

ния остается единственная влияющая характеристика обучаемого – A – способность восприятия знаний.

Решение задачи (8) для времени $T = 0.4$ позволяет определить величину параметра A , изменяющуюся в узком диапазоне $A = 0.98$ – 1.05 . Зафиксировав этот диапазон, из решения задачи (8) получаем интервал оценок для коэффициента $K \in (0.92$ – $1.18)$, что достаточно хорошо соответствует тестовым данным.

Список литературы

1. Капица, С. П. Синергетика и процессы будущего / С. П. Капица, С. П. Курдюмов, С. Г. Малинецкий. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 288 с.
2. Тенев, В. А. Применение генетических алгоритмов с вещественным кроссовером для минимизации функций большой размерности // Интеллектуальные системы в производстве. – 2006. – № 1. – С. 93–107.

УДК 519.[254+724]:621.39

А. А. Айзикович, кандидат физико-математических наук, доцент
Ижевский государственный технический университет

ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА С ГРУППОВОЙ СТРУКТУРОЙ В СТОХАСТИЧЕСКОМ КАНАЛЕ СВЯЗИ

Рассмотрена функция потерь на конечной группе, позволяющая дать оценку полученного сообщения для случая, когда на выходе канала связи с известной вероятностью принимаются сообщения, являющиеся элементами конечной группы. Рассмотрены также частный случай функции потерь и конкретные группы.

Постановка и обсуждение задачи

Пусть на выход канала связи поступает алфавит $G = \{x_1, \dots, x_n\}$, на котором задано распределение вероятностей

$$p_1 = p(x_1), \dots, p_n = p(x_n).$$

Каждая буква x_i алфавита G рассматривается как некоторая сумма сообщения и помехи. Необходимо по заданному распределению

$$p_1 \{x_1\} + \dots + p_n \{x_n\}$$

определить получаемое сообщение $\hat{x}$, $\hat{x} \in G$. Выделенное сообщение может быть затем декодировано, а ошибки, возникающие в результате помех, обнаружены и исправлены, если это допускает используемый при передаче код.

Если буквы x_i алфавита G взаимно однозначно сопоставимы точкам числовой оси (пространства $\mathbb{R}^1$) или даже пространства $\mathbb{R}^k$ ($k > 1$), то за сообщение $\bar{x}$ может быть принято математическое ожидание

$$\mathbf{M} x = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \bar{x},$$

если $\mathbf{M}x \in G$, или такая точка $x_0 \in G$, что

$$\min_{1 \leq i \leq n} d(\mathbf{M}x, x_i) = d(\mathbf{M}x, x_0), x_0 = \bar{x},$$

где $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2}$ – расстояние между элементами $x = (x_1, \dots, x_k)$,

$y = (y_1, \dots, y_k)$ в выбранном пространстве $\mathbb{R}^k$. В этом случае, если x – точное значение, $\tilde{x}$ – его оценка, а $\tilde{x} = x - \bar{x}$ – ошибка оценки, то функционал $J = \tilde{x}^2$ (среднеквадратичная оценка) будет достигать минимума при $x = \bar{x}$.

Если G – группа, т. е. буквы алфавита G есть элементы группы относительно некоторой групповой операции, то задача о выборе ее элемента по заданному распределению уже не может быть просто сведена к определению математического ожидания только лишь по той простой причине, что оно для данной группы может и не существовать [1].

Далее предлагается метод решения поставленной задачи для случая произвольной конечной группы, обсуждается правило максимальной апостериорной вероятности и выделяются два частных случая: группа с операцией логического сложения и циклическая группа.

Функция потерь на конечной группе

Введем на элементах группы G функцию r со значениями в $\mathbb{R}^1$:

$$r : G \rightarrow \mathbb{R}^1,$$

и свойствами:

1) $r(x) \geq 0$, $x \in G$ ($r(x)$ – неотрицательна);

2) $r(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$ ($r(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = e$ – единичному элементу группы G).

Наличие такой функции позволяет определить расстояние d (в широком смысле) между элементами x, y группы G следующим образом:

$$d(x, y) = r(x \cdot y^{-1}).$$

Здесь y^{-1} – элемент, обратный y ; « $\cdot$ » – групповая операция в G .

Функция $d(x, y)$ не является в прямом смысле расстоянием, которое вводится в метрическом пространстве. Для того чтобы $d(x, y)$ задавало такое расстояние (в точном смысле), необходимо потребовать еще два свойства:

3) $r(x \cdot y^{-1}) = r(y \cdot x^{-1})$;

4) $r(x \cdot y^{-1}) + r(y \cdot z^{-1}) \geq r(x \cdot z^{-1})$.

Свойство 3) гарантирует симметрию расстояния:

$$d(x, y) = d(y, x),$$

а свойство 4) есть правило «треугольника»:

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$$

Если для $r(x)$ выполнены свойства 1), 2), 3), то на G задана симметрика, а если 1), 2), 3), 4) – метрика.

Предположим теперь, что на G задано расстояние в широком или точном смыслах (симметрика или метрика) и вероятностное распределение

$$\rho_1 \{x_1\} + \dots + \rho_n \{x_n\}.$$

Зафиксируем элемент $x_i \in G$ и найдем величину

$$\mathbf{M} x_i = \sum_{j=1}^n \rho_j d(x_j, x_i),$$

которая будет характеризовать среднее отклонение элементов G от x_i .

Если

$$\mathbf{M} x_{i_0} = \min_{1 \leq i \leq n} \mathbf{M} x_i,$$

то x_{i_0} – тот элемент G , среднее отклонение от которого есть минимальное. Это позволяет выбрать за оценку $\bar{x}$ при данном распределении элемент x_{i_0} :

$$\bar{x} = x_{i_0}.$$

Таким образом,

$$\bar{x} = \arg \min_{x_i \in G} \mathbf{M} x_i,$$

$$\min_{1 \leq i \leq n} \mathbf{M} x_i = \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \rho_j d(x_j, x_i) = \sum_{j=1}^n \rho_j d(x_j, \bar{x}) = \mathbf{M} \bar{x}.$$

Если x – точное значение, а $\bar{x}$ – его оценка, то функция $d(x, \bar{x})$ характеризует близость $\bar{x}$ и x с учетом заданного распределения вероятностей, и в случае, когда r – симметрика или метрика, является функцией потерь и аналогом среднеквадратичной ошибки для евклидова пространства.

Действительно, функция потерь $L(x)$, $x \in G$, определяемая равенством

$$L(x) = d(x, e) = r(x),$$

обладает следующими свойствами:

- 1) $L : G \rightarrow \mathbb{R}^1$ (L – скалярная функция элементов группы);
- 2) $L(e) = 0$ (точная оценка не имеет потерь);
- 3) $L(x) = r(x)$ (L – неубывающая функция расстояния);
- 4) $L(x) = L(y)$, если $r(x) = r(y)$ (L – симметрика).

Следовательно, $\mathbf{M}$ есть функционал, определенный на функциях потерь $L(x \cdot x_i^{-1})$, $i = 1, \dots, n$, а $\bar{x}$ – точка минимума этого функционала.

Правило максимальной апостериорной вероятности

На любом множестве можно ввести дискретное или тривиальное расстояние по правилу

$$d(x, x) = 0, \quad d(x, y) = 1, \quad x \neq y.$$

Пусть на группе $G = \{x_1, \dots, x_n\}$ задана функция $r: G \rightarrow \{0, 1\}$ такая, что $r(e) = 0$, $r(x) = 1$, $x \neq e$. Тогда на G можно ввести дискретное расстояние

$$d(x, y) = r(x \cdot y^{-1}).$$

Следовательно, для фиксированного $x_i \in G$ функционал $\mathbf{M}$ принимает значение

$$\mathbf{M} x_i = \sum_{j=1}^n \rho_j d(x_j, x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \rho_j = 1 - \rho_i,$$

$$\min_{1 \leq i \leq n} \mathbf{M} x_i = \min_{1 \leq i \leq n} (1 - \rho_i) = 1 - \rho_{i_0} = \mathbf{M} x_{i_0}.$$

Если

$$i_0 = \arg \min_{1 \leq i \leq n} \mathbf{M} x_i, \quad \min_{1 \leq i \leq n} \mathbf{M} x_i = \mathbf{M} x_{i_0} = \bar{x},$$

то

$$i_0 = \arg \max_{1 \leq i \leq n} \rho_i = \arg \rho_{i_0},$$

т. е. в этом случае минимум функционала $\mathbf{M}$ достигается в точке $x = \bar{x}$ такой, что $\rho_{\bar{x}} = \max \{\rho_{x_1}, \dots, \rho_{x_n}\}$, где $\rho_{x_i} = \rho_i$.

При таком способе задания расстояния мы приходим к ситуации, когда при распределении

$$\rho_1 \{x_1\} + \dots + \rho_n \{x_n\}$$

за оценку $\bar{x}$ выбирается элемент $x \in G$ с максимальной вероятностью $\rho_{\bar{x}} = \max \{\rho_1, \dots, \rho_n\}$.

В случае когда максимум вероятности ρ_x достигается на нескольких элементах, то за $\bar{x}$ выбирается такой из элементов x , на которых достигается максимум, который в некотором смысле «лучше» других. Например:

- 1) $\bar{x}$ кодируется с меньшими энергетическими затратами, чем другие значения x ;
- 2) используется некоторая предыстория: удобно считать, что сигнал не изменился или обязан измениться и т. д.

Конечная группа с операцией поразрядного сложения

Пусть $G = \{x_0, \dots, x_{N-1}\}$ – группа с операцией поразрядного логического сложения. Можно считать, что элемент $x \in G$ представлен двоичным кодом

$$x = (\alpha_{x,0}, \dots, \alpha_{x,n-1}),$$

где $\alpha_{x,i} \in \{0,1\}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. При этом $N = 2^n$, и сумма элементов x и y определяется по правилу

$$x + y = (\alpha_{x,0} + \alpha_{y,0}, \dots, \alpha_{x,n-1} + \alpha_{y,n-1}),$$

причем сумма $\alpha_{x,i} + \alpha_{y,i}$ находится по модулю 2.

Если на группе G задано распределение

$$\rho_0 \{x_0\} + \rho_1 \{x_1\} + \dots + \rho_{N-1} \{x_{N-1}\},$$

то на ней можно определить проекционное математическое ожидание

$$\mu x = \bar{x} = (\alpha_{\bar{x},0}, \dots, \alpha_{\bar{x},n-1}),$$

а именно:

$$\mu x = (\mu x_0, \dots, \mu x_{n-1}).$$

При этом

$$\mu x_k = \begin{cases} 0, & \text{если } P_k \geq 0, \\ 1, & \text{если } P_k < 0, \end{cases}$$

где

$$P_k = \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^{\alpha_{x_i,k}} \rho_i.$$

В случае $P_k = 0$ для некоторого $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ математическое ожидание μx_k не определено, но для определенности в этом случае положено $\mu x_k = 0$.

На рассматриваемой группе естественно ввести расстояние Хемминга, определяемое как число несовпадений двоичных разрядов элементов x, y . Если

$$x = (\alpha_{x,0}, \dots, \alpha_{x,n-1}), \quad y = (\alpha_{y,0}, \dots, \alpha_{y,n-1}),$$

то расстояние $d(x, y)$ удобно определить формулой

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{x,i} - \alpha_{y,i})^2,$$

где уже $\alpha_{x,k}, \alpha_{y,k} \in \{0,1\} \subset \mathbb{R}$. Тогда функционал $\mathbf{M}$ определяется равенством

$$\mathbf{M} x = \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i d(x_i, x),$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{M} x - \mathbf{M} y &= \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i d(x_i, x) - \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i d(x_i, y) = \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{n-1} \rho_i (\alpha_{x,k} - \alpha_{y,k}) (\alpha_{x,k} + \alpha_{y,k} - 2\alpha_{x_i,k}). \end{aligned}$$

Покажем теперь, что минимум $\mathbf{M}$ достигается при $x = \hat{x} = \mu_k$. Пусть x и y таковы, что их двоичные коды совпадают во всех разрядах, кроме разряда $\hat{k}$, т. е.

$$\hat{x} = (\alpha_{x,0}, \dots, \alpha_{x,\hat{k}}, \dots, \alpha_{x,n-1}), \hat{y} = (\alpha_{y,0}, \dots, \alpha_{y,\hat{k}}, \dots, \alpha_{y,n-1})$$

при $\alpha_{x,i} = \alpha_{y,i}, i \neq \hat{k}, \alpha_{x,\hat{k}} + \alpha_{y,\hat{k}} = 1$.

В этом случае

$$\mathbf{M}x - \mathbf{M}y = \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i (\alpha_{x,\hat{k}} - \alpha_{y,\hat{k}}) (\alpha_{x,\hat{k}} + \alpha_{y,\hat{k}} - 2\alpha_{x_i,\hat{k}}).$$

Так как

$$\alpha_{x,\hat{k}} + \alpha_{y,\hat{k}} - 2\alpha_{x_i,\hat{k}} = 1 - 2\alpha_{x_i,\hat{k}} = (-1)^{\alpha_{x_i,\hat{k}}},$$

то

$$\mathbf{M}x - \mathbf{M}y = \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i (-1)^{\alpha_{x_i,\hat{k}}} (\alpha_{x,\hat{k}} - \alpha_{y,\hat{k}}) = P_{\hat{k}} (\alpha_{x,\hat{k}} - \alpha_{y,\hat{k}}).$$

Рассмотрим различные случаи:

а) $\alpha_{x,\hat{k}} = \alpha_{x,\hat{k}} = 0, \alpha_{y,\hat{k}} = 1$; тогда

$$P_{\hat{k}} \geq 0, \mathbf{M}x - \mathbf{M}y = -P_{\hat{k}} \leq 0, \mathbf{M}x \leq \mathbf{M}y;$$

б) $\alpha_{x,\hat{k}} = \alpha_{x,\hat{k}} = 1, \alpha_{y,\hat{k}} = 0$; тогда

$$P_{\hat{k}} < 0, \mathbf{M}x - \mathbf{M}y = P_{\hat{k}} < 0, \mathbf{M}x < \mathbf{M}y;$$

в) $\alpha_{x,\hat{k}} = \alpha_{y,\hat{k}} = 0, \alpha_{x,\hat{k}} = 1$; тогда

$$P_{\hat{k}} \geq 0, \mathbf{M}x - \mathbf{M}y = P_{\hat{k}} \geq 0, \mathbf{M}x \geq \mathbf{M}y;$$

г) $\alpha_{x,\hat{k}} = \alpha_{y,\hat{k}} = 1, \alpha_{x,\hat{k}} = 0$; тогда

$$P_{\hat{k}} < 0, \mathbf{M}x - \mathbf{M}y = -P_{\hat{k}} > 0, \mathbf{M}x > \mathbf{M}y.$$

Следовательно, при рассматриваемых значениях x и y минимальны значения $\mathbf{M}x$ и $\mathbf{M}y$ достигаются на том элементе, $\hat{k}$ -й разряд которого совпадает с $\hat{k}$ -м разрядом $\hat{x} = \mu_k$. Продолжая эту процедуру, получим:

$$\min_{x \in G} \mathbf{M}x = \mu_k = \hat{x}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае оценка $\hat{x} = (\hat{\alpha}_0, \dots, \hat{\alpha}_{n-1})$ определяется по формуле

$$\hat{\alpha}_k = \begin{cases} 0, & \text{если } P_k \geq 0, \\ 1, & \text{если } P_k < 0, \end{cases}$$

где

$$P_k = \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^{\alpha_{ik}} \rho_i, \quad x_i = (\alpha_{i,0}, \dots, \alpha_{i,n-1}).$$

Циклическая группа

Пусть $\mathbb{Z}_n$ – циклическая группа, на которой задано распределение

$$\rho_0 \{0\} + \rho_1 \{1\} + \dots + \rho_{n-1} \{n-1\}.$$

Зададим на $\mathbb{Z}_n$ симметрию, определяемую равенством [2]

$$d(x, y) = 1 - \cos \frac{2\pi(x-y)}{n} = 2 \sin^2 \frac{\pi(x-y)}{n}.$$

Тогда функционал $\mathbf{M}$ определяется равенством

$$\mathbf{M}x = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i d(x_i, x) = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \sin^2 \frac{\pi(i-x)}{n}.$$

Пусть $\bar{x}$ – значение из $\mathbb{Z}_n$, на котором достигается минимум $\mathbf{M}$, т. е.

$$\min_{x \in G} \mathbf{M}x = \mathbf{M}\bar{x} = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \sin^2 \frac{\pi(i-\bar{x})}{n}.$$

Тогда $(\mathbf{M}\bar{x})'_{\bar{x}} = 0$; отсюда

$$(\mathbf{M}\bar{x})'_{\bar{x}} = -2 \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \sin \frac{2\pi(i-\bar{x})}{n} \cdot \frac{\pi}{n} = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \sin \frac{2\pi i}{n} \cos \frac{2\pi \bar{x}}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \cos \frac{2\pi i}{n} \sin \frac{2\pi \bar{x}}{n}, \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi \bar{x}}{n} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \sin \frac{2\pi i}{n}}{\sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \cos \frac{2\pi i}{n}},$$

$$\bar{x} = \left[\frac{n}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \sin \frac{2\pi i}{n}}{\sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \cos \frac{2\pi i}{n}} \right],$$

где $[z]$ – наибольшее целое, не превосходящее z и определенное по модулю n .

Таким образом, получена оценка в случае циклической группы $\mathbb{Z}_n$.

Список литературы

1. Максимов, В. М. Математические ожидания для вероятностных распределений на компактных группах и их применения // Докл. АН СССР. – 1972. – № 3. – С. 524–527.
2. Willsky, A. S. On the algebraic structure of certain partially observer finite-state Markov process // Information and Control. – 1978. – Vol. 38. – P. 179–212.