

УДК 377.169.3

В. А. Тенев, доктор физико-математических наук, профессор;
О. М. Перминова, кандидат экономических наук, доцент
Ижевский государственный технический университет

МИКРОМОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ СПЕЦИАЛИСТА

На основе аналогии процессов обучения и теплопереноса сформулирована модель обучения на микроуровне. Рассмотрены вопросы идентификации коэффициентов модели.

С. П. Капица в своей работе [1] проводит аналогию между моделью образования и математическими моделями горения. Рассмотрим образовательный процесс в высшем учебном заведении. Если студент, прослушав часть курса, прекращает обучение, то его не полностью усвоенные и несистематизированные знания со временем уменьшаются и забываются. В соответствии с теорией обучения и математической психологией объем знаний уменьшается по экспоненциальному закону.

Первый этап обучения неподготовленного студента, например, по общеобразовательным предметам состоит в запоминании некоторых правил, теорем, методов решения задач.

С продолжением образования наступает активная фаза владения предметом. Знание переходит в понимание и способность решать новые задачи. На этом этапе специалист может осуществлять творческую деятельность и оценивать свои возможности. Но фаза творческой деятельности может и не наступить, если процессы подачи знаний и их усвоения недостаточно интенсивны. Такой специалист способен выполнять рутинную работу, требующую определенных профессиональных навыков.

Остаточный уровень знаний и навыков работника будет определяться тем уровнем требований, которые к нему предъявляются на конкретном рабочем месте. Творческий специалист обладает способностями генерировать новые знания и передавать их другим.

Физический процесс прогрева и горения осуществляется следующим образом. При подводе тепла температура нагреваемого тела начинает повышаться. Если подвод энергии прекращается, то тело остывает до первоначального состояния. При интенсивном подводе энергии, если позволяет химический состав, начинаются реакции горения и возникает самоподдерживающийся процесс горения. Имеющаяся аналогия между тепловыми и образовательными процессами дает возможность применения в теории обучения хорошо разработанных математических моделей теории теплообмена и горения.

Примем, что величина Z характеризует степень профессиональной подготовки. Схема процесса обучения представлена на рис. 1. Из обучающей среды к обучаемому направляется поток информации и знаний. Эта информация воспринимается студентом (ΔQ^+). Одновременно происходит забывание части материала (ΔQ^-). В результате за некоторый промежуток времени Δt обучаемый усваивает некоторые знания ΔZ . При наличии у обучаемого творческого потенциала и тяги к самообразованию уровень знаний может увеличиваться при инициировании этого потенциала. Будем считать, что творческий потенциал описывается функцией, зави-

сящей от уровня усвоенных знаний $\Phi(Z)$. Тогда баланс остаточных знаний можно представить в виде

$$\Delta Z = (\Delta Q^+ - \Delta Q^-) \Delta t + \Phi(Z) \Delta t.$$

Процесс «восприятие–усвоение–забывание» развивается в некоторой системе координат $\xi \in [0; 1]$. Восприятие потока информации соответствует $\xi = 0$, а потеря информации и забывание происходит при $\xi = 1$. По аналогии с процессом теплообмена, где применяется закон Фурье, положим, что

$$Q \sim A \Delta Z,$$

где A – некоторый коэффициент преобразования информации и знаний, имеющий в качестве аналога в теории теплопередачи коэффициент теплопроводности.

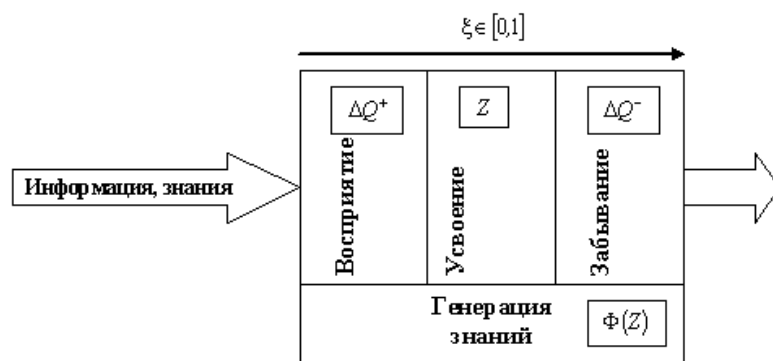


Рис. 1. Схема процесса обучения

Устремив $\Delta t \rightarrow 0$, получим уравнение

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = A \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} + \Phi(Z) \quad (1)$$

аналогичное уравнению теплопроводности.

Процесс генерации знаний, определяющий уровень творческих способностей, будем описывать функциями вида

$$\Phi(Z) = K \exp\left(-\frac{E}{Z}\right).$$

Такие функции характеризуются «энергией активации» E . На рис. 2 показаны графики этой функции при $E = (0.5; 2; 5)$. При малом значении «энергии активации» обучаемый быстро реагирует на накопленные знания Z , при более высоких значениях E существует некоторый порог Z_* , ниже которого эффект имеющихся знаний не реализуется.

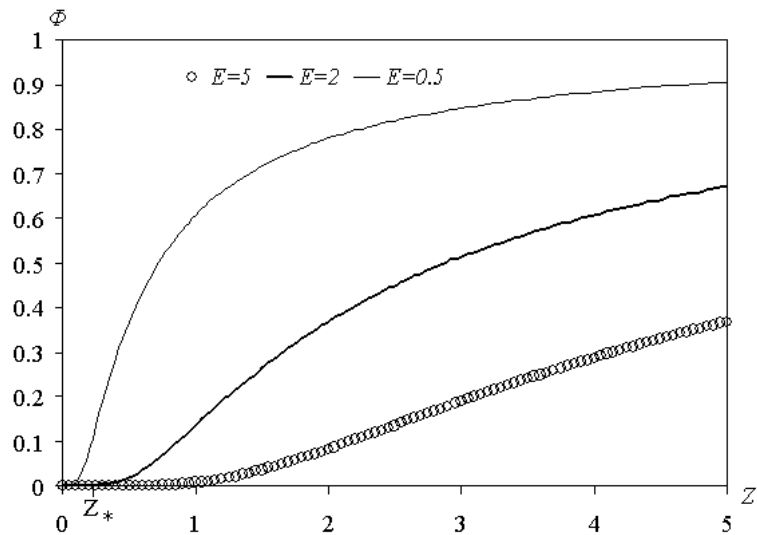


Рис. 2. Функция усвоения и генерации знаний, определяющая творческий уровень

Для уравнения (1) запишем начальные и граничные условия.

Начальные условия характеризуются некоторым начальным объемом знаний:

$$t = 0, Z = Z_0. \quad (2)$$

Граничные условия соответствуют поступающему потоку информации и забыванию. Будем задавать граничные условия третьего рода, когда поток усваиваемой информации пропорционален разности между уровнем знаний у преподавателя (Z_{00}) и обучаемого:

$$\xi = 0, B_L (Z_{00} - Z) = -A \frac{\partial Z}{\partial \xi}. \quad (3)$$

Подобного вида условия записываются и для забывания:

$$\xi = 1, B_R (Z_N - Z) = A \frac{\partial Z}{\partial \xi}, \quad (4)$$

где Z_N – уровень специальных знаний в среде обитания обучаемого.

Коэффициент B_L характеризует интенсивность подачи знаний и связан с методиками преподавания, с опытом и квалификацией преподавателя. Коэффициент B_R связан с характеристиками среды общения студента вне образовательного процесса.

При заданных начальных (2), граничных условиях (3), (4) и параметрах $A, E, K, Z_{00}, Z_N, Z_0, B_L, B_R$ решение уравнения (1) определяет усвоение знаний в процессе обучения.

Рассмотрим некоторые результаты моделирования, полученные из численного решения уравнения. Исходные значения параметров:

$A = 1; E = 1; Z_{00} = 1; Z_N = 0.1; Z_0 = 0.1; B_L = 10; B_R = 1$. Проведем оценку влияния коэффициента K в функции усвоения и генерации знаний $\Phi(Z) = K \exp\left(-\frac{E}{Z}\right)$, характеризующего творческий потенциал обучаемого. Результаты представлены на рис. 3.

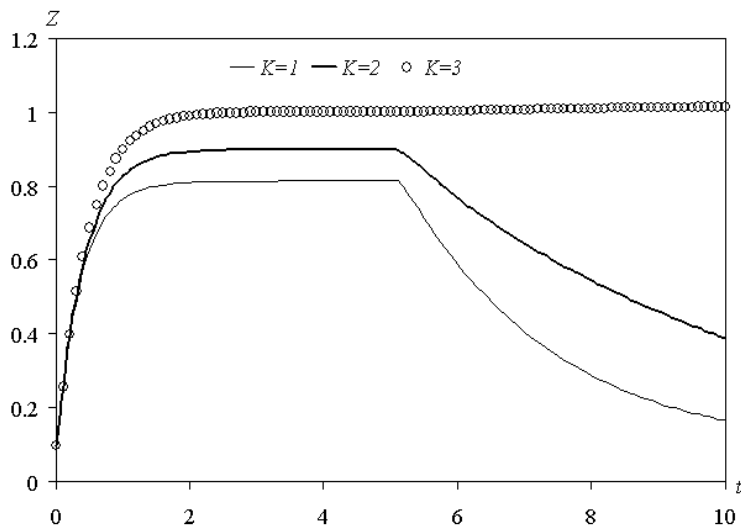


Рис. 3. Влияние творческого потенциала на обучение

Обучение осуществляется в течение промежутка времени $t \in [0; 5]$, а затем поток обучающей информации прекращается. В начале процесса обучения идет интенсивное повышение уровня знаний у обучаемого. С продолжением времени интенсивность накопления знаний снижается и устанавливается некоторый постоянный уровень величины Z . Меньшему значению коэффициента K в функции усвоения и генерации знаний соответствует более низкий уровень достигнутых знаний. При значениях коэффициента $K < 3$ с прекращением обучения наблюдается спад уровня знаний. Только для $K \geq 3$ обучаемый может выйти на уровень знаний преподавателя и впоследствии превзойти его. Эта модель специалиста, обозначенная на рис. 3 светлыми кружками, соответствует творческой личности, способной к самообразованию и генерации новых знаний. Но при попадании в неблагоприятную среду даже творческая личность может деградировать. На рис. 4 показаны варианты изменения уровня знаний личности с повышенным влиянием внешней среды, не способствующей творческому росту. Влияние внешней среды учитывается коэффициентом B_R , и он теперь увеличен с 1 до 5.

Как видим, личность с довольно высоким интеллектуальным и творческим потенциалом ($K = 3$) не справляется с негативным влиянием среды и фактически деградирует. Только очень одаренная личность с $K \geq 7$ способна развиваться и в этих неблагоприятных условиях.

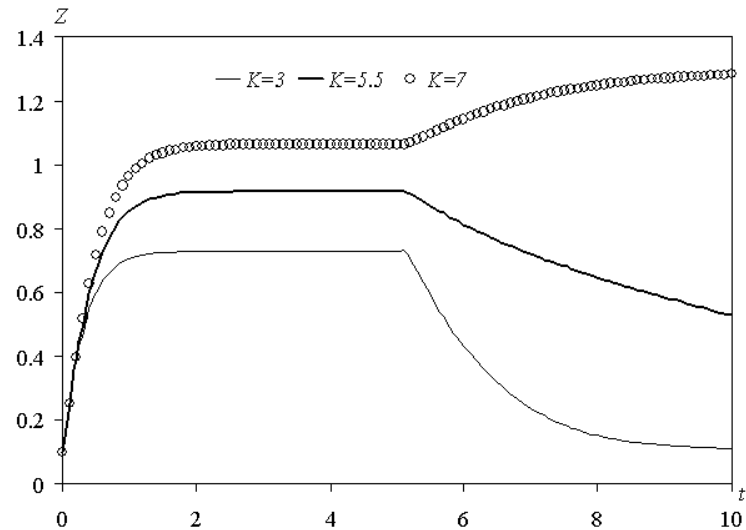


Рис. 4. Влияние внешней среды на творческую личность

Второй параметр в функции усвоения и генерации знаний – энергия активации E . Низкое значение этого параметра соответствует более быстрому усвоению материала. На рис. 5 показаны варианты развития обучения с изменением параметра E . Из результатов моделирования следует, что влияние энергии активации умений и творческий потенциал осуществляется по схожим механизмам. Сочетание высокого значения K и низкого E дает талантливого специалиста и профессионала.

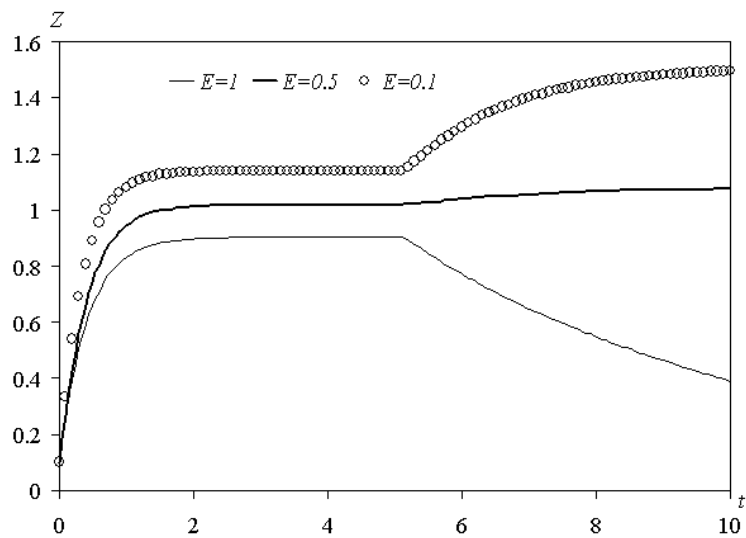


Рис. 5. Варианты развития обучения с изменением энергии активации

Еще один параметр, входящий в математическую модель обучения, – коэффициент A , отвечающий за восприимчивость и забывание материала. Расчеты приведены на рис. 6.

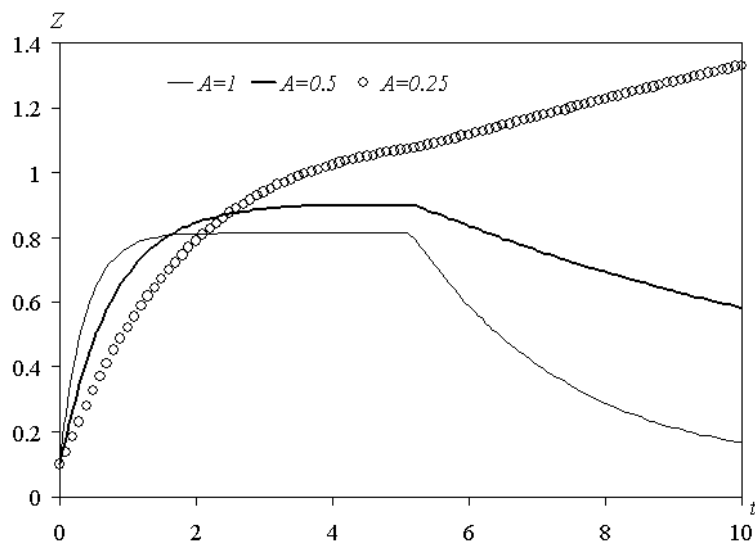


Рис. 6. Влияние восприимчивости на процесс обучения

При высоком значении коэффициента ($A = 1$) темп восприятия информации более высокий. Но также высока в этом случае и способность к забыванию (быстро вызубрил, сдал экзамен и забыл). Снижение значения этого коэффициента в четыре раза приводит к более медленному усвоению знаний. Но такого специалиста, вдумчиво разобравшегося в изучаемом материале, уже трудно сбить с правильного пути саморазвития и творчества.

Рассмотренную модель можно распространить на случай одновременного обучения нескольким предметам, что и происходит во всех учебных заведениях. Понятно, что уровень знаний математики для технического профиля оказывает сильное влияние на усвоение других предметов (физики, термодинамики, механики сплошных сред и т. д.). В свою очередь, восприятие математики будет более полным, если обучаемый будет видеть необходимость ее применения в практических областях. Под математикой понимается не только общий курс высшей математики, но и такие ее разделы, как численные методы, методы оптимизации и другие спецглавы. Изучение разных предметов разнесено по времени и, в принципе, можно поставить задачу оптимизации учебного плана по критерию максимизации уровня профессиональных знаний.

Знания, получаемые учащимся, образуют вектор $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$. Для каждого предмета $i = \overline{1, n}$ запишем уравнение (1):

$$\frac{\partial Z_i}{\partial t} = A_i(\mathbf{Z}) \frac{\partial^2 Z_i}{\partial \xi^2} + \Phi_i(Z_i). \quad (5)$$

Взаимное влияние проявляется через коэффициенты $A_i(\mathbf{Z})$, через граничные условия

$$\xi = 0, B_L^i(\mathbf{Z})(Z_{00}^i - Z_i) = -A_i(\mathbf{Z}) \frac{\partial Z_i}{\partial \xi}, \xi = 1, B_R^i(Z_N^i - Z_i) = A(\mathbf{Z}) \frac{\partial Z_i}{\partial \xi} \quad (6)$$

и через зависимость вектора $\mathbf{Z}(t)$ от времени.

Начальные условия имеют обычный вид: $t = 0, Z_i = Z_0^i$.

Уравнения (5), (6) могут быть использованы при постановке различных задач оптимального управления процессом обучения.

Идентификация коэффициентов модели

Система уравнений (1)–(4) содержит ряд числовых параметров: $A, E, K, Z_{00}, Z_N, Z_0, B_L, B_R$. Часть параметров – A, E, K, Z_0 – характеризует обучаемого, другая часть – Z_{00}, Z_N, B_L, B_R – обучающую среду. Можно попытаться вычислить эти параметры по определенной каким-либо образом зависимости $Z(t)$.

Уравнение (1) с начальными и граничными условиями (2)–(4) задает некоторый оператор

$$Z = \Theta(\mathbf{V}, t), \quad (7)$$

определяющий зависимость $Z(t)$ при заданных параметрах $\mathbf{V} = (A, E, K, Z_{00}, Z_N, Z_0, B_L, B_R)$. Оператор (7) будем определять как результат численного решения уравнений (1)–(4).

Пусть $Z_f(t)$ – набор данных, полученных по результатам контрольных тестов обучаемого в течение некоторого периода наблюдения T . Тогда для определения вектора неизвестных параметров $\mathbf{V}$ формулируется задача минимизации среднеквадратичного отклонения зависимости $Z = \Theta(\mathbf{V}, t)$ от контрольных значений $Z_f(t)$:

$$F(\mathbf{V}) = \int_0^T [\Theta(\mathbf{V}, t) - Z_f(t)]^2 dt \rightarrow \min. \quad (8)$$

Для решения задачи (8) применялся генетический алгоритм с вещественным кодированием [2], показавший высокую эффективность при оптимизации функций большой размерности и не требующий вычисления производных целевой функции.

Для тестирования метода определения коэффициентов модели обучения рассмотрим данные, полученные из решения прямой задачи при условиях: $A = 1; E = 1; Z_{00} = 1; Z_N = 0.1; Z_0 = 0.1; B_L = 10; B_R = 1$ (сплошная линия на рис. 7). На полученную зависимость также накладывались случайные отклонения (черные точки).

Восстановленная зависимость $Z(t)$ при среднеквадратичном отклонении $F = 0.033$ показана на рис. 7 светлыми точками.

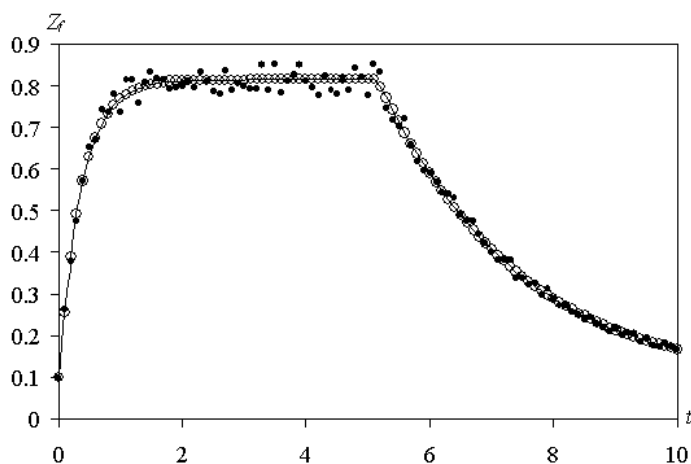


Рис. 7. Тестовые данные

Результаты расчетов показали, что зависимость $Z(t)$ восстанавливается с хорошей точностью при различных сочетаниях параметров модели. Если убрать случайную составляющую из зависимости $Z_f(t)$, то среднеквадратичное отклонение находится на уровне $F = 0.0002\text{--}0.001$. Сами параметры при этом получаются изменяющимися в довольно широких диапазонах, как это показано в табл. 1.

Таблица 1. Рассчитанные параметры модели

A	K	BL	BR
0.78	1.27	11.82	1.96
1.14	2.72	6.9	1.73
0.71	1.7	15	2.97
1.08	2.19	7.56	1.52
1.3	1.67	5.02	0.9
0.69	2.17	15	5.66
1.05	3	9.65	2.44
0.89	1.93	10.39	2.18
1.19	1.88	5.61	1.23
0.73	1.24	15	2.21

Остальные параметры модели изменяются незначительно: $E = 0.95\text{--}1.06$; $Z_{00} = 0.98\text{--}1.06$; $Z_N = 0.1\text{--}0.12$; $Z_0 = 0.1\text{--}0.12$.

Корреляционная матрица для параметров A, K, B_L, B_R приведена в табл. 2.

Таблица 2. Корреляционная матрица параметров

	A	K	BL	BR
A	1			
K	0.386857	1		
BL	-0.97668	-0.33154	1	
BR	-0.70715	0.126732	0.733326	1

Из табл.2 следует, что между параметрами A, B_L, B_R имеется достаточно тесная связь. Следовательно, процессы определения этих коэффициентов необходимо отделить друг от друга. Коэффициенты A, K характеризуют способности обучающегося. Задачу идентификации параметров модели следует разделить на несколько частей. Одна задача состоит в определении коэффициентов, характеризующих процесс обучения (уровень знаний преподавателей, эффективность методик преподавания). Другая задача заключается в нахождении параметров, определяющих способности обучающегося при заданных характеристиках среды обучения. Определение параметров обучающегося состоит в нахождении коэффициентов A, E, K, Z_0 . Два из них – E, Z_0 – определяются однозначно по результатам контрольных данных, как это следует из табл. 1. Для вычисления оставшихся – A, K – также можно применить разделение процесса обучения по времени.

По своему смыслу функция $\Phi(Z)$ начинает влиять на процесс обучения при наличии некоторого полученного уровня знаний. У творческой личности этот уровень знаний инициирует творческие способности. У посредственного обучения такое инициирование незначительно. Следовательно, на начальном процессе обучения, когда уровень полученных знаний невысок, величина коэффициента K не имеет значения. Это иллюстрирует рис. 8, на котором показана зависимость $Z(t)$ на начальном этапе обучения $t \in (0;1)$ при разных значениях K .

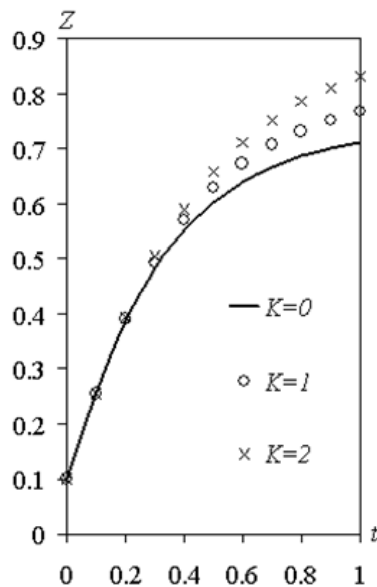


Рис. 8. Влияние коэффициента K на процесс обучения в начальном периоде

Из рис. 8 следует, что для времени $t \leq 0.4$ зависимости $Z(t)$ не отличаются друг от друга при разных значениях K . Следовательно, на начальном этапе обуче-

ния остается единственная влияющая характеристика обучаемого – A – способность восприятия знаний.

Решение задачи (8) для времени $T = 0.4$ позволяет определить величину параметра A , изменяющуюся в узком диапазоне $A = 0.98\text{--}1.05$. Зафиксировав этот диапазон, из решения задачи (8) получаем интервал оценок для коэффициента $K \in (0.92\text{--}1.18)$, что достаточно хорошо соответствует тестовым данным.

Список литературы

1. Капица, С. П. Синергетика и процессы будущего / С. П. Капица, С. П. Курдюмов, С. Г. Малинецкий. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 288 с.
2. Тенев, В. А. Применение генетических алгоритмов с вещественным кроссовером для минимизации функций большой размерности // Интеллектуальные системы в производстве. – 2006. – № 1. – С. 93–107.

УДК 519.[254+724]:621.39

А. А. Айзикович, кандидат физико-математических наук, доцент
Ижевский государственный технический университет

ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА С ГРУППОВОЙ СТРУКТУРОЙ В СТОХАСТИЧЕСКОМ КАНАЛЕ СВЯЗИ

Рассмотрена функция потерь на конечной группе, позволяющая дать оценку полученного сообщения для случая, когда на выходе канала связи с известной вероятностью принимаются сообщения, являющиеся элементами конечной группы. Рассмотрены также частный случай функции потерь и конкретные группы.

Постановка и обсуждение задачи

Пусть на выход канала связи поступает алфавит $G = \{x_1, \dots, x_n\}$, на котором задано распределение вероятностей

$$p_1 = p(x_1), \dots, p_n = p(x_n).$$

Каждая буква x_i алфавита G рассматривается как некоторая сумма сообщения и помехи. Необходимо по заданному распределению

$$p_1 \{x_1\} + \dots + p_n \{x_n\}$$

определить получаемое сообщение $\hat{x}$, $\hat{x} \in G$. Выделенное сообщение может быть затем декодировано, а ошибки, возникающие в результате помех, обнаружены и исправлены, если это допускает используемый при передаче код.

Если буквы x_i алфавита G взаимно однозначно сопоставимы точкам числовой оси (пространства $\mathbb{R}^1$) или даже пространства $\mathbb{R}^k$ ($k > 1$), то за сообщение $\bar{x}$ может быть принято математическое ожидание

$$\mathbf{M} x = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \bar{x},$$