, длину излучателя  $L = 15$  м.

Сходимость итерационного процесса построения распределения температуры внутри излучателя представлена на рис. 2, величина  $\psi_h$  рассчитывается по формуле (3).

Из рис. 2 видно, что с уменьшением шага погрешность также уменьшается, что говорит о сходимости и устойчивости построенного итерационного процесса. Анализируя график, представленный на рис. 2, также можно сделать вывод, что процесс имеет линейную сходимость. График найденного распределения температуры изображен на рис. 3.

Для полученного распределения с помощью метода наименьших квадратов и последовательного улучшения неизвестных параметров функции определили аналитическую форму записи распределения температуры по длине трубы –  $T(x) = 978e^{-0,139x} + 461$ . Сравнение точечной функции с ее аналитической формой представлено на рис. 4. Среднеквадратическое отклонение функции, записанной аналитически, от ее точечного оригинала составило  $\psi = 0,2325$  К. Если в качестве средней температуры по длине трубы взять среднеарифметическое максимальной

и минимальной температур, то получим  $T_{\text{cp}} = 0,5(1439 + 583) = 1011 \text{ K}$ , тогда относительное среднеквадратическое отклонение составит  $\bar{\psi} = \frac{\psi}{T_{\text{cp}}} 100 \% = 0,023 \%$ ,

т. е. полученная аналитическая запись достаточно точно описывает полученное распределение температур по длине трубы, значит ее можно использовать в расчетах (4)–(6).

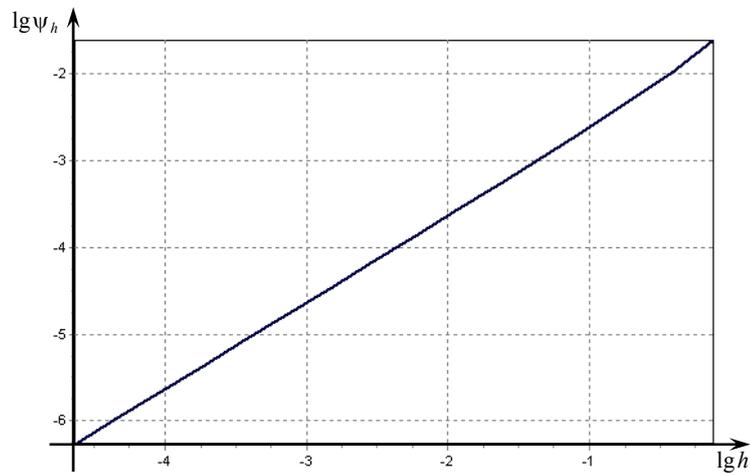


Рис. 2. Зависимость логарифма нормы погрешности от логарифма шага

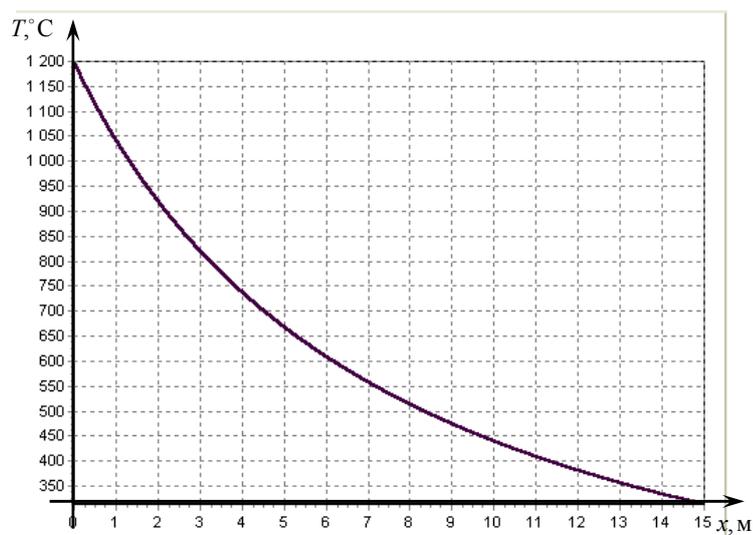


Рис. 3. Распределение по длине трубы среднemasовой по сечению температуры

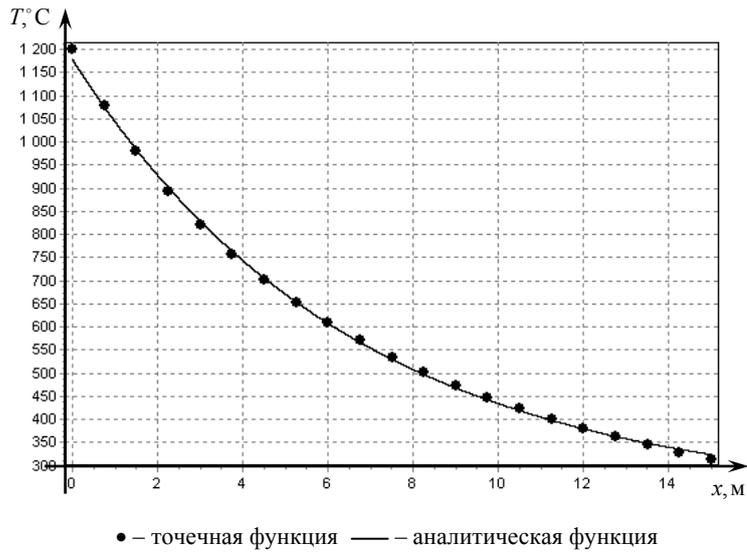


Рис. 4. Сравнение точечной функции с ее аналитической формой

Продлим график распределения температур, исходя из его аналитической записи (рис. 5).

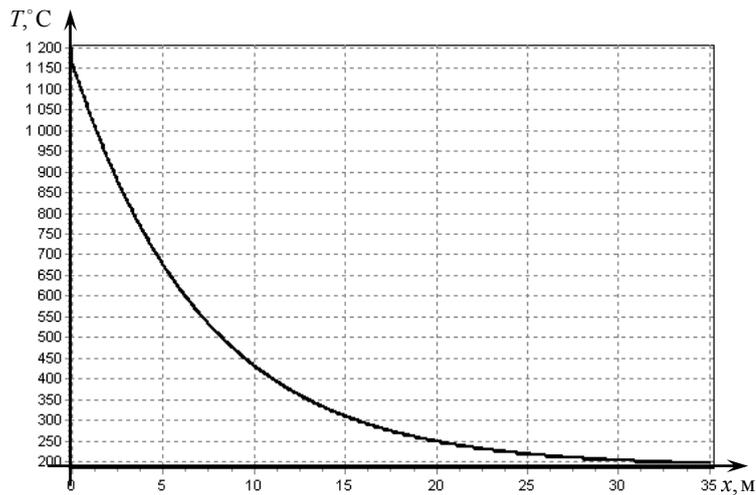


Рис. 5. График функции распределения температуры по длине трубы

Температура газа в излучателе должна падать примерно до 200 °С. Анализируя график на рис. 5, можно заметить, что на расстоянии большем 25 м от входа в трубу температура изменяется незначительно. Соответственно, целесообразно взять длину излучателя  $L = 25$  м.

Найдем величины, необходимые для определения шага:

1) максимум второй производной согласно формуле (5) равняется

$$M = a_1 a_2^2 = 978(-0,139)^2 \approx 18,9;$$

2) значение интеграла по формуле (6) будет равно

$$J = \frac{a_1}{a_2} e^{a_2 L} + b_1 L - \frac{a_1}{a_2} = \frac{978}{-0,139} e^{-0,139 \cdot 25} + 461 \cdot 25 - \frac{978}{-0,139} = 18343,12;$$

3) зададимся точностью  $\varepsilon = 1\%$ .

По формуле (4) определяем

$$h^2 = \frac{24\varepsilon|J|}{ML} = \frac{24 \cdot 0,01 \cdot 18343,12}{18,9 \cdot 25} \approx 9,32 \Rightarrow h = 3,05 \text{ м.}$$

Допустимое число разбиений  $k = \frac{L}{h} = \frac{25}{3,05} \approx 8$ , соответственно любое большее число разбиений даст еще более точный результат.

#### Список литературы

1. Вологодина, М. С. Математическая модель инфракрасного нагревателя / М. С. Вологодина, Ю. О. Михайлов // Интеллектуальные системы в производстве. – 2006. – № 1.
2. Исаченко, В. П. Теплопередача / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. – М. : Энергоиздат, 1981. – 416 с.
3. Уонг, Х. Основные формулы и данные по теплообмену для инженеров. – М. : Атомиздат, 1979. – 216 с.

УДК 65:334.75+65:338.22

В. П. Гродецкий, генеральный директор предприятий группы «Ижмаш»;  
В. А. Тенев, доктор физико-математических наук, профессор  
Ижевский государственный технический университет

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ХОЛДИНГОВОЙ СТРУКТУРОЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ АКТИВНЫХ СИСТЕМ

*Нахождение оптимального управления активными системами определена как задача многокритериальной оптимизации. Решение тестовых задач показало возможность решения задач этого класса генетическими алгоритмами. Проведено численное параметрическое исследование вариантов оптимального управления холдинговыми структурами.*

#### Модели активных систем

Понятие активной системы применяется при моделировании сложных социально-экономических объектов, имеющих иерархическую структуру [1]. На верхнем уровне иерархии находится управляющий центр. Управляемые элементы расположены на следующих уровнях иерархии. Подобное строение имеют, например, холдинговые структуры. Управляющий центр имеет свои интересы и цели, которых он