УДК 539.3+534.1

В. П. Тарануха, кандидат технических наук, доцент;
В. Е. Лялин, доктор технических наук, профессор
Ижевский государственный технический университет
имени М. Т. Калашникова

РАСПОЗНАВАНИЕ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТОТНОГО СПЕКТРА ВОЗБУЖДЕНИЯ В УСТРОЙСТВАХ ХРАНЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ

Рассмотрены критерии и алгоритмы синтеза по частотным спектрам для консервативных и диссипативных систем, обеспечивающие синтез систем с большим числом степеней свободы, а также критерии, позволяющие учитывать случайный разброс параметров при условии их нормального распределения и известной корреляции.

Ключевые слова: частотный спектр, собственные частоты, стримеры

Решение задачи оптимального синтеза по частотным спектрам динамических систем (ДС), например таких, как механизмов транспортирования ленты (МТЛ) – стримеров, с учетом распределенности параметров носителя, отличается значительным возрастанием числа вершин топологической модели. Это приводит к росту степеней характеристического полинома (ХП), а также степеней многочленов, вхожих в передаточную функцию системы (ПФС).

При таких условиях особое внимание требуется уделить быстродействию алгоритмов, что приведет к снижению затрат времени.

Предлагается алгоритм синтеза консервативных моделей динамических систем. Алгоритм основан на использовании теоремы Декарта [1]. Применение теоремы Декарта для консервативных моделей допустимо, поскольку в этом случае корни частотного уравнения являются действительными числами.

Для определения числа корней частотного уравнения

$$D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n, \qquad (1)$$

где $\lambda = \omega^2$, лежащих в резонансно-опасных интервалах

$$\left(\alpha_j^2, \beta_j^2\right), \quad j = 1, 2, \ldots, M$$

спектра возбуждения, применим преобразование сдвига $z = \lambda - \alpha_j^2$ или $\lambda = z + \alpha_j^2$:

$$D_1(z) = D\left(z + \alpha_j^2\right) = a_0\left(z + \alpha_j^2\right)^n + a_1\left(z + \alpha_j^2\right)^{n-1} + \ldots +$$
$$+ a_{n-1}\left(z + \alpha_j^2\right) + a_n = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1}z + b_n. \qquad (2)$$

Очевидно, что корням $\lambda > \alpha_j^2$ соответствуют корни полинома $D_1(Z)$ $z > 0$. Таким образом, определив по теореме Декарта число смен знаков коэффициентов многочлена $D_1(Z)$, получим число k_{α_j} его положительных корней, т. е. число корней полинома $D(\lambda)$, для которых $\lambda > \alpha_j^2$.

Аналогично с помощью преобразования сдвига $\lambda = z + \beta_j^2$ получим многочлен

$$D_2(z) = D\left(z + \beta_j^2\right) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_{n-1}z + c_n \qquad (3)$$

и определим число k_{β_j} положительных корней полинома $D_2(z)$ по числу перемен знаков в последовательности коэффициентов c_i, $i=0,1,2,\ldots,n$.

Искомое число корней m_j в интервале $\left(\alpha_j^2, \beta_j^2\right)$ находим по разности

$$m_j = k_{\alpha_j} - k_{\beta_j}. \qquad (4)$$

Преобразование сдвига и вычисление коэффициентов многочленов $D_1(Z)$ и $D_2(z)$ эффективно осуществляется при помощи обобщенной схемы Горнера. Реализация вычислений коэффициентов сводится к организации рекуррентных соотношений

$$A_{0,j} = a_j,\ j = 0,1,2,\ldots,n;\ A_{i,0} = a_0,\ i = 1,2,3,\ldots,n;$$
$$A_{i,j} = A_{i,j-1}\alpha_j^2 + A_{i-1,j},\ i = 1,2,\ldots,n-1,\ j = 0,1,2,\ldots,n-i;$$
$$b_i = A_{n-i,i},\ i = 0,1,\ldots,n. \qquad (5)$$

Очевидно, что все необходимые преобразования легко реализуются на ЭВМ. При вычислениях коэффициентов по формулам (5) в случае $\alpha_j^2 > 1$ может возникнуть переполнение разрядной сетки, поэтому для $\alpha_j^2 > 1$ предлагается использовать другое линейное преобразование. Возьмем $z = \lambda / \alpha_j^2 - 1$ или $\lambda = (z+1)\alpha_j^2$.

Рассмотрим многочлен

$$\bar{D}_1(z) = \frac{1}{\alpha_j^{2n}} D(\lambda) = a_0(z+1)^n + \frac{a_1}{\alpha_j^2}(z+1)^{n-1} +$$
$$+ \frac{a_2}{\alpha_j^4}(z+1)^{n-2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{\alpha_j^{2(n-1)}}(z+1) + \frac{a_n}{\alpha_j^{2n}} =$$
$$= \bar{b}_0 z^n + \bar{b}_1 z^{n-1} + \ldots + \bar{b}_{n-1}z + \bar{b}_n. \qquad (6)$$

Очевидно, что корням этого полинома $z > 0$ соответствуют корни исходного полинома $\lambda > \alpha_j^2$.

Соответственно, применив к многочлену (6) теорему Декарта, можно определить число корней k_{α_j}. При этом коэффициенты b_i вычисляются по рекуррентным формулам

$$A_{0,j} = \frac{a_j}{\alpha^{2j}},\ j = 0,1,...,n;\ A_{i,0} = a_0,\ i = 1,2,...,n;$$

$$A_{i,j} = A_{i,j-1} + A_{i-1,j},\ i = 1,2,...,n-1,\ j = 0,1,2,...,n-i; \quad (7)$$

$$\overline{b_i} = A_{n-i,i},\ i = 0,1,...,n.$$

Опираясь на проведенные рассуждения, можно предложить следующий алгоритм вычисления числа m_j собственных значений λ, попадающих в интервалы резонансно-опасных зон (РОЗ) $\left(\alpha_j^2, \beta_j^2\right)$, $j = 1,2,...,M$, в предположении, что коэффициенты исходного полинома a_0, a_1,…,a_n вычислены в точке пространства параметров $U(U_1, U_2,…, U_R)$.

Алгоритм

Шаг 1. Установка начальных условий m=0, j=M.

Шаг 2. Значение нижней границы интервала α_j^2 сравнивается с 1: если $\alpha_j^2 \le 1$, переход к шагу 3, если $\alpha_j^2 > 1$, переход к шагу 4.

Шаг 3. Производится преобразование сдвига $\lambda = z + \alpha_j^2$ и вычисляются коэффициенты b_0, b_1,…,b_n полинома $D_1(Z)$ по рекуррентным формулам (5). Переход к шагу 5.

Шаг 4. Производится преобразование $\lambda = (z+1)\alpha_j^2$ и вычисляются коэффициенты $\overline{b}_0$, $\overline{b}_0$,…,$\overline{b}_n$ полинома $\overline{D}_1(z)$ по формулам (7).

Шаг 5. Определяется число k_{α_j} смен знаков в коэффициентах полинома $D_1(Z)$ или $\overline{D}_1(z)$.

Шаг 6. Значение верхней границы интервала β_j^2 сравнивается с 1: если $\beta_j^2 < 1$, то переход к шагу 7, если $\beta_j^2 \ge 1$ переход к шагу 8.

Шаг 7. Производится преобразование $\lambda = z + \beta_j^2$ и вычисляются коэффициенты полинома $D_2(z)$ по формулам (5), переход к шагу 9.

Шаг 8. Производится преобразование $\lambda = (z+1)\beta_j^2$ и вычисляются коэффициенты полинома $\overline{D}_2(z)$ по формулам (7).

Шаг 9. Определяется число k_{β_j} смен знаков в последовательности коэффициентов полиномов $D_2(z)$ или $\overline{D}_2(z)$.

Шаг 10. Вычисляется число m_j собственных значений λ_j в интервале $\left(\alpha_j^2, \beta_j^2\right)$ по формуле (4).

Шаг 11. Полученная величина суммируется с предыдущим значением m.

Шаг 12. Уменьшается на 1 номер j интервала.

Шаг 14. Сравнивается индекс j с нулем: если $j > 0$, то переход к шагу 2, иначе вычисления заканчиваются.

Оценим эффективность предложенного алгоритма. В качестве оценки быстродействия используем количество операций умножения (деления) как наиболее трудоемкой вычислительной операции. Для данного алгоритма количество операций умножения, необходимых для вычисления числа корней m, оценивается величиной $2M{\cdot}n$, где M – число интервалов РОЗ, а n – степени частного уравнения.

В табл. 1 приведены сравнительные оценки эффективности алгоритмов вычисления числа корней частного уравнения для консервативных систем.

Анализ показывает, что предложенный алгоритм является наиболее эффективным по быстродействию и рекомендуется для использования при синтезе по частотному спектру систем с большим числом N.

Эффективным по быстродействию является также алгоритм с использованием логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ) [2].

Указанные алгоритмы предназначены для решения задач синтеза в детерминированной постановке. Однако в реальных условиях любые механические системы подвергаются множеству случайных воздействий. Потому задачу синтеза следует решать с учетом статистического разброса параметров.

Предположим, что закон распределения векторов параметров нормальный, т. е. известен вектор номинальных значений параметров

$$U_0 = \{U_{10}, U_{20}, ...U_{R0}\},$$

вектор дисперсий $\sigma^2 = \left\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_R^2\right\}$.

В общем случае параметры могут быть зависимыми, тогда считаем, что задана и матрица ковариаций параметров

$$\operatorname{cov}(U) = \left\|\operatorname{cov}\left(u_q, u_k\right)\right\|. \quad (8)$$

Предлагается критерий синтеза по частотным спектрам динамической системы со случайно-распределенными параметрами на основе ЛАЧХ.

Пусть

$$L(\omega) = -20\lg\left|D(\omega)\right|. \quad (9)$$

Определим чувствительность ЛАЧХ к малому изменению параметров.

При фиксированной частоте ω логарифмическую амплитудно-частотную характеристику $L(U,\omega)$ можно рассматривать как функцию лишь вектора параметров U.

Обозначим через L^0 значение ЛАЧХ, которое она принимает в том случае, когда вектор U оказывается равным своему номинальному значению $U = u_0$.

Представим значение $L(u)$ при помощи разложения в ряд Тейлора в окрестности точки u_0:

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial u_1}\Delta u_1 + \frac{\partial L}{\partial u_2}\Delta u_2 + ... + \frac{\partial L}{\partial u_R}\Delta u_R. \quad (10)$$

Введя чувствительности

$$\xi_r = \left(\frac{\partial L}{\partial u_r}\right)\Bigg|_{u_r = u_{r0}}, \quad (11)$$

можно записать уравнение (10) в виде

$$\left(L - L^0\right) = \{\xi_r\}^T \{u_r - u_{r0}\} = \{u_r - u_{r0}\}^T \{\xi_r\}, \quad (12)$$

где $\{\xi_r\}^T$ – вектор-строка чувствительности ЛАЧХ к изменению параметров; $\{u_r - u_{r0}\}$ – вектор-столбец изменений параметров.

Составим произведение

$$\left(L - L^0\right)^2 = \{\xi_r\}^T \{u_r - u_{r0}\}\{u_r - u_{r0}\}^T \{\xi_r\}. \quad (13)$$

Применив к (13) операцию взятия математического ожидания, получим

$$\sigma_L^2 = \{\xi_r\}^T [\mathrm{cov}]\{\xi_r\}, \quad (14)$$

где σ_L^2 – дисперсия значений ЛАЧХ, cov – ковариационная матрица варьируемых параметров систем. Элемент матрицы

$$\mathrm{cov}_{rl} = \rho_{rl} \cdot \sigma_{u_r} \cdot \sigma_{u_l}, \quad (15)$$

где $\rho_{rl} = 1$, если $r = l$.

Таким образом, при учете случайного разброса параметров системы значения ЛАЧХ представляют собой случайную величину, которая, согласно (10), является композицией нормально распределенных случайных величин, т. е. сама имеет нормальное распределение с математическим ожиданием L^0 и дисперсией σ_L^2, определяемой формулой (14).

Критерием отстройки с использованием ЛАЧХ в детерминированном случае [2] является условие

$$\left|L'_z\left(\beta_j\right) - L'_z\left(\alpha_j\right)\right| < \varepsilon, \; j = 1, 2, ..., M, \quad (16)$$

где $L = \lg\omega$, ε – достаточно малое положительное число.

Для обеспечения отстройки спектра собственных частот и спектра вынужденных частот требуется, чтобы ни одно собственное значение не вошло в резонансно-опасные зоны $[\alpha_j^2, \beta_j^2]$ при случайных изменениях параметров системы.

Поскольку собственные числа λ_i являются непрерывными функциями параметров, то заход значения λ_i в интервал $[\alpha_j^2, \beta_j^2]$ возможен только в том случае, если оно расположено достаточно близко к одной из границ РОЗ.

При этом случайные изменения параметров вызывают резкое изменение значении ЛАЧХ вблизи соответствующей границы, что свидетельствует о большой величине чувствительности ЛАЧХ к изменению параметров в точках $\omega = \alpha_j$ ($\omega = \beta_j$), а следовательно, и дисперсии $\sigma_L^2\left(\alpha_j\right)$ $\left(\sigma_L^2\left(\beta_j\right)\right)$ при близости λ к границе $\alpha_j^2\left(\beta_j^2\right)$ и, наоборот, о малой величине $\sigma_L^2\left(\alpha_j\right)$ ($\sigma_L^2\left(\beta_j\right)$) в противном случае.

Исходя из этих рассуждений, в качестве критерия синтеза по частотному спектру с учетом случайного разброса параметров можно принять следующие:

$$\left|L'_z\left(\beta_j\right) - L'_z\left(\alpha_j\right)\right| < \varepsilon,$$

$$\sigma_L^2\left(\alpha_j\right) < \sigma^2,$$

$$\sigma_L^2\left(\beta_j\right) < \sigma^2, \; j = 1, 2, ..., M, \quad (17)$$

где σ^2 – некоторое малое положительное число.

Можно решить поставленную задачу другим способом, исследуя влияние случайного разброса параметров на поведение собственных значений ХП. Выразим дисперсию собственного значения $\lambda_i = \omega_i^2$.

Аналогично (14) можно показать, что дисперсия

$$\sigma_{\lambda_i}^2 = \left\{\frac{\partial \lambda_i}{\partial u_r}\right\}^T [\mathrm{cov}]\left\{\frac{\partial \lambda_i}{\partial u_r}\right\}, \quad (18)$$

где чувствительности собственных значений $\partial\lambda_i / \partial u_r$ выражаются формулой

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial u_r} = -\frac{\frac{\partial a_0}{\partial u_r}\lambda^n + \frac{\partial a_1}{\partial u_r}\lambda^{(n-1)} + ... \frac{\partial a_n}{\partial u_r}}{n a_0(u)\lambda^{(n-1)} + (n-1)a_1(u)\lambda^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(u)}. \quad (19)$$

В случае близости собственного значения λ_i к границе интервала возбуждения α_i при малых случайных отклонениях параметров примем дисперсию собственного значения $\sigma_{\lambda_i}^2 \approx \sigma^2\left(\alpha_j^2\right)$. Раздвинем границы интервалов РОЗ и рассмотрим интервал $\left[\alpha_j^2 - 3\sigma^2\left(\alpha_j^2\right), \beta_j^2 + 3\sigma^2\left(\beta_j^2\right)\right]$. Решив задачу синтеза с использованием критерия (16) или любого другого алгоритма синтеза [3, 4] (см. табл. 1), можно с вероятностью $p \approx 0{,}998$ утверждать, что собственные значения λ_i при случайном разбросе параметров не попадут в интервалы $[\alpha_j^2, \beta_j^2]$. Для совокупности интервалов вероятность попадания собственных значений в интервалы $[\alpha_j^2, \beta_j^2]$, j=1,2,…,M при условии выполнения предположенного критерия оценивается величиной $p \approx 0{,}998^M$.

Таблица 1. **Оценки быстродействия алгоритмов синтеза по частотному спектру**

	Алгоритм	Число операций умножения
Консервативные системы	1. Вычисление собственных значений методом Гивенса – Хаусхолдера	$2n^2(n+h)$
	2. Определение числа квадратов собственных частот в РОЗ с помощью критерия Рауса	$M \cdot n^2$
	3. Вычисление критерия отстройки спектра собственных частот с использованием ЛАЧХ	$2M(2n-1)$
	4. Определение числа корней частотного уравнения по таблице Бюдана – Фурье	$M \cdot n(n-1)$
	5. Вычисление корней на основе теоремы Декарта	$2M \cdot n$
Диссипативные системы	1. Вычисление $\varphi(u)$ путем применения критерия Рауса к квадрированному полиному	$4M \cdot n^2$
	2. Вычисление $\varphi(u)$ на основе теоремы о вычетах	$2M \cdot m \cdot n$
	3. Вычисление $\varphi(u)$ на основе использования годографа	$M \cdot H \cdot N$

До этого рассматривались критерии и алгоритмы синтеза консервативных систем, при моделировании которых можно пренебречь диссипативными свойствами в системе, однако во многих случаях необходимо учитывать диссипативные свойства модели. В табл. 1 приведены оценки эффективности различных алгоритмов синтеза по частотному спектру для диссипативных систем. Наиболее оптимальным с точки зрения быстродействия является алгоритм с использованием свойств годографа [5]. Для определения числа корней полинома $D(p)$ в данном случае используется принцип приращения аргумента [5]:

$$m_j = \frac{1}{2\pi}\Delta_{c_j} \arg D(p), \qquad (20)$$

где c_j – замкнутый контур, образованный на комплексной плоскости (λ, ω) прямыми $\omega = \alpha_j$, $\omega = \beta_j$ и дугами окружности радиуса $R = \theta$:

$$\theta = 1 + |A|/a_0\ ,\ |A| = \max_i a_i\ . \qquad (21)$$

Согласно выражению (20), при движении по этому контуру против часовой стрелки значения ХП $D(p) = V + jW$ на плоскости (V, W) описывают также замкнутый контур, причем при наличии m_j корней внутри контура точка, движущая по годографу обойдет центр координат m_j раз. Для определения количества полных обходов годографа вокруг центра координат автоматически строится и анализируется последовательность прохождения квадратов при движении точки $p = \lambda + j\omega$ вдоль контура. Признаком прохождения квадрантов выбрана смена знаков действительной V и мнимой W частей полинома $D(p)$.

Рассмотрим характер поведения годографа с учетом случайного разброса вектора параметров U.

Дисперсию случайного разброса значений ХП $D(p)$ можно выразить с помощью формулы

$$\sigma^2_{\text{ХП}} = \{\xi_r\}^T [\text{cov}] \{\xi^*_r\}\ , \qquad (22)$$

где $\{\xi_r\}^T$ – вектор-строка с комплексными элементами. В формуле (22), в отличие от (14), ξ_r – комплексные функции чувствительности, определяемые выражением

$$\xi_r = \frac{\partial D(p)}{\partial u_r} = \frac{\partial a_0}{\partial u_r} p^n + \frac{\partial a_1}{\partial u_r} p^{n-1} + \ldots + \frac{\partial a_n}{\partial u_r}, \qquad (23)$$

а ξ^* – комплексно-сопряженные величины.

При движении p по контуру c_j в каждой точке p дисперсия $\sigma^2_{\text{ХП}}(p)$ принимает различные значения. При близком расположении корней ХП p_i к границе рассматриваемого контура увеличивается разброс значений ХП, а следовательно, и вероятность попадания собственного значения внутрь контура. На плоскости V, W это соответствует увеличению вероятности попадания начала координата в область разброса ХП. Примем величину области разброса значений годографа $D(p)$ в точке p равной $3\sigma_{\text{ХП}}(p)$. Если указанная область захватывает центр координат, то вероятность захода собственного значения внутрь контура $p > 0{,}998$. Исходя из изложенных рассуждений, предложен следующий критерий синтеза по частотному спектру для диссипативных систем с учетом случайного распределения параметров:

$$\begin{cases} \forall_j \left(m_j = 0\right), \quad j = 1, 2, \ldots, M; \\ \sigma^2_{\text{ХП}}(p) < |D(p)|/3, \quad p \in c_j, \end{cases} \qquad (24)$$

где m_j – число обходов годографа вокруг центра координат для контура.

Для вычисления дисперсий случайного изменения величины ХП $\sigma^2_{\text{ХП}}(p)$ в каждой точке пространства параметров U необходимо определить значения чувствительностей коэффициентов $a_i(U)$, $i = 0,1,\ldots,n$ к изменениям параметров. Удобно получать формализованные выражения чувствительностей $\partial a_i / \partial u_r$ в виде многомерных полиномиальных функций варьируемых параметров. Поскольку коэффициенты a_i представлены в ЭВМ в формализованном виде как суммы слагаемых

$$a_i = \sum_{j=1}^{J} q_j \cdot u_1^{s_1} \cdot u_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot u_R^{s_R}\ , \qquad (25)$$

где q_j – числовой вес слагаемого, s_r – степень вхождения параметров u_r в слагаемое, то и чувствительности $\partial a_i / \partial u_r$ можно аналогичным образом выразить в виде суммы слагаемых

$$\frac{\partial a_i}{\partial u_r} = \sum_{j=1}^{J} w_l \cdot u_1^{\psi_1} \cdot u_2^{\psi_2} \cdot \ldots \cdot u_R^{\psi_R}, \qquad (26)$$

каждое слагаемое представляется в ЭВМ множеством

$$\left(w_j, u_1, u_2, \ldots, u_R, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_R\right).$$

В формуле (26) величины w_j и ψ_l определяются следующим образом:

$$w_j = \begin{cases} q_j s_r, & \text{если} \quad s_r > 0; \\ 0, & \text{если} \quad s_r > 0; \end{cases} \quad \psi_l = \begin{cases} s_l, & \text{если} \quad l \neq r; \\ s_{r-1}, & \text{если} \quad l = r. \end{cases} \qquad (27)$$

Имея формализованное представление чувствительностей коэффициентов a_i, легко вычислить их значения в конкретной точке пространства U.

Значения чувствительностей $\partial a_i / \partial u_r$, в свою очередь, являются коэффициентами полинома (23), вычисление которого эффективно организовать с помощью схемы Горнера.

Используя предложенные рассуждения, разработан алгоритм синтеза по частотному спектру диссипативных систем с учетом случайного разброса параметров. Для организации процедуры поиска оптимальных параметров используем метод случайного ЛП-поиска [6].

Алгоритм.

Шаг 1. Формирование очередного числа ЛП-τ последовательности q_{lr}, l=1,2,…,L, r = 1,2,…,R, в случае окончания последовательности переход к шагу 20 алгоритма.

Шаг 2. Вычисление координат вектора варьируемых параметров по формуле

$$u_r = u_r^* + q_{lk}\left(u_r^* - u_r^*\right), \quad k = 1, 2, \ldots, K, \qquad (28)$$

где u_r^* и u_r^{**} – нижняя и верхняя границы диапазона изменения параметра u_r.

Шаг 3. Вычисляются коэффициенты ХП a_i, i = = 0,1,...,n при заданном векторе параметров u = (u_1, u_2,…, u_R).

Шаг 4. Вычисляется матрица чувствительностей коэффициентов $[\partial a_i / \partial u_r]$ для заданного вектора параметров по формуле (26).

Шаг 5. Вводится значение интервалов $[\alpha_j^2, \beta_j^2]$.

Шаг 6. Определяется верхняя граница θ значений корней ХП по формуле (21).

Шаг 7. Задается значение шага h_0 и устанавливается $k = 1$, k – номер шага по контуру.

Шаг 8. Вычисляется значение ХП $D(p)$ в точке p_k контура.

Шаг 9. Вычисляется значение дисперсии $\sigma_{\text{ХП}}^2$ в точке p_k по формуле (22).

Шаг 10. Проверяется условие $\sigma_{\text{ХП}} > \left|D\left(p_k\right)\right|/3$, если да, то вектор параметров не удовлетворяет критерию оптимальности, переход к шагу 18.

Шаг 11. Определяется номер квадранта, в котором находится точка $D(p) = V + jW$.

Шаг 12. Если $k = 1$, то переход к шагу 14.

Шаг 13. Определяется изменение номера квадранта ΔN,

если $\Delta N = 0$, то $h = h_0$, переход к п. I5,

если $\Delta N = 1$, то $h = h_0$, переход к п. 14,

если $\Delta N > 1$, то $h = h/2$, переход к п. 15.

Шаг 14. Запоминается номер квадранта.

Шаг 15. Увеличивается на единицу номер точки контура $k = k + 1$.

Шаг 16. Проверяется конец обхода контура, если нет, то переход к шагу 8.

Шаг 17. Подсчитывается число m_j обходов годографом начала координат по последовательности номеров квадрантов.

Шаг 18. Проверяется условие $m_j = 0$, если $m_j \neq 0$, то вектор параметров не удовлетворяет критерию оптимальности, переход к п. 1.

Шаг 19. Печатаются значения параметров u_1, u_2,…, u_R, удовлетворяющие критерию оптимальности.

Шаг 20. Конец работы алгоритма.

С использованием алгоритмов топологического анализа и синтеза параметров МТЛ разработан пакет программ, реализующий методику автоматизированного синтеза МТЛ по частотным спектрам с учетом распределенности и случайного разброса параметров элементов МТЛ. Пакет программ включает в себя модули получения формализованного описания топологических моделей и формирования ХП и ПФС системы в численно-символическом виде. Для организации процедуры ЛП-τ поиска в пакет включены модули формирования ЛП-τ чисел и вычисления значений параметров для i-й точки ЛП-τ последовательности в пространстве заданной размерности.

В пакете реализованы также критерии и алгоритмы синтеза по частотным спектрам консервативных и диссипативных моделей механических систем с учетом и без учета статистического разброса параметров. В качестве признаков в них используются коэффициенты ХП и ПФС и границы резонансноопасных зон.

Пакет программ для проектирования МТЛ стримеров реализован на языке Pascal. Предложенные алгоритмы и пакеты программ могут служить основой создания САПР механизмов транспортирования ленты.

Разработанный пакет использован для проектирования параметров МТЛ стримера, кинематическая схема которого показана на рис. 1. Исходя из конструктивных ограничений в качестве варьируемых параметров были использованы: приведенные массы обводных роликов m_2,…, m_5, расстояния между роликами l_1, l_2, между роликами и приемными катушками l_3, l_4, между роликами в зоне магнитной головки l_5, приведенная масса механизма натяжения m_7. Параметры c'_{12}, c_{12}, h_{12}, c'_{23}, c_{23}, h_{23}, c'_{34}, c_{34}, h_{34}, c'_{45}, c_{45}, h_{45}, c'_{56}, c_{56}, h_{56} динамической модели (см. рис. 2) являются функциями указанных расстояний. Массы

m_1 и m_6 приемной и подающей катушек, а также границы зон возбуждения α_j и β_j рассматривались как функции времени t.

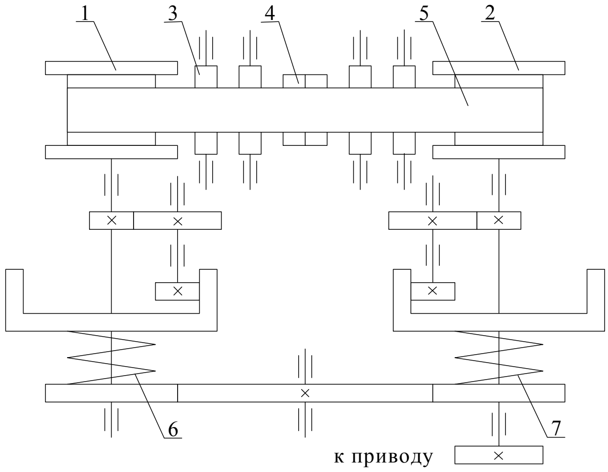

Рис. 1. Кинематическая схема МТЛ стримера:
1, *2* – приемная и подающая катушки; *3* – обводные ролики; *4* – головка записи-воспроизведения; *4* – лента; *6*, *7* – натяжные пружины

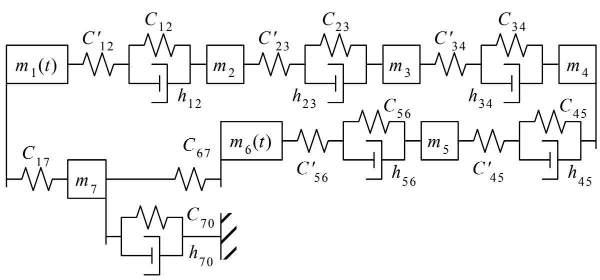

Рис. 2. Динамическая модель МТЛ стримера

В табл. 2 представлены границы варьируемых параметров и значения, полученные в результате синтеза МТЛ, модель которого представляет колебательную систему с сосредоточенными параметрами. В табл. 3 представлены те же параметры, но в модели МТЛ учтены распределенные свойства носителя. В таблицах приняты следующие обозначения: $M = m_2 = m_3 = m_4 = m_5$; $L_1 = l_1 = l_2$; $L_2 = l_3 = l_4$. При этом должны соблюдаться следующие условия:

$$\sum_{i=1}^{5} l_i = l_0 \,, \tag{29}$$

отсюда $l_5 = l_0 - 2L_1 - 2L_2$, где l_0 – длина тракта.

Таблица 2. **Результаты синтеза МТЛ, представленного моделью с сосредоточенными параметрами**

№ п/п	Единицы измерения	Наименование параметра	Множитель	Пределы измерения	Величина параметра
1	кг	M	10^{-3}	$10^{-3}\ldots 10^{-1}$	3,45
2	м	L_1	10^{-3}	10…50	32
3	м	L_2	10^{-3}	5…60	40
4	м	l_5	10^{-3}	30…150	36
5	кг	m_7	10^{-3}	0,2…50	0,76

Таблица 3. **Результаты синтеза МТЛ, представленного моделью с распределенными параметрами**

№ п/п	Единицы измерения	Наименование параметра	Множитель	Пределы измерения	Величина параметра
1	кг	M	10^{-3}	$10^{-3}\ldots 10^{-1}$	1,75
2	м	L_1	10^{-3}	10…50	15
3	м	L_2	10^{-3}	5…60	60
4	м	l_5	10^{-3}	30…150	30
5	кг	m_7	10^{-3}	0,2…50	0,76

При учете распределенности параметров вычисления масс и жесткостей КЭ производились по формулам [7]:

$$[M] = m_0 a \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix},$$

$$[C] = \frac{ES}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{30}$$

где E – модуль упругости материала ленты; S – площадь поперечного сечения ленты; m_0 – погонная масса ленты; a – длина КЭ.

Выводы

1. Разработаны критерии и алгоритмы синтеза по частотным спектрам для консервативных и диссипативных систем, обеспечивающие синтез систем с большим числом степеней свободы, а также критерии, позволяющие учитывать случайный разброс параметров при условии их нормального распределения и известной корреляции.
2. Разработанный пакет программ был использован для проектирования и выбора вариантов МТЛ стримеров.

Библиографические ссылки

1. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М. : Наука, 1977. – 432 с.
2. Динамика прецизионных лентопротяжных механизмов : науч. изд. / К. М. Рагульскис, П. А. Варанаускас, В. Е. Лялин и др. ; ред. К. М. Рагульскис. – Вильнюс : Мокслас, 1984. – 171 с.
3. *Nistyuk, A. I.* Tape drive parameter optimization of synthesis using frequency spectra // Vibration Engineering / Hemisphere Publishing Corp., New York, No. 2, 1988. – Pp. 121-131.
4. *Lialin, V. E., Kulev, M., Nistyuk, A. I.* The synthesis of tape transports according to the frequencies spectra, considering the distribution three-element model of tape // Vibration Engineering / Hemisphere Publishing Corp., New York, No. 4, 1990. – Pp. 61-67.
5. Теория автоматического управления / под ред. А. В. Нетушила. – М. : Высш. шк., 1976. – 400 с.
6. *Соболь И. М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. – М. : Наука, 1969. – 288 с.
7. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов / пер. с англ. А. А. Шестакова. – М. : Мир, 1979. – 392 с.

* * *

V. P. Taranukha, PhD in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
V. E. Lyalin, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Recognition of the mutual disposition of the spectrum of natural frequencies with respect to the excitation frequency spectrum of storage devices

The article deals with the criteria and algorithms for synthesis of the frequency spectrum for conservative and dissipative systems, providing a synthesis of systems with many degrees of freedom, as well as the criteria to take into account the random variation of parameters subject to their normal distribution and the known correlation.

Keywords: frequency range, natural frequencies, streamers

Получено: 11.04.13

УДК 622.24(045)

В. А. Тененев, доктор физико-математических наук, профессор;
Ю. Н. Шелковникова, инженер
Ижевский государственный технический университет
имени М. Т. Калашникова

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЙ РЕЖИМ ПРОМЫВКИ СТВОЛА СКВАЖИНЫ ПРИ БУРЕНИИ

Рассмотрено неизотермическое осесимметричное течение бурового раствора в круглой трубе и кольцевом пространстве при турбулентном режиме с использованием вариационного подхода решения задачи. Получена зависимость перепада давления от реологических свойств буровых растворов при распределении температуры по глубине нефтескважины при промывке.

Ключевые слова: скважина, буровой раствор, промывка, течение жидкости

Промывка скважины от разрушенной породы осуществляется подачей бурового раствора в кольцевой зазор через колонну бурильных труб. Если применяется турбинный способ бурения, то энергия движения бурового раствора используется для вращения долота турбобуром. Буровые растворы относятся к классу вязкопластических жидкостей. В таких жидкостях, наряду с вязкостью, проявляются пластические свойства, заключающиеся в наличии предельного напряжения сдвига, после достижения которого возникает текучесть среды [1]. Реологическое уравнение такой жидкости имеет вид:

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{dw}{dr} = \begin{cases} \dfrac{\tau-\tau_0}{\mu}, & \tau < \tau_0 < \tau_w; \\ 0, & \tau \le \tau_0, \end{cases} \qquad (1)$$

где τ – напряжение трения в любой точке; τ_0 – предельное напряжение; $\dot{\varepsilon}$ – скорость сдвига; μ – коэффициент динамической структурной вязкости; *w, r* – скорость и радиус сечения трубы.

Установившееся течение на продолжительных отрезках бурильных труб и кольцевого пространства с постоянной площадью проходного сечения удовлетворяет безынерционному приближению Стокса [2]:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{f}&=0; \\ \nabla\cdot\mathbf{V}&=0, \end{aligned} \qquad (2)$$

где σ – тензор напряжений.

Разобьем скважину на несколько отрезков с постоянными величинами площади проходного сечения. Длину каждого отрезка обозначим $\Delta x_i, i=\overline{1,m}$. Для решения задачи (2) используем вариационный подход [3]. Вместо уравнений (2) для расчета течения в трубе с произвольным сечением решается следующая оптимизационная задача:

$$\int_{s_i}\left[\frac{1}{2}\mu\left(\frac{du}{dr}\right)^2+\tau_0\left|\frac{du}{dr}\right|-\nabla p\cdot u\right]_i ds \to \min\,; \qquad (3)$$

$$\int_{s_i} u ds = G\,, \qquad (4)$$

где s_i – область интегрирования (проходное сечение); G – объемный расход жидкости; u – продольная скорость; p – давление.

Для сведения вариационной задачи (3, 4) к задаче нелинейного программирования в области s вводятся разностная сетка $\{r_j, j=\overline{0,n}\}$ и сеточная функция $\{u_j, j=\overline{0,n}\}$. Производная скорости аппроксимируется конечноразностной формулой $\dfrac{du}{dr}\approx\dfrac{u_j-u_{j-1}}{r_j-r_{j-1}}$, интегрирование (3), (4) проводится методом Симпсона. Далее решается задача оптимизации с неизвестными переменными u_j численным методом [4].

В уравнение (3) входят параметры бурового раствора: μ – коэффициент динамической вязкости и