

УДК 519.651

С. П. Копысов, кандидат физико-математических наук;
Ю. А. Сагдеева, научный сотрудник
Институт прикладной механики УрО РАН, Ижевск

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТОВ С ПОМОЩЬЮ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Предложен метод осреднения упругих характеристик с помощью многомасштабного анализа на основе вейвлет-преобразования Хаара и метода конечных элементов. Приводятся численные результаты вейвлет-осреднения в задачах теории упругости. Проводится сравнение результатов моделирования (эффективных характеристик) с асимптотическим методом осреднения периодических сред.

Процессы в композиционных материалах, как правило, описываются дифференциальными уравнениями с быстроосциллирующими коэффициентами. Численно решать эти задачи сложно, поскольку необходимо вводить очень мелкую расчетную сетку. Необходимость разработки методов решения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами привела к появлению новой области математических исследований – теории осреднения. Целью этой теории является построение таких моделей осреднения дифференциальных операторов с частными производными, чтобы решения этих новых уравнений с осредненными коэффициентами были близки к решениям исходных уравнений и осредненные (эффективные) свойства адекватно бы описывали поведение композита.

Наиболее проработанным и известным среди методов численного осреднения является асимптотический метод осреднения периодических сред, предложенный Бахваловым Н. С., Панасенко Г. П. [1] и Победрей Б. Е. [2]. В этом методе выводятся соотношения, связывающие микро- и макромасштабы. Решение уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами ищется в виде рядов по степеням малого параметра с коэффициентами, зависящими от переменных двух типов – макроскопических и микроскопических. Для определения эффективных свойств необходимо решение задач в классе периодических функций на ячейке с периодическими граничными условиями, что значительно усложняет реализацию данного метода. Лишь в случае определенной симметрии исследуемого образца периодические граничные условия можно заменить обычными краевыми условиями.

В асимптотической теории осреднения рассматривается следующая краевая задача, зависящая от малого параметра: $L_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon$ в области Ω с соответствующими граничными условиями. Здесь ε – малый параметр, такой что $u_\varepsilon \rightarrow \bar{u}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где \bar{u} – осредненное решение. Задача осреднения заключается в нахождении таких \bar{L} и \bar{f} , чтобы \bar{u} удовлетворяло дифференциальному уравнению $\bar{L}\bar{u} = \bar{f}$.

Например, если $L_\varepsilon = \frac{d}{dx} \left(a(x/\varepsilon) \frac{d}{dx} \right)$, где $a(x)$ – положительная функция с единичным периодом, отделенная от нуля, то можно показать, что u_ε сходится поточечно при $\varepsilon \rightarrow 0$, а предел \bar{u} удовлетворяет уравнению с постоянными коэффици-

ентами $\bar{L} = a_{eff} \frac{d^2}{dx^2}$. Причем эффективный коэффициент a_{eff} является гармоническим средним:

$$a_{eff} = \left(\int_0^1 1/a(x) dx \right).$$

Однако такое аналитическое представление найдено только для эффективного модуля в периодической среде в одномерном случае.

Вейвлет-преобразование предполагает иной подход для осреднения дифференциального оператора.

Многомасштабный анализ на основе вейвлет-преобразования Хаара

Дадим несколько определений. Вейвлетами называются функции, образующие базис пространства $L_2(\square)$ и получаемые сдвигом и сжатием одной функции (обозначим ее $\psi(x)$), называемой *материнским* вейвлетом, по формулам:

$$\psi_{n,k}(x) = 2^{n/2} \psi(2^n x - k), \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Функции имеют конечный носитель, и их средние равны нулю, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n,k} dx = 0.$$

Кроме того вводят *масштабирующие* функции $\phi_{n,k}(x)$, которые тоже являются базисом пространства $L_2(\square)$ и образуются по аналогичной схеме:

$$\phi_{n,k}(x) = 2^{n/2} \phi(2^n x - k), \quad (1)$$

но среднее этих функций равно единице, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n,k}(x) dx = 1$. В качестве вейвлетов

в данной работе был выбран базис Хаара. Его преимуществами являются простота, ортогональность и симметричность (к недостаткам можно отнести малую гладкость базиса). Базис Хаара задается следующими формулами:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2), \\ -1, & x \in [1/2, 1]; \end{cases} \quad \phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Иерархические свойства вейвлетов и масштабирующих функций лежат в основе кратномасштабного анализа [3; 4]. Такой анализ позволяет представить произвольную функцию $f(x) \in L_2(\square)$ с помощью функций $f_n(x)$ и $g_n(x)$ из последовательностей пространств $V_n = \text{span}\{\phi_{n,k}(x)\}$ и $W_n = \text{span}\{\psi_{n,k}(x)\}$, $n \in \square$, соответственно, которые обладают двумя свойствами:

- вложенность $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n \subset \dots \subset L_2(\square)$;
- иерархичность $f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(2x) \in V_{n+1}$.

Наилучшей аппроксимацией функции $f(x) \in L_2(\square)$ в пространстве V_n является ее ортогональная проекция $f_n(x)$ на это пространство. Функцию $f_n(x) \in V$ можно представить в виде

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + g_{n-1}(x) = f_{n-M} + \sum_{i=1}^M g_{n-i}(x) = c_{00}\phi(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k \in Z} d_{jk} \psi_{j,k}(x). \quad (2)$$

Представление (2) называется вейвлет-разложением функции f_n . Таким образом, функция из V_n представляется в виде совокупности грубого приближения (функция $\phi(x)$) и уточняющих добавок (функции $\psi_{j,k}(x)$).

Вейвлет-осреднение

Вейвлет-преобразование используется в комбинации с одним из сеточных методов численного решения уравнений в частных производных – методом конечных разностей (МКР) или методом конечных элементов (МКЭ). Рассмотрим вейвлет-осреднение на примере одномерного дифференциального уравнения. В МКЭ и в МКР исходное дифференциальное уравнение $Lu = f$ заменяется аппроксимирующим его дискретным уравнением $L_h u_h = f_h$ на некоторой сетке.

МКР. Проведем дискретизацию дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du}{dx} \right) = f, \quad x \in [0,1]$$

методом конечных разностей на равномерной сетке с шагом $h = 2^{-n}$ с помощью трехточечного шаблона. Обозначим через $\text{diag}(a)$ диагональную матрицу, содержащую значения $a(x)$ в узлах сетки, а через Δ_- , Δ_+ – левую и правую разности соответственно. Полученное дискретное уравнение имеет вид

$$L_{n+1}u = \frac{1}{h^2} \Delta_+ \text{diag}(a) \Delta_- u = F. \quad (3)$$

Применим к выражению (3) слева ортогональное одномерное вейвлет-преобразование Хаара W_n , матрица которого размером $2^n \times 2^n$ имеет вид

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & \ddots & & & \end{pmatrix}.$$

Получим:

$$\frac{1}{h^2} W_n \Delta_+ \text{diag}(a) \Delta_- W_n^T W_n u = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^d \\ u^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^d \\ f^c \end{pmatrix}.$$

Индексы c и d указывают на компоненты, соответствующие пространствам V_{n-1} и W_{n-1} . Компонента u^c является проекцией решения u системы (3) на про-

пространство V_{n-1} . Исключая u^d с помощью дополнения Шура, получим уравнение для u^c (этот вектор имеет вдвое меньше координат, чем исходный):

$$\overline{L}_n u^c = \overline{f}_n, \quad (4)$$

где $\overline{L}_n = L_n - C_n A_n^{-1} B_n$ – дополнение Шура. Разрешив эту систему, получаем искомого осредненное решение u^c . Осредненный оператор \overline{L}_n имеет структуру, подобную структуре исходного оператора. Для оператора уравнения (3) осредненный оператор \overline{L}_n записывается в разностном виде:

$$\overline{L}_n = \frac{1}{(2h)^2} \Delta_+ H \Delta_-.$$

Здесь матрица H описывает осредненные свойства материала и имеет диагональное преобладание, а элементы матрицы убывают по мере удаления от главной диагонали. Однако H уже не является диагональной, что делает затруднительной интерпретацию элементов матрицы в качестве коэффициентов некоторого осредненного материала.

При необходимости дальнейшего осреднения к системе (4) можно опять применить вейвлет-преобразование. Таким образом, рекурсивно используя вейвлет-преобразование несколько раз, можно найти грубое представление вектора u на нужном масштабе. Причем на самом грубом масштабе получается система из одного уравнения. Система (4) считается осредненной для (3).

В настоящей работе для проведения осреднения был выбран метод конечных элементов, так как он позволяет решать задачи со сложной геометрией и получать при этом более точное решение.

МКЭ. В случае метода конечных элементов дискретизируем уравнение на равномерной сетке с помощью линейных базисных элементов. Предполагается, что заданы краевые условия Дирихле или Неймана. В результате применения МКЭ получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$Au = b; \quad A = (a_{ij}); \quad b = (b_i); \quad u = (u_i); \quad i, j = 1 \dots 2^n, \quad (5)$$

где матрица A – симметрична и положительно определена. Применим к (5) вейвлет-преобразование Хаара W_n :

$$W A u = W b; \quad W A W^T W u = W b;$$

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} P_n^T & Q_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1}^c \\ u_{n-1}^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n-1}^c \\ b_{n-1}^d \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} P_n A P_n^T & P_n A Q_n^T \\ Q_n A P_n^T & Q_n A Q_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1}^c \\ u_{n-1}^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n-1}^c \\ b_{n-1}^d \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Введем обозначения:

$$K_{11} = Q_n A Q_n^T; \quad K_{12} = Q_n A P^T; \quad K_{21} = P_n A Q_n^T; \quad K_{22} = P_n A P_n^T;$$

$$u_1 = u_{n-1}^d; \quad u_2 = u_{n-1}^c; \quad b_1 = b_{n-1}^d; \quad b_2 = b_{n-1}^c,$$

перепишем систему (6) в виде

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Выразив u_1 из первого уравнения и подставив его во второе, получим систему

$$S u_2 = b, \quad (7)$$

где S – дополнение Шура и

$$S = K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12}; \quad b = b_2 - K_{21} K_{11}^{-1} b_1.$$

Разрешив систему (7), получаем искомое осредненное решение u_2 .

Отметим характерные особенности вейвлет-осреднения в случае базиса Хаара:

1) процедура осреднения является по существу блочным гауссовым исключением;

2) матрицы A_n и K_{11} разрежены, для их хранения и обращения могут быть использованы схемы хранения матриц без нулей и соответствующие методы для работы с такими матрицами. В этом случае обращение данной матрицы будет менее трудоемким, чем обращение исходной матрицы;

3) матрица S описывает осредненные свойства материала. Элементы матрицы S убывают по мере удаления от главной диагонали и для работы с данной матрицей можно использовать ленточные схемы хранения.

Более подробно о вычислительных особенностях вейвлет-преобразования см. [5].

Хотя алгоритм вейвлет-осреднения для метода конечных элементов аналогичен алгоритму для метода конечных разностей, имеется ряд отличий. Так, матрица системы в методе конечных элементов не является трехдиагональной и более заполнена. Граничные условия в методе конечных элементов вносятся в систему на этапе ее формирования и включаются в процесс осреднения. В методе конечных разностей граничные условия не участвуют в процессе осреднения (осредняется только оператор) и лишь после осреднения вносятся в систему.

Двумерное вейвлет-преобразование

Введем расширение вейвлет-представления с одномерного случая на двумерный в пространстве $L_2(\square^2)$. Базисные функции в этом случае образуются за счет всевозможных комбинаций тензорных произведений базисных функций для одномерного случая:

$$\phi_{j,k} \otimes \phi_{j,k}; \quad \psi_{j,k} \otimes \phi_{j,k}; \quad \phi_{j,k} \otimes \psi_{j,k}; \quad \psi_{j,k} \otimes \psi_{j,k}.$$

Аналогично одномерному случаю введем последовательность вложенных пространств v_n и пространства w_n :

$$v_n = \text{span}\{\phi_{n,k_1} \otimes \phi_{n,k_2}, k_i \in Z\};$$

$$w_n = \text{span}\{\psi_{n,k_3} \otimes \phi_{n,k_4}, \phi_{n,k_5} \otimes \psi_{n,k_6}, \psi_{n,k_7} \otimes \psi_{n,k_8}, k_i \in Z\}.$$

Как видно, $\dim(w_n) = 3 \cdot \dim(v_n)$. Пространство $v_n = V_n \otimes V_n$ отвечает за осредненные величины, пространство $w_n = (W_n \otimes W_n) \oplus (W_n \otimes V_n) \oplus (V_n \otimes W_n)$ содержит информацию о взаимосвязи двух направлений и уточняющую информацию.

В двумерном случае вектор u_{n-1}^d состоит из трех компонент, а вейвлет-преобразование формируется из четырех операторов проекций:

$$w_n = \begin{pmatrix} P \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix};$$

$$P: V_n \otimes V_n \rightarrow V_{n-1} \otimes V_{n-1}; \quad Q_1: V_n \otimes V_n \rightarrow V_{n-1} \otimes W_{n-1};$$

$$Q_2: V_n \otimes V_n \rightarrow W_{n-1} \otimes V_{n-1}; \quad Q_3: V_n \otimes V_n \rightarrow W_{n-1} \otimes W_{n-1}.$$

Операторы P, Q_1, Q_2, Q_3 будут состоять из двух блоков – один действующий по координате x , второй – по координате y :

$$P = P_x P_y; \quad Q_1 = P_x Q_y; \quad Q_2 = Q_x P_y; \quad Q_3 = Q_x Q_y.$$

Преобразование w_n является ортогональным, т. к. свойства базисных функций сохраняются. Применяя преобразование w_n к системе (5), получим (индексы n и $n-1$ опущены):

$$wAw^T wx = wb;$$

$$\begin{pmatrix} P \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} A (P^* Q_1^* Q_2^* Q_3^*) \begin{pmatrix} x^c \\ x_1^d \\ x_2^d \\ x_3^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^c \\ b_1^d \\ b_2^d \\ b_3^d \end{pmatrix},$$

или в матрично-блочном виде система приводится к виду

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

Порядок полученной системы будет совпадать с порядком исходной системы. Разложение системы на подпространства меньшей размерности может быть продолжено, как и в одномерном случае.

Вычисление эффективного модуля упругости

Рассмотрим модельную задачу: одноосное напряженное состояние упругого стержня. Считаем, что на торцах стержня задано постоянное давление p :

$$\frac{d}{dx} \left(E(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = 0, \quad x \in (-l, l); \quad E \cdot u'(-l) = -p; \quad E \cdot u'(l) = p.$$

Если среда является однородной и изотропной и имеет модуль Юнга $E(x) = E$, то решение этой задачи имеет вид $u = \frac{p}{E} x$. Подставляя в эту формулу осредненные значения перемещений $u_i = u(x_i)$ в узлах x_i , можно определить модуль упругости E_i по формуле

$$E_i = \frac{x_i}{u_i} p. \quad (8)$$

По вычисленным в каждом узле стержня значениям E_i определяется среднее арифметическое значение. Это значение выбирается в качестве эффективного модуля.

Если для стержня достаточно задать одну константу материала, например модуль Юнга E , то в пространственном случае в зависимости от симметрии и свойств материала число констант материала может варьироваться от 2 (изотропия) до 21 (случай полной анизотропии). Для пластины, также моделируя одноосное напряженное состояние, можно вычислить эффективные значения двух констант, широко используемых на практике, – модуля Юнга и коэффициента Пуассона в плоскости пластины. Обозначим через u_{ij}^1 и u_{ij}^2 соответствующие составляющие x и y перемещения u в узле (x_i, y_j) . В условиях одноосного растяжения вдоль оси x модуль Юнга и коэффициент Пуассона в направлении оси x в узле (x_i, y_j) определяются по формулам:

$$E_{ij} = \frac{x_i}{u_{ij}^1} p; \quad \nu_{ij} = \frac{x_i u_{ij}^2}{y_j u_{ij}^1}. \quad (9)$$

В формулах (8), (9) используются координаты узлов новой сетки осредненного поля перемещений. Координаты этих узлов для стержня определяются согласно схеме на рис. 1. Исходный вектор неизвестных системы (5), полученной в МКЭ, дает значения неизвестной функции в узлах исходной сетки. В случае вейвлет-преобразования Хаара на каждом шаге число неизвестных в системе сокращается в 2 раза, а каждый столбец (строка) матрицы осредненной системы уравнений получается с помощью преобразования двух соседних столбцов (строк) матрицы исходной системы. Две соседние переменные в векторе неизвестных исходной системы преобразуются в одну неизвестную осредненной системы. Поскольку переменные в векторе неизвестных упорядочены по номеру узла, на каждом шаге осредняются значения, соответствующие соседним узлам сетки. Полученные осредненные значения уже нельзя сопоставить какому-либо узлу исходной сетки, т. к.

они сочетают в себе значения для двух узлов. Поэтому новый узел помещается по середине между двумя осредняемыми узлами. Недостатком данного подхода является то, что осредненное решение определено лишь на части исходной области, поскольку узлы новой сетки смещаются к центру. Шаг новой сетки h_1 будет отличаться от старого h_0 в два раза: $h_1 = 2h_0$. Однако этот недостаток может быть преодолен с помощью расширения физической области на фиктивную область. Например, решение продолжается за пределы новой сетки нечетным образом относительно своих значений на границе. Координаты в двумерном случае определяются по аналогичной схеме.

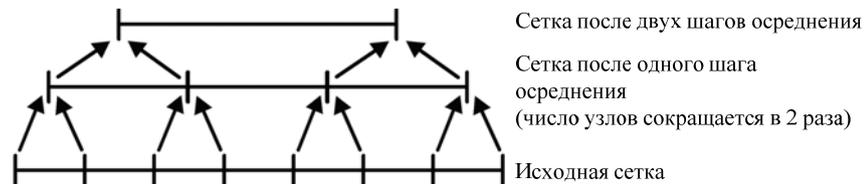


Рис. 1. Изменение координат сетки

Таким образом, алгоритм вейвлет-осреднения для получения упругих эффективных свойств имеет следующий вид:

1. Рассматривается задача в перемещениях для одноосного напряженного состояния композитной пластины или стержня.
2. С помощью метода конечных элементов обычным образом формируется матрица системы линейных алгебраических уравнений.
3. К полученной СЛАУ применяется вейвлет-преобразование Хаара; система уравнений после преобразования становится блочной. Вектор неизвестных разбивается на две составляющих компоненты – вектор осредненных неизвестных и вектор «деталей» (уточняющих компонент).
4. С помощью дополнения Шура из системы исключается вектор неизвестных деталей и формируется система для осредненного вектора.
5. Существует два варианта дальнейших вычислений: а) полученная система разрешается относительно вектора неизвестных и в качестве результата имеется вектор осредненных перемещений; б) к полученной системе вновь применяется вейвлет-преобразование; таким образом могут быть получены осредненные значения перемещений на нескольких масштабах.
6. По соотношениям (8), (9), связывающим перемещение, координаты точки и упругие константы определяются осредненные модуль Юнга пластины (или стержня) и коэффициент Пуассона пластины.

Использование представления вектора u_2 системы (7) не ограничивается только задачами теории упругости. Аналогичная схема вычисления может использоваться для получения эффективного коэффициента теплопроводности.

Численные примеры

Процедура осреднения тестировалась на нескольких примерах, которые демонстрируют основные свойства вейвлет-осреднения.

Пример 1. Рассматривается дифференциальное уравнение с периодическим коэффициентом $a(x)$, принимающим попеременно значения 1 или 100:

$$-(a(x)u')' = 10; \quad u(0) = 0; \quad u'(1) = 0.$$

На рис. 2, а представлено численное решение данного уравнения с помощью МКЭ на сетке из 256 узлов. На том же рисунке представлено решение, осредненное с помощью трех шагов вейвлет-преобразования (конечная сетка состоит из 32 узлов), и решение, полученное с помощью асимптотического метода осреднения. Согласно асимптотической модели [1] осредненный модуль равен среднему гармоническому значению $a_c = \left(\int_a^b \frac{1}{a(x)} dx \right)^{-1} = 1,9726$.

На рис. 2, б показан увеличенный фрагмент интервала (0,4; 0,5). Отметим, что решение имеет волнообразно-ступенчатую форму, а осредненное решение располагается вблизи точного решения и является его сглаженным представлением. Обе модели осреднения хорошо аппроксимируют осциллирующее решение и практически совпадают.

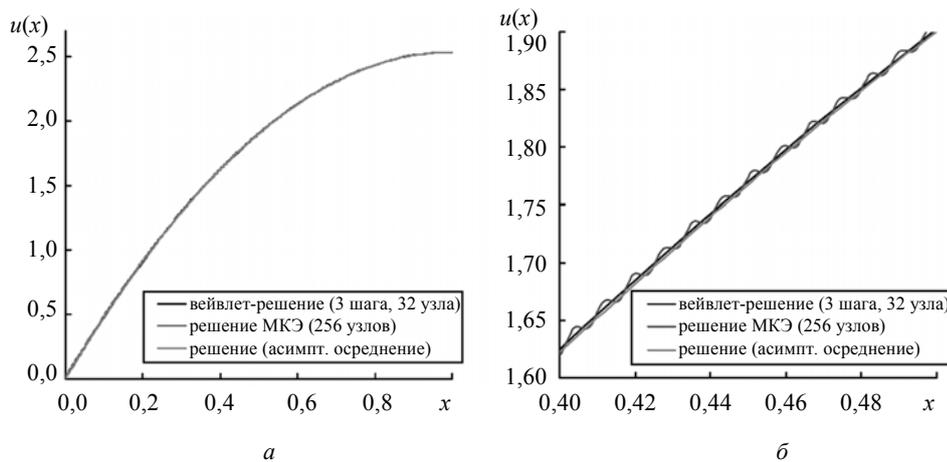


Рис. 2. Сравнение полученных решений (б – увеличенный фрагмент интервала (0,4; 0,5))

Пример 2. Рассматривается одномерная задача упругости с быстроосциллирующим модулем упругости, имеющим распределение, показанное на рис. 3:

$$\frac{d}{dx} \left(E(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = 0, \quad x \in (0, 5); \quad u(0) = 10; \quad Eu'(5) = 24.$$

На рис. 4 представлено численное решение данного уравнения с помощью МКЭ на сетке из 64 узлов, а также осредненное решение, полученное после двух и четырех шагов осреднения. Решение не имеет ярко выраженных осциллирующих свойств, как в примере 1, – оно совершает сглаженные колебания. Вейвлет-осреднение по-прежнему показывает хорошие свойства и решение, определенное всего лишь для четырех узлов, хорошо описывает поведение неосредненного решения.

Пример 3. Перейдем к определению эффективного модуля упругости. Для этого используем процедуру, описанную в п. 4. Проведем серию расчетов по осреднению решения для стержня с разным числом включений в случае одномерной задачи теории упругости. Объемная доля включений во всех примерах составляет 30 %.

Включения располагаются симметрично относительно центра и равномерно распределяются по стержню.

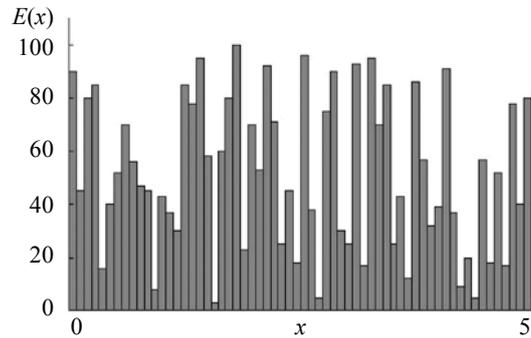


Рис. 3. Начальное распределение модуля Юнга

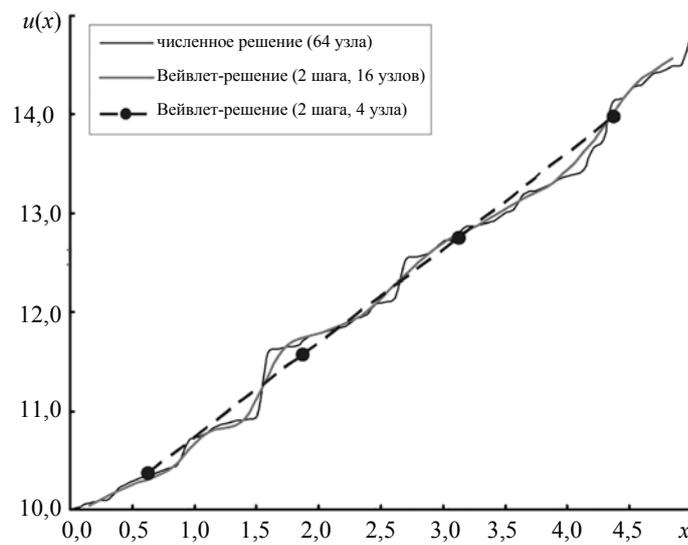


Рис. 4. Решение неосредненной системы для сетки из 64 узлов и осредненные решения для сеток из 16 и 4 узлов

Стержень имеет длину $l = 2$, но поскольку рассматриваемая задача симметрична, ее можно заменить следующей задачей на половине стержня:

$$\frac{d}{dx} \left(E(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = 0, \quad x \in [0, 1]; \quad u(0) = 0; \quad E \frac{du}{dx} = 0,0069.$$

Число n включений задавалось $n = 1, 2, 4, 7, 10$. Коэффициент $E(x)$ принимает значение 1 для материала и 100 для включения.

На рис. 5 показано решение в случае одного включения. На рис. 6 представлены результаты для семи включений.

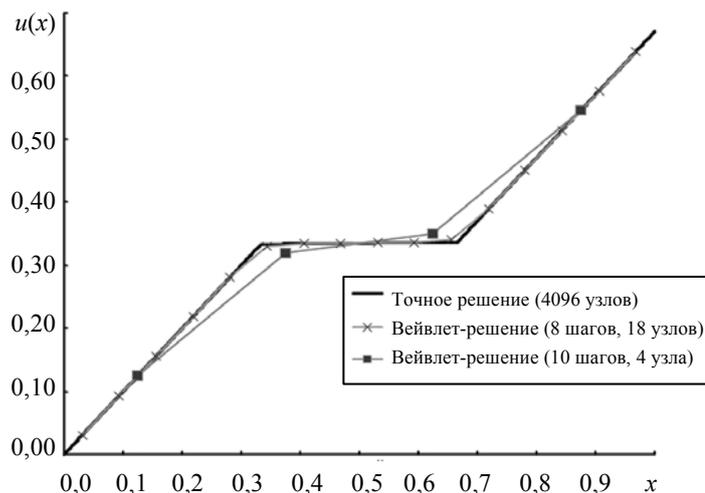


Рис. 5. Решение неосредненной системы для сетки из 4096 узлов и осредненные решения для сеток из 16 и 4 узлов

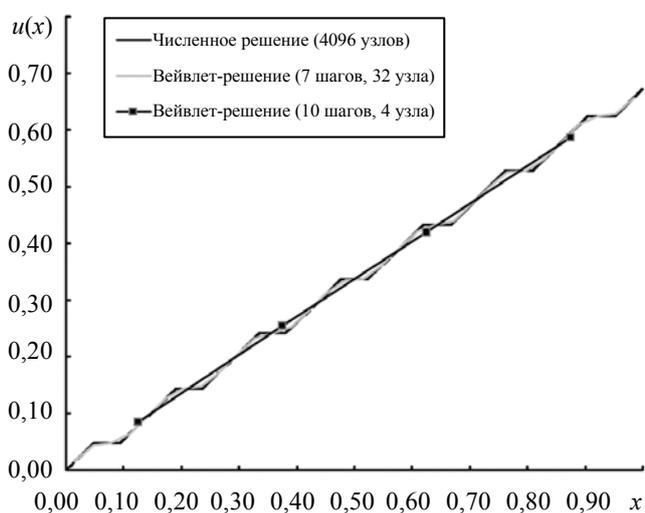


Рис. 6. Решение неосредненной системы для сетки из 4096 узлов и осредненные решения для сеток из 32 и 4 узлов

В этой серии расчетов анализировалась зависимость эффективного модуля упругости от шага осреднения и числа включений. Согласно графикам на рис. 7 наблюдается незначительный рост модуля E на последних шагах осреднения. Также можно заметить, что с ростом числа включений уменьшается диапазон вариаций модуля. Так, в примере с одним включением этот модуль изменяется в диапазоне от 1,392 до 1,492, тогда как для примера с десятью включениями модуль изменяется в пределах от 1,479 до 1,49, т. е. практически не зависит от шага осреднения.

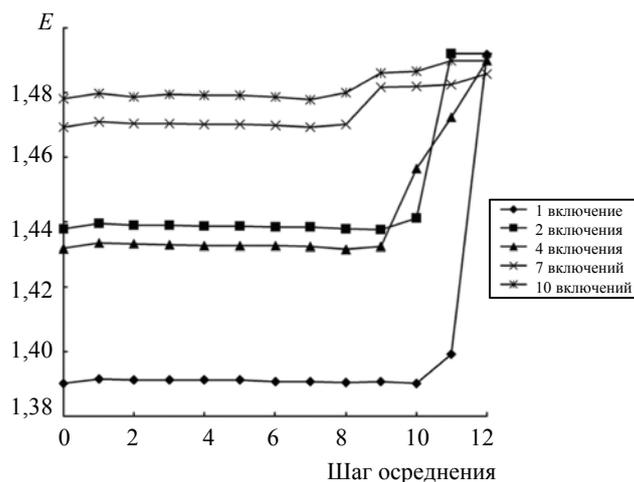


Рис. 7. Осредненные модули упругости в зависимости от шага осреднения

Пример 4. Рассмотрим пластину (рис. 8), состоящую из двух материалов – матрицы с константами $E = 1$, $\nu = 0,3$ и включения квадратной формы с константами $E = 0,5$, $\nu = 0,3$. Исследуем, как меняются осредненные модуль Юнга и коэффициент Пуассона при различных объемных долях включения. Вычислим значения коэффициентов на основе формул одноосного напряженного состояния, описанным в § 4. Расчетная сетка МКЭ состоит из 4096 узлов (64 узла по вертикали и 64 узла по горизонтали). Результаты вейвлет-осреднения после 6 шагов (область стягивается в точку) представлены в табл. 1. В той же таблице показаны результаты асимптотического осреднения. Различия для значений модуля Юнга при объемной доли $V = 0,1$ имеют порядок 5 %, тогда как при $V = 0,5$ отклонение близко к 15 %. Такое поведение при большой объемной доле объясняется тем, что в этом случае напряженное состояние в пластине уже больше нельзя считать близким к одноосному.

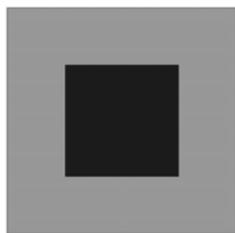


Рис. 8. Квадратное включение

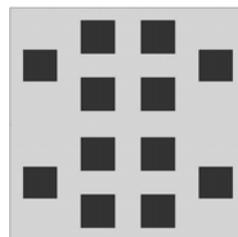


Рис. 9. 12 включений

Пример 5. Вейвлет-осреднение может использоваться не только для полностью симметрично расположенных включений. Рассмотрим материал с 12 включениями (рис. 9). Свойства данной пластинки различны по направлениям x и y , поэтому

модули E_x , E_y , ν_x , ν_y будут отличны друг от друга. Свойства материалов включений и матрицы, а также расчетная сетка остаются теми же самыми, что и в предыдущем примере. Результаты осреднения в зависимости от шага осреднения представлены в табл. 2. В четвертом и пятом столбцах таблицы показаны результаты осреднения, полученные на основе средних напряжений и деформаций в теле:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \int_V \sigma_{ij}(x_i) dv; \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \int_V \varepsilon_{ij}(x_i) dv.$$

В этом случае эффективные жесткости C_{ijkl}^{eff} линейно-упругого тела определяются посредством соотношения $\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^{eff} \langle \varepsilon_{kl} \rangle$.

Однако для строгого выполнения этих соотношений осреднения необходимо иметь точные решения для полей напряжений и деформаций в гетерогенной среде. В таблице в четвертом и пятом столбцах для сравнения указано, как изменяются значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона в зависимости от шага сетки (использовались сетки 64×64 узла, 194×194 и 230×230 узлов). Значения модуля Юнга растут с увеличением шага сетки, а величина коэффициента Пуассона почти не изменяется.

Таблица 1. Осредненные свойства после 6 шагов

Объемная доля включения	Вейвлет-преобразование		Асимптотическое осреднение	
	E	ν	E	ν
0,1	0,889	0,297	0,931	0,298
0,2	0,792	0,301	0,869	0,295
0,3	0,726	0,305	0,814	0,292
0,4	0,675	0,308	0,761	0,298
0,5	0,63	0,309	0,712	0,288

Таблица 2. Осредненные свойства в зависимости от шага осреднения

Шаг осреднения	Вейвлет-преобразование		МКЭ		Асимптот. осреднение	
	E_x	ν_x	E_x	ν_x	E_x	ν_x
1	0,781	0,312	(64 × 64)	(64 × 64)		
2	0,78	0,311	0,719	0,283		
3	0,778	0,309	(194 × 194)	(194 × 194)	0,769	0,265
4	0,78	0,308	0,741	0,282		
5	0,803	0,309	(230 × 230)	(230 × 230)		
6	0,779	0,3	0,743	0,282		

Заключение

Разработан алгоритм осреднения на основе одномерного и двумерного вейвлет-преобразований Хаара и метода конечных элементов. Приведены примеры численного осреднения решений дифференциальных уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами для статических задач теории упругости. Получены значения осредненного модуля Юнга упругого стержня и осредненных модулей Юнга и коэффициента Пуассона пластины. Результаты моделирования сравнивались с асимптотическим методом осреднения.

Список литературы

1. Бахвалов, Н. С. Осреднение процессов в периодических средах / Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
2. Победря, Б. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 336 с.
3. Dorobantu, M. Wavelet-based numerical homogenization / M. Dorobantu, B. Engquist // SIAM. J. Numer. Anal. – 1998. – Vol. 35 – P. 540–559.
4. Столниц, Э. Вейвлеты в компьютерной графике / Э. Столниц, Т. Де Роуз, Д. Салезин. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 272 с.
5. Копысов, С. П. Вычислительные особенности двумерного вейвлет-осреднения в задачах многомасштабного анализа / С. П. Копысов, Ю. А. Сагдеева // Вычислительные методы и программирование. – 2005. – Т. 6. – С. 1–8.

УДК 629.7.01

А. М. Сипатов, кандидат технических наук;
Н. О. Чухланцева;
М. В. Усанин, кандидат технических наук
ОАО «Авиадвигатель», Пермь

**АНАЛИЗ АКУСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕНТИЛЯТОРНОЙ
СТУПЕНИ АВИАЦИОННОГО ДВИГАТЕЛЯ**

Представлен подробный анализ различных вариантов геометрии вентиляторной ступени с точки зрения ее аэродинамических и акустических характеристик. Все исследования проведены на основе результатов трехмерных газодинамических расчетов ротор/статор-взаимодействия рабочего колеса вентилятора с лопатками направляющего аппарата (НА) внутреннего контура и лопатками спрямляющего аппарата (СА) наружного контура. В используемом подходе распределение разности нестационарного давления на средней поверхности лопатки спрямляющего аппарата рассматривается как распределенный акустический источник. Проведен анализ шести различных вариантов геометрии вентиляторной ступени.

Введение

В настоящее время перед компаниями, занимающимися разработкой и проектированием авиационных двигателей, стоит серьезная задача по улучшению экологических характеристик создаваемых силовых установок. В первую очередь это связано с постоянно ужесточающимися международными нормами ИКАО по выбросам вредных веществ и уровню шума.

Для авиационных двигателей с большой степенью двухконтурности (более 4), значительный вклад в суммарный уровень шума на всех режимах работы вносит тональный шум вентиляторной ступени. В данной статье описан опыт применения методики оценки газодинамических и акустических характеристик вентиляторной ступени на основе результатов трехмерных нестационарных газодинамических расчетов ротор/статор-взаимодействия. В используемом подходе распределение разности амплитуды нестационарного давления на средней поверхности лопатки спрямляющего аппарата рассматривается как распределенный акустический источник. Данная работа является продолжением работ, изложенных в статьях [1; 2].