

УДК 621.391

О. В. Пономарева, кандидат технических наук, доцент;  
Ижевский государственный технический университет  
имени М. Т. Калашникова

А. В. Пономарев, кандидат экономических наук, руководитель аппарата  
Центральная избирательная комиссия Удмуртской Республики

В. А. Пономарев, доктор технических наук, профессор  
Ижевский государственный технический университет  
имени М. Т. Калашникова

### ОБОБЩЕНИЕ АЛГОРИТМА ГЕРЦЕЛЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫЯВЛЕНИЯ СКРЫТЫХ ПЕРИОДИЧНОСТЕЙ

Рассмотрены основные методы обнаружения отдельных тональных компонент и алгоритмы их реализации. Проанализированы их достоинства и недостатки. Предложено обобщение алгоритма Герцеля. Предложенный алгоритм, в отличие от стандартного алгоритма Герцеля, позволяет проводить оценку спектра не на фиксированных частотах, а из набора частот, число которых варьируется параметром  $\theta: \{2\pi(k+\theta)/(s \cdot N)\}$ , где  $k=0, N/2-1, 0 \leq \theta < 1, N$  – число отсчетов сигнала в блоке,  $s$  – число блоков. В отличие от стандартного алгоритма Герцеля, обобщенный алгоритм позволяет осуществить полный контроль за резонансной частотой фильтра.

**Ключевые слова:** параметрическое дискретное преобразование Фурье, скользящее параметрическое дискретное преобразование Фурье, обнаружение, гармоническая компонента, алгоритм Герцеля, скрытые периодичности

#### Введение

При решении задач распознавания образов в различных областях научных исследований приходится сталкиваться с цифровой обработкой случайных сигналов, содержащих «скрытые» гармонические (тональные) компоненты (решение так называемых задач выявления скрытых периодичностей [1]). Из предметных областей, где необходимо решать задачи такого вида, можно, для примера, назвать анализ сигналов в пассивной гидролокации для обнаружения и классификации как надводных, так и подводных судов [2]. В машиностроении при виброакустическом функциональном диагностировании объектов используется факт того, что структура виброакустических сигналов характеризуется наличием гармонических рядов, порождаемых теми или иными дефектами, при функционировании различных узлов и механизмов [3]. Заметим, что существует ряд областей, где для решения определенного круга задач такие сигналы создаются искусственно. Например, при реализации тонального набора в телефонии.

Рассмотрим основные методы обнаружения отдельных тональных компонент и алгоритмы их реализации.

#### Методы и алгоритмы обнаружения отдельных гармонических компонент

Эффективным методом вычисления однобинового дискретного преобразования Фурье (ДПФ) является алгоритм Герцеля, широко применяющийся при декодировании DTMF-сигналов (англ. Dual-Tone Multi-Frequency, DTMF) – двухтональных многочастотных сигналов, используемых при тональном наборе телефонного номера.

Алгоритм Герцеля позволяет вычислять значение  $k$ -го бина  $N$ -точечного ДПФ [4, 5]:

$$S_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad W_N^k = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right) \quad (1)$$

и представляет собой БИХ-фильтр второго порядка с двумя действительными коэффициентами в обратной цепи и одним комплексным коэффициентом в прямой цепи фильтра. Структура фильтра Герцеля приведена на рис. 1, а. Возможен и вариант алгоритма Герцеля в виде БИХ-фильтра, приведенный на рис. 1, б. Варианты отличаются друг от друга реализацией прямой цепи фильтра.

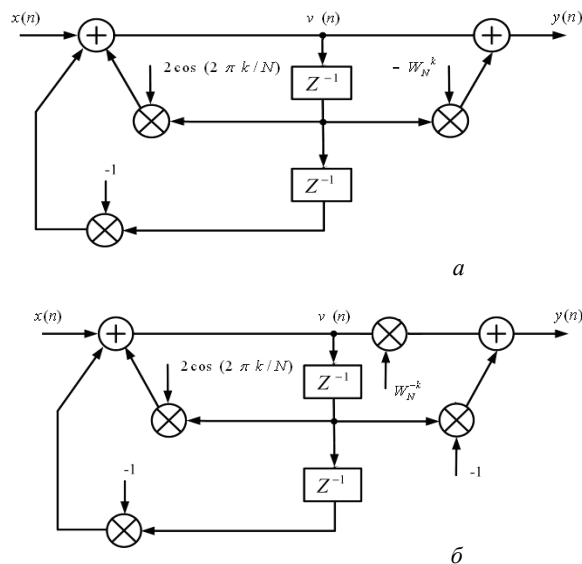


Рис. 1, а, б. Структуры БИХ-фильтров, реализующие алгоритм Герцеля

Фильтр Герцеля, как справедливо отмечено в [4], используется нестандартно: не как обычный фильтр, в котором запоминаются все выходные отсчеты. В алгоритме Герцеля при вычислении  $k$ -го коэффициента сохраняется только каждое  $(N-1)$ -е его (коэффициента) значение, т. е. сохраняется  $(N-1)$ -й

отсчет  $k$ -го коэффициента,  $(2N-1)$ -й отсчет  $k$ -го коэффициента,  $(3N-1)$ -й отсчет  $k$ -го коэффициента и т. д. Отметим, что эти коэффициенты совпадают с коэффициентами ДПФ.

Другими словами, обработка входного сигнала носит блочный характер.

Для получения указанных значений  $k$ -го коэффициента ДПФ в алгоритме Герцеля проводится одна операция комплексного умножения в прямой цепи фильтра и  $N$  действительных операций по вычислению промежуточных результатов в обратной цепи фильтра. Отметим, что именно отказ от получения всех выходных отсчетов (следовательно, и их сохранения) в прямой цепи фильтра обеспечивает алгоритму Герцеля экономию в числе вычислений по сравнению с определением  $k$ -го коэффициента ДПФ  $S_N(k)$ , «в лоб», согласно соотношению (1).

Разностные уравнения фильтра Герцеля (рис. 1, а, б) задаются следующими соотношениями [4, 5]:

обратная цепь фильтра (рис. 1, а, б)

$$v(n) = 2 \cos(2\pi k / N) v(n-1) - v(n-2) + x(n), \quad (2)$$

прямая цепь фильтра (рис. 1, а)

$$y(n) = v(n) - W_N^k v(n-1),$$

прямая цепь фильтра (рис. 1, б)

$$y(n) = W_N^{-k} v(n) - v(n-1). \quad (3)$$

Недостатком фильтра Герцеля является фиксированность набора анализируемых частот:  $\{2\pi(k)/(s \cdot N)\}$ , где  $k = 0, N/2-1, 0 \leq \theta < 1$ ,  $N$  – число отсчетов сигнала в блоке,  $s$  – число блоков.

Следующим алгоритмом обнаружения отдельного тона, который обеспечивает получение значений спектральных отсчетов в реальном масштабе времени, является алгоритм скользящего ДПФ [4].

Алгоритм однобинового скользящего ДПФ (СДПФ) позволяет рекуррентно вычислять значение  $k$ -го бина  $N$ -точечного ДПФ из скользящего окна в  $N$  отсчетов. Алгоритм СДПФ эффективнее алгоритма Герцеля с точки зрения числа вычислений.

Разностное уравнение СДПФ имеет вид [4]:

$$X^k(n) = W_N^{-k} [X^k(n-1) + x(n) - x(n-N)], \quad (4)$$

его реализация приводит к структуре КИХ-фильтра, приведенного на рис. 2.

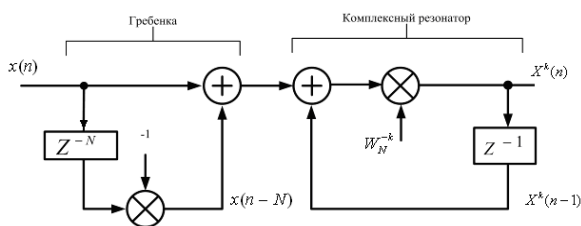


Рис. 2. Структура фильтра однобинового скользящего ДПФ на  $k$ -й частоте

Рассмотрим еще один алгоритм скользящего измерения, который является результатом обобщения однобинового СДПФ.

На основе введенного одним из авторов в [5–8] понятия параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ-П)

$$\begin{aligned} def_p(p, l, \theta) = W_N^{(p+\theta)l} = \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} (p+\theta)l\right], \quad 0 \leq \theta \leq 1; \\ p, l = \overline{0, N-1} \end{aligned} \quad (5)$$

в [9] предложено обобщение алгоритма однобинового СДПФ в виде скользящего однобинового параметрического ДПФ (СДПФ-П). Алгоритм СДПФ-П, во-первых, позволяет рекуррентно вычислять значение  $k$ -го бина  $N$ -точечного ДПФ-П из скользящего окна в  $N$  отсчетов; во-вторых, в отличие от стандартного СДПФ, позволяет проводить оценку спектра в окне в  $N$  отсчетов не на фиксированных частотах, а из набора частот, число которых варьируется  $\theta$  параметром:

$$\{2\pi(k+\theta)/N\}, \text{ где } k = \overline{0, N-1}, 0 \leq \theta \leq 1. \quad (6)$$

Из соотношения (6) непосредственно следует, что алгоритм СДПФ-П обеспечивает полный контроль над резонансной частотой фильтра ДПФ-П.

Определим разложение по базисной системе ДЭФ-П как прямое параметрическое дискретное преобразование Фурье (ДПФ-П):

$$S_N(k, \theta) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n}, \text{ где } 0 \leq \theta \leq 1. \quad (7)$$

Алгоритм СДПФ-П позволяет рекуррентно вычислять значения спектра  $S_N^{(r)}(k, \theta)$  на  $(k+\theta)$  частоте по отсчетам входного сигнала  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$ , из скользящего окна длиной в  $N$  отсчетов, при сдвиге сигнала в окне на каждом шаге на один отсчет влево:

$$S_N^{(n)}(k, \theta) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n+r) W_N^{(k+\theta)n}. \quad (8)$$

Разностное уравнение СДПФ-П определяется следующим выражением [6]:

$$\begin{aligned} S_N^{(n)}(k, \theta) = \\ = W_N^{-(k+\theta)} \left[ S_N^{(n-1)}(k, \theta) + x(n) - x(n-N) \exp(-j2\pi\theta) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

которое может быть реализовано в виде обобщенно КИХ-фильтра [6]:

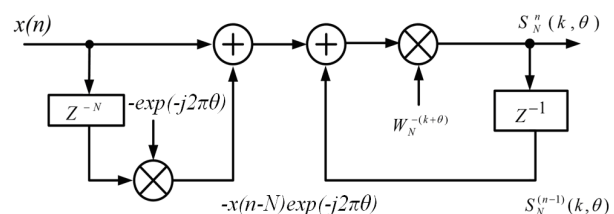


Рис. 3. Структура фильтра однобинового скользящего СДПФ-П на  $k$ -й частоте,  $0 \leq \theta \leq 1$

Результаты сравнения эффективности рассмотренных методов приведены в табл. 1 [9]. Несложно видеть, что алгоритмы СДФФ и СДФФ-П существенно проигрывают алгоритму Герцеля в числе операций, которые необходимо выполнить для выхода на установившийся режим.

Таблица 1. Сравнение эффективности методов выявления гармонических компонент

Метод	Число операций, необходимых для выхода на установившийся режим $S_N^{(N-1)}(k, \theta)$		Вычисление следующего значения $S_N^{(N)}(k, \theta)$	
	Действительные умножения	Действительные сложения	Действительные умножения	Действительные сложения
ДФФ	$4N$	$4N$	$4N$	$4N$
Алгоритм Герцеля	$N+2$	$2N+1$	$N+2$	$2N+1$
Скользашее ДДФФ-П $\theta = 0, 1/2$	$4N$	$4N$	$4$	$4$
Скользашее ДДФФ-П $\theta \neq 0, 1/2$	$4N$	$4N$	$6$	$5$

Рассмотрим обобщенный алгоритм Герцеля, который, в отличие от стандартного алгоритма Герцеля, позволяет осуществить полный контроль за резонансной частотой фильтра.

**Обобщенный алгоритм Герцеля**

Прежде чем перейти к изложению обобщенного алгоритма Герцеля, рассмотрим алгоритм работы комплексных резонаторов, приведенных на рис. 2 и 3. Обозначим их, соответственно, как комплексный резонатор № 1 и комплексный резонатор № 2. Указанные резонаторы отличаются друг от друга резонансными частотами, значения которых определяются соответственно значениями  $k$  и  $(k + \theta)$ . Рассмотрим вычисление выходных отсчетов комплексного резонатора № 2 (рис. 4) как более общего случая (в дальнейшем изложении резонатор № 2 может обозначаться, если это не вызывает путаницы, как просто резонатор).

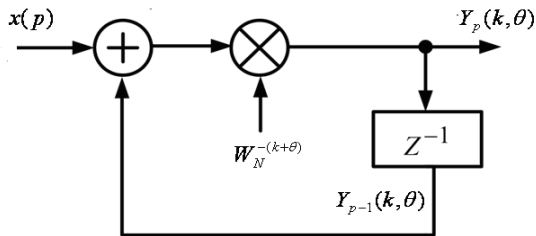


Рис. 4. Структура комплексного резонатора № 2

Согласно (7), значение  $k$ -го бина ДДФФ-П описывается следующим соотношением:

$$S_N(k, \theta) = x(0)W_N^{-(k+\theta)0} + x(1)W_N^{-(k+\theta)1} \dots + \dots + x(N-2)W_N^{-(k+\theta)(N-2)} + x(N-1)W_N^{-(k+\theta)(N-1)}. \quad (10)$$

Комплексный резонатор № 2 (рис. 4) является БИХ-фильтром, разностное уравнение которого имеет вид:

$$Y_p(k, \theta) = W_N^{-(k+\theta)} [x(p) + Y_{p-1}(k, \theta)], \quad (11)$$

где  $p$  – номер шага;  $p = 0, 1, \dots$

На шаге  $p = (N-1)$  значение выходного отсчета комплексного резонатора задается следующим соотношением:

$$Y_{N-1}(k, \theta) = x(0)W_N^{-(k+\theta)N} + x(1)W_N^{-(k+\theta)(N-1)} \dots + \dots + x(N-2)W_N^{-(k+\theta)(2)} + x(N-1)W_N^{-(k+\theta)(1)}. \quad (12)$$

Вынося в выражении (12)  $W_N^{-(k+\theta)N}$  за скобки, а также учитывая, что  $W_N^{-k \cdot N} = 1$  и  $W_N^{-\theta \cdot N} = \exp(j2\pi\theta)$ , получим:

$$Y_{N-1}(k, \theta) = \exp(j2\pi\theta) [x(0) + x(1)W_N^{-(k+\theta)1} \dots \dots + x(N-2)W_N^{-(k+\theta)(N-2)} + x(N-1)W_N^{-(k+\theta)(N-1)}]. \quad (13)$$

Сравнивая полученное выражение с соотношением (10), устанавливаем, что на шаге  $p = (N-1)$  значение выходного отсчета рассматриваемого резонатора равно:

$$Y_{N-1}(k, \theta) = \exp(j2\pi\theta) S_N(k, \theta). \quad (14)$$

Таким образом, если для комплексного резонатора № 1 (значение параметра  $\theta = 0$ ) выходной отсчет на  $(N-1)$  шаге в точности равен  $k$ -му коэффициенту ДДФФ (1), то для комплексного резонатора № 2 выходной отсчет на  $(N-1)$  шаге отличается от  $k$ -го коэффициента ДДФФ-П (7) приращением фазы на  $\phi = \exp(j2\pi\theta)$ .

Найдем выходной отсчет на  $(N-1+m)$ -м шаге ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) комплексного резонатора № 2:

$$Y_{N-1+m}(k, \theta) = x(0)W_N^{-(k+\theta)(N+m)} + x(1)W_N^{-(k+\theta)(N+m-1)} \dots + \dots + x(N-3+m)W_N^{-(k+\theta)(3)} + x(N-2+m)W_N^{-(k+\theta)(2)} + \dots + x(N-1+m)W_N^{-(k+\theta)(1)}. \quad (15)$$

Вынося в выражении (15)  $W_N^{-(k+\theta)(N+m)}$  за скобки и учитывая замечания, сделанные при выводе формулы (12), получим:

$$Y_{N-1+m}(k, \theta) = \exp(j2\pi\theta) W_N^{-(k+\theta)(N+m)} \times [x(0) + x(1)W_N^{-(k+\theta)1} \dots + x(N-3+m)W_N^{-(k+\theta)(N-3+m)} + \dots + x(N-2+m)W_N^{-(k+\theta)(N-2+m)} + x(N-1+m)W_N^{-(k+\theta)(N-1+m)}]. \quad (16)$$

Согласно (7), значение  $k$ -го бина ДПФ-П при  $n = 0, N - 1 + m$  задается следующим соотношением:

$$S_{N+m}(k, \theta) = x(0)W_{N+m}^{(k+\theta)0} + x(1)W_{N+m}^{(k+\theta)1} \dots + x(N-3+m)W_{N+m}^{(k+\theta)(N-3+m)} + x(N-2+m)W_{N+m}^{(k+\theta)(N-2+m)} + x(N-1+m)W_{N+m}^{(k+\theta)(N-1+m)}. \quad (17)$$

Сравнивая соотношения (16) и (17), получим обобщение выражения (14):

$$Y_{N-1+m}(k, \theta) = \exp(j2\pi\theta) W_{N+m}^{-(k+\theta)(N+m)} S_{N+m}(k, \theta). \quad (18)$$

Полученные результаты позволяют сделать ряд важных выводов.

1. Выходной отсчет резонатора № 1 ( $\theta = 0$ ) на шагах кратных  $(N - 1)$ , (т. е. на шагах, удовлетворяющих соотношению:  $p = s(N - 1)$ , где  $s = 1, 2, \dots$ ), будет в точности равен  $k$ -му коэффициенту ДПФ, вычисленному по соответствующей формуле:

$$S_{s \cdot N}(k) = \sum_{p=0}^{(s \cdot N - 1)} x(p)W_{s \cdot N}^{kp}, \quad W_{N \cdot s}^{k \cdot p} = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N \cdot s} kp\right), s = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Следовательно, возможна блочная обработка отсчетов сигналов. Поясним этот момент.

Так как дискретные экспоненциальные функции (ДЭФ) (1)

$$def(k, n) = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right)$$

обладают свойством периодичности:

$$def(k, n \pm rN) = def(k, n), \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

то сумму (19) можно представить в виде  $s$  сумм:

$$S_{s \cdot N}(k) = \sum_{p=0}^{(N-1)} x(p)W_N^{kp} + \sum_{p=N}^{(2 \cdot N - 1)} x(p)W_N^{kp} + \dots + \sum_{p=(s-1) \cdot N}^{(s \cdot N - 1)} x(p)W_N^{kp}.$$

Следовательно, разбив исходный сигнал на  $s$  блоков по  $N$  отсчетов в каждом:

$$\text{Блок 1} \Rightarrow [x(0), \dots, x(N-1)],$$

$$\text{Блок 2} \Rightarrow [x(N), \dots, x(2N-1)] \dots$$

$$\dots \text{Блок } s \Rightarrow [x((s-1)N), \dots, x(s \cdot N - 1)],$$

вычислив ДПФ каждого блока согласно (1) и просуммировав полученные значения, мы получим результат, в точности совпадающий с (19), в чем несложно убедиться.

2. Выходной отсчет резонатора № 2 ( $\theta \neq 0$ ) на шагах, кратных  $(N - 1)$ , не будет равен  $k$ -му коэффициенту ДПФ-П, задаваемому формулой (7):

$$S_{s \cdot N}(k, \theta) = \sum_{p=0}^{(s \cdot N - 1)} x(p)W_{s \cdot N}^{(k+\theta)p},$$

где  $0 \leq \theta \leq 1$ ,

$$W_{s \cdot N}^{(k+\theta)p} = \exp\left(-j \frac{2\pi}{s \cdot N} (k + \theta)p\right), \quad k = \overline{0, s \cdot N - 1}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

так как параметрические дискретные экспоненциальные функции (ДЭФ-П) (5)

$$def_p(k, n, \theta) = \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} (k + \theta)n\right]$$

не обладают свойством периодичности по переменной  $n$ :

$$def(k, n \pm rN, \theta) \neq def(k, n, \theta), \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Покажем, что и в этом случае, при определенном обобщении (модификации) метода стандартной блочной обработки, возможно применение процедуры блочной обработки. Обобщение блочной обработки входного сигнала основывается на том, что ДЭФ-П, не обладая свойством периодичности по переменной  $n$ , обладают более общим свойством, которое один из авторов назвал [7, 9, 10], свойством *параметрической периодичности* ДЭФ-П по переменной  $n$ :

$$def(k, n \pm rN, \theta) = def(k, n, \theta) W_N^{\pm \theta N r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

Используя параметрическую периодичность ДЭФ-П, сумму (20) можно также представить в виде  $s$  сумм:

$$S_{s \cdot N}(k, \theta) = \exp(-j2\pi\theta) \sum_{p=0}^{(N-1)} x(p)W_N^{(k+\theta)p} + [\exp(-j2\pi\theta)]^2 \sum_{p=N}^{(2 \cdot N - 1)} x(p)W_N^{(k+\theta)p} + \dots + [\exp(-j2\pi\theta)]^s \sum_{p=(s-1) \cdot N}^{(s \cdot N - 1)} x(p)W_N^{(k+\theta)p}. \quad (22)$$

Исходя из выражения (22), модифицированную обработку входного сигнала можно представить в виде выполнения следующих этапов.

**Этап 1.** Разбиение, как и при стандартной блочной процедуре, исходного сигнала на  $s$  блоков по  $N$  отсчетов:

$$\text{Блок 1} \Rightarrow [x(0), \dots, x(N-1)],$$

$$\text{Блок 2} \Rightarrow [x(N), \dots, x(2N-1)] \dots$$

$$\dots \text{Блок } s \Rightarrow [x((s-1)N), \dots, x(s \cdot N - 1)].$$

**Этап 2.** Вычисление  $k$ -го коэффициента ДПФ-П  $i$ -го блока  $k_i$  согласно (7).

**Этап 3.** Проведение фазового поворота  $k_i$ -го коэффициента ДПФ-П путем его умножения на  $\{\exp(-j2\pi\theta)\}^i$ .

**Этап 4.** Суммирование полученных результатов.

Несложно убедиться в том, что полученный результат в точности совпадает с  $k$ -м коэффициентом ДПФ-П, вычисленным согласно выражению (20).

3. При изложении алгоритма Герцеля в [4, с. 523] приведено без доказательства утверждение, которое воспроизведем дословно:

*«Следует заметить, что в то время как в литературе при описании алгоритма Герцеля утверждается, что переменная  $t$  (в нашем случае это  $k$ -авт), определяющая частоту резонанса (фильтра Герцеля -авт.) должна принимать только целые значения (что делает фильтр Герцеля эквивалентом бина  $N$ -точечного ДПФ), на самом деле  $t$  (в нашем случае это  $k$ -авт), может принимать любое значение в диапазоне от 0 до  $N-1$  (что делало бы фильтр Герцеля эквивалентом бина  $N$ -точечного ДПФ-П - авт), обеспечивая полный контроль над резонансной частотой фильтра».*

Из полученных выше результатов (20, 21, 22) непосредственно следует, что данное утверждение является ошибочным. Проиллюстрируем это примером.

Пусть задана последовательность  $x(n)$ ,  $n = 0, 15$ :

4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 3 3 1 -1  
-3 -2 1 2.

Положим, необходимо найти выходные значения  $y(7)$ ,  $y(15)$ ,  $y(23)$  алгоритма Герцеля (рис. 1, б) для данной последовательности при  $k = 1$  и  $k = 1\frac{1}{5}$ . Раз-

биваем исходный сигнал на 2 блока по 8 отсчетов:

Блок 1  $\Rightarrow$  4 3 2 1 -1 -2 -3 -4,

Блок 2  $\Rightarrow$  3 3 1 -1 -3 -2 1 2.

Вычисляем коэффициенты алгоритма Герцеля: при  $k = 1$ :

$$2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k / N) = 2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1 / 8) = 2 \cdot \cos(\pi / 4) = 1,4142,$$

$$W_N^{-k} = \exp\left(j \frac{2 \cdot \pi}{N} k\right) = \exp\left(j \frac{2 \cdot \pi}{8} 1\right) = \cos(\pi / 4) + j \sin(\pi / 4) = 0,7071 + 0,7071i,$$

при  $k = 1\frac{1}{5}$ :

$$2 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 1\frac{1}{5} / N\right) = 2 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 1\frac{1}{5} / 8\right) = 2 \cdot \cos(\pi / 5) = 1,1756,$$

$$W_N^{-k} = \exp\left(j \frac{2 \cdot \pi}{N} k\right) = \exp\left(j \frac{2 \cdot \pi}{8} 1\frac{1}{5}\right) = \cos(\pi / 5) + j \sin(\pi / 5) = 0,3090 - 0,9511i.$$

Результаты работы алгоритма Герцеля при стандартной блочной обработке входного сигнала приведены в табл. 2 алгоритма Герцеля.

Как и следовало ожидать, при стандартной блочной обработке входного сигнала ( $\theta = 0$ ,  $(k + \theta)$  – целое) коэффициент ДПФ и выходной отсчет алгоритма Герцеля равны друг другу. При  $\theta \neq 0$ ,  $(k + \theta)$  – нецелое коэффициент ДПФ-П не равен выходному отсчету алгоритма Герцеля.

Результаты работы алгоритма Герцеля при обобщенной блочной обработке входного сигнала ( $\theta = 1/5$  т.е.  $\theta \neq 0$ ,  $(k + \theta)$  – нецелое) приведены в табл. 3.

Таблица 2. Выходные отсчеты алгоритма Герцеля при стандартной блочной обработке

$k$	$s$	$s = 1$	$s = 2$	$\frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 y(s \cdot 8 - 1)$	$S_{2,N}(1, 2k)$
1	$y(s \cdot 8 - 1)$	0,6250 – 1,5089i	1,4571 – 0,1768i	1,0411 – 0,8428i	1,0411 – 0,8428i
	$S_{s,N}(1, 0)$	0,6250 – 1,5089i	1,4571 – 0,1768i		
$1\frac{1}{5}$	$y(s \cdot 8 - 1)$	0,8743 – 0,4455i	1,2231 + 0,9884i	1,0487 + 0,2714i	–0,2810 – 1,2438i
	$S_{s,N}\left(1, \frac{1}{5}\right)$	–0,1535 – 0,9692i	1,3179 – 0,8578i		

Таблица 3. Выходные отсчеты алгоритма Герцеля при обобщенной блочной обработке

$k$	$s$	$s = 1$	$s = 2$	$\frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 c^s \cdot y(s \cdot 8 - 1)$	$S_{s,N}(1, 2k)$
$1\frac{1}{5}$	$y(s \cdot 8 - 1)$	0,8743 – 0,4455i	1,2231 + 0,9884i	–0,2810 – 1,2438i	–0,2810 – 1,2438i
	$c = \exp(-2\pi / 5)$	0,3090 – 0,9511i	0,3090 – 0,9511i		
	$c \cdot y(s \cdot 8 - 1)$	–0,1535 – 0,9692i	1,3179 – 0,8578i		
	$S_{s,N}\left(1, \frac{1}{5}\right)$	–0,1535 – 0,9692i	1,3179 – 0,8578i		

Как мы видим, при обобщенной блочной обработке входного сигнала коэффициент ДПФ-П в точности равен выходному отсчету алгоритма Герцеля, что и требовалось показать.

Обобщенный алгоритм Герцеля можно реализовать в виде БИХ-фильтра, приведенного на рис. 5.

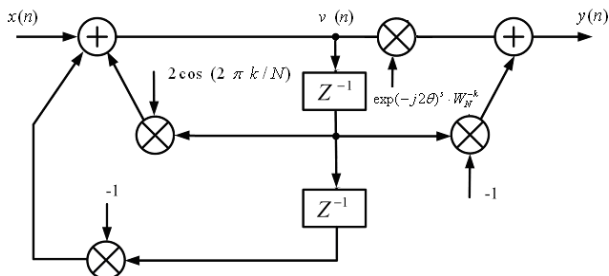


Рис. 5. Структура БИХ-фильтра, реализующего обобщенный алгоритм Герцеля

### Заключение

Передаточная функция обобщенного алгоритма Герцеля имеет ноль в точке  $z = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(k+\theta)\right]$  и два комплексно-сопряженных

полюса в точках  $z = \exp\left[\pm j\frac{2\pi}{N}(k+\theta)\right]$  на  $z$ -плоскости (ноль и полюс в точке  $z = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(k+\theta)\right]$  компенсируют друг друга).

Устойчивость обобщенного фильтра Герцеля (как и стандартного фильтра Герцеля) обеспечивается за счет блочной обработки входного сигнала. Предложен обобщенный алгоритм Герцеля, который, в отличие от стандартного алгоритма Герцеля, позволяет осуществить полный контроль за резонансной частотой фильтра и эффективно решать задачу выявления скрытых периодичностей.

\*\*\*

*O. V. Ponomareva*, PhD in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

*A. V. Ponomarev*, PhD in Economics, Chief of Staff, Central Election Commission of Udmurt Republic

*V. A. Ponomarev*, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

### Generalization of Goertzel algorithm for detection of hidden periodicities

*The paper considers the basic methods for detection of tonal components and algorithms of their implementation. Their advantages and disadvantages are analyzed. Generalization of Goertzel algorithm is proposed. The proposed algorithm, unlike the standard Goertzel algorithm, allows evaluating the spectrum not at fixed frequencies but within a set of frequencies, the number of which varies with the parameter  $\theta$ :  $\{2\pi(k+\theta)/(s \cdot N)\}$ , where  $k = \overline{0, N/2-1}$ ,  $0 \leq \theta < 1$ ,  $N$  is the number of signal samples in the block,  $S$  is the number of blocks. Unlike the standard Goertzel algorithm, the generalized algorithm allows performing a complete control of the resonant frequency of the filter.*

**Keywords:** parametric discrete Fourier transform, moving parametric discrete Fourier transform, discovery, harmonic component, frequency of Herzl, hidden periodicity

Получено: 25.04.13

### Библиографические ссылки

1. *Серебренников М. Г., Первозванский А. А.* Выявление скрытых периодичностей. – М.: Наука, 1965. – 244 с.
2. *Оппенгейм Э.* Применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1980. – 552 с.
3. *Неразрушающий контроль: справ. в 8 т. / под общ. ред. В. В. Клюева.* – М.: Машиностроение, 2007. – Т. 7: в 2 кн. – 829 с.
4. *Лайонс Р.* Цифровая обработка сигналов. – 2-е изд.; пер. с англ. – М.: Бинум-Пресс, 2007. – 656 с.
5. *Пономарева О. В.* Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе параметрических дискретных экспоненциальных функций // *Цифровая обработка сигналов.* – 2010. – № 2. – С. 7–12.
6. *Пономарева О. В.* Вероятностные свойства спектральных оценок, полученных методом параметрического дискретного преобразования Фурье // *Интеллектуал. системы в пр-ве.* – 2010. – № 2. – С. 36–41.
7. *Пономарев В. А., Пономарева О. В.* Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // *Цифровая обработка сигналов.* – 2011. – № 1. – С. 2–6.
8. *Пономарева О. В.* Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей // *Цифровая обработка сигналов.* – 2012. – № 2. – С. 2–5.
9. *Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В.* Скользящее параметрическое ДПФ в задачах обнаружения тональных компонент // *Цифровая обработка сигналов.* – 2012. – № 4. – С. 2–7.
10. *Пономарев В. А., Пономарева О. В.* Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач интерполяции и свертки функций // *Радиотехника и электроника. АН СССР.* – 1984. – Т. 29. – № 8. – С. 1561–1570.
11. *Пономарев В. А., Пономарева О. В.* Временные окна при оценке энергетических спектров методом параметрического дискретного преобразования Фурье // *Автометрия. СО АН СССР.* – 1983. – № 4. – С. 39–45.