

2. Yggbdh J. B., Fjaeydh G. : . Проекты Киотского протокола как область применения информационных технологий // Проведение научных исследований в области обработки, хранения, передачи и защиты информации : сб. науч. тр. всерос. конф. с элементами науч. шк. для молодежи (г. Ульяновск, 1–5 дек. 2009 г.) : в 4 т. / Ульян. гос. техн. ун-т [и др.]. – Ульяновск, 2009. – Т. 2. – С. 288–293.

3. Zkbe\kdZy B. <. Инновационный менеджмент : учеб. пособие. – 2-е изд. – М. : РИОП, 2005. – 96 с.

4. Вариант оценки эффективности технологий энергосбережения на основе методологии Киотского протокола / В. Г. Лугин, А. В. Зигмантович, Т. В. Клюквин и др. URL: <http://lugin.ru/scientific-article/increase-the-efficiency-of-production-energy-saving.html> (дата обращения: 28.04.2011).

5. Ee\gkdbс I. E., Ebrbp <. G., Kfheyd K. : . Оценка эффективности инвестиционных проектов. Теория и практика : учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Дело, 2002. – 888 с. URL: <http://narod.ru/disk/5264699000/econ122.zip.html> (дата обращения: 28.04.2011).

6. Методические рекомендации по оценке эффективности инвестиционных проектов (Вторая редакция, исправленная и дополненная) (утв. Минэкономки РФ, Минфином РФ и Госстроем РФ от 21 июня 1999 г. № ВК 477). URL: http://www.rosteplo.ru/Npb_files/npb_shablon.php?id=329 (дата обращения: 28.04.2011).

V. A. Alekseev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Izhevsk State Technical University

R. I. Yannikov, Postgraduate Student, Izhevsk State Technical University

N. S. Reshetnikova, Student, Izhevsk State Technical University

Estimation of Economic Efficiency of Joint Implementation Projects Taking into Account the Input Data Error

The specialized system of a cost-performance estimation of Kyoto projects is considered. Criteria of economic efficiency estimation are given. Formulas for the efficiency indicators error calculation are deducted. Variants of projects comparison in case of crossing of the received intervals of criteria possible values are considered.

Keywords: the Kyoto Protocol, joint implementation project, economic efficiency, criteria, error

Получено: 25.04.11

УДК 519.635

И. С. Л. <. Kqbg , аспирант;

И. С. Lggz\ , доктор физико-математических наук, профессор
Ижевский государственный технический университет

РАСЧЕТ ВНУТРЕННИХ ТЕЧЕНИЙ В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ЧИСЕЛ МАХА

JZkkfhj\gu qbkegg_u flhù jrgby mjgqbc Zhbgpodb \rbjhdhf bZhg_ qbke FZ-
oZ GZ hkgh\ jrgby dZbhghfjghc aZb ijhù kjgblevguc gZba mo jmii flhh\ :
ijhfhkehebgby qbkegghc kofu b flh^ dhjjdpbb ihey gby .Ihemqgu jamevlZ jKqLZ
hkkbfffjbqquo lqgbc \ hZlyo kehghc nhjfu k bkihevahZbf flhZ ijhfhkehebgby .

Ключевые слова: предобусловливание, метод конечных объемов, схема расщепления вектора потока, метод коррекции давления, газодинамика

Течение продуктов сгорания в проточном тракте ракетного двигателя на твердом топливе (РДТТ) происходит в широком диапазоне чисел Маха. Так, в канале заряда течение является несжимаемым, во входной части сопла появляется эффект сжимаемости, а за критическим сечением течение является сверхзвуковым.

Для сжимаемых течений обычно применяются маршевые по времени методы. Использование таких методов для расчета несжимаемых течений затрудняется жесткостью системы уравнений газодинамики при малых числах Маха. Адиабатическая скорость звука $c = \frac{\partial p}{\partial \rho} \rightarrow \infty$, требуемый шаг по времени $\Delta t \leq CFL \frac{\Delta x}{|u| + c} \rightarrow 0$,

что ведет к снижению скорости сходимости.

Для преодоления жесткости системы при низких числах Маха существует два принципиально разных подхода. Первый основан на введении в вычислительный алгоритм матрицы предобуславливания, устраняющей жесткость системы [1, 2], при этом ее собственные числа становятся величинами одного порядка для всего диапазона чисел Маха.

Второй подход основан на коррекции поля давления [3, 4]. На этапе предиктора акустические волны рассчитываются с погрешностью, на этапе корректора они поправляются. В данном подходе на этапе коррекции решается эллиптическое уравнение для поправок к давлению. Для применения данного класса методов в двух- и трехмерном случаях необходимо использовать эффективные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), такие как многосеточные методы [5, 6].

Рассмотрим применение данных двух подходов для расчета квазиодномерного течения в сопле Лавала. Система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S, \quad (1)$$

$$Q = (\rho, \rho u, \rho E)^T, \quad (2)$$

$$F = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u H)^T, \quad (3)$$

$$S = -(\rho u, \rho u^2, \rho u H)^T \frac{d \ln A}{dx}. \quad (4)$$

Сечение канала задается следующей функцией:

$$A = 1 + k(x - 1,5)^2, \quad (5)$$

где k – параметр, позволяющий изменять геометрию сопла.

Для решения уравнений (1) с применением алгоритма предобуславливания используется метод конечных объемов с расщеплением вектора потока [7].

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i-\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}} \right) + S_i \Delta t, \quad (6)$$

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(J_{i+\frac{1}{2}} (Q_R + Q_L) - \left| J_{i+\frac{1}{2}} \right| (Q_R - Q_L) \right), \quad (7)$$

где $J = \frac{\partial F}{\partial Q}$ – якобиан системы (1).

Предобусловливание вводится в схему следующим образом:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(J_{i+\frac{1}{2}} (Q_R + Q_L) - P \left| P^{-1} J_{i+\frac{1}{2}} \right| (Q_R - Q_L) \right). \quad (8)$$

Матрица предобусловливания для одномерной задачи имеет вид [2]

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} u^2 (M_r^{-2} - 1) & u(1 - M_r^{-2}) & M_r^{-2} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$M_r = \begin{cases} \varepsilon, M < \varepsilon \\ M, \varepsilon \leq M < 1, \\ 1, M \geq 1 \end{cases} \quad (10)$$

где M – число Маха; ε – параметр, отсекающий низкие числа Маха, в данной работе 0,5.

В методе коррекции давления [4] используются уравнения вида

$$\gamma M_c^2 \frac{\partial p}{\partial t} - \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = -\rho u \frac{d \ln A}{dx}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial um + p}{\partial x} = -\rho u^2 \frac{d \ln A}{dx}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial uT}{\partial x} + (\gamma - 2)T \frac{\partial u}{\partial x} = -\rho u H \frac{d \ln A}{dx}, \quad (13)$$

где M_K – характерное число Маха, в данной работе 1; $m = \rho u$.

Уравнение состояния принимает вид для безразмерных переменных (скорость отнесена к скорости звука торможения, давление, плотность и температура – к соответствующим параметрам в точке торможения):

$$\rho = \frac{1 + \gamma M_c^2 p}{T}. \quad (14)$$

Конечно-объемная схема на разнесенной сетке имеет вид

$$T_i^{n+1} - T_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u^n T^n) \Big|_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\gamma - 2) T_i^n u^n \Big|_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} = - \left(\rho u H \frac{d \ln A}{dx} \right)_i^n \Delta t, \quad (15)$$

$$m_{i+\frac{1}{2}}^* - m_{i+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u^n m^n + p^n) \Big|_i^{i+1} = - \left(\rho u^2 \frac{d \ln A}{dx} \right)_i^n \Delta t. \quad (16)$$

Определяется поправка к m :

$$\delta m_{i+\frac{1}{2}} = - \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta p \Big|_i^{i+1}, \quad \delta p = p^{n+1} - p^n. \quad (17)$$

Подстановка (17) в дискретный аналог (11) дает уравнение для поправки к давлению δp :

$$\begin{aligned} \gamma M_C^2 \delta p_i - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 T_i^n \left(\left(1 - s_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \delta p \Big|_i^{i+1} - \left(1 - s_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \delta p \Big|_{i-1}^i \right) = \\ = \rho_i^n (T_i^{n+1} - T_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} T_i^n \left(s^n \rho^n u^n + (1 - s^n) m^* \right) \Big|_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \left(\rho u \frac{d \ln A}{dx} \right)_i^n \Delta t, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{где } s = \begin{cases} 0, & |M| \leq 1/2 \\ |M| - 1/2, & 1/2 < |M| \leq 3/2 \\ 1, & |M| \geq 3/2 \end{cases} \text{ — функция переключения [4].}$$

Для сравнения обоих подходов проведены расчеты при различных значениях k от 2,2 до 200. Результаты расчетов представлены в таблице.

Результаты сравнительных расчетов

k	R_C/R_{In}	Число Маха на входе	Количество итераций до установления (число Куранта)	
			предобуславливание	коррекция давления
2,2	0,41	0,1	3 175 (0,95)	2 252 (0,95)
5	0,29	0,047	5 322 (0,95)	3 776 (0,95)
10	0,21	0,024	8 883 (0,95)	4 151 (0,95)
50	0,09	0,005	57 283 (0,95)	12 283 (0,95)
200	0,047	0,001	673 204 (0,95)	66 744 (0,6)

где R_C — радиус критики; R_{In} — радиус входа.

Проведенное сравнение показало пригодность обоих методов для решения задач в широком диапазоне чисел Маха. Так как метод предобуславливания основан на более широком классе методов для сжимаемых течений и не требует решения уравнений эллиптического типа, далее рассматривается первый метод для осесимметричных задач.

Уравнения невязкого течения в осесимметричной постановке следующие:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x} = S, \quad (19)$$

$$Q = (\rho, \quad \rho u, \quad \rho v, \quad \rho E)^T, \quad (20)$$

$$F = (\rho u, \quad \rho u^2 + p, \quad \rho uv, \quad \rho u H)^T, \quad (21)$$

$$G = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vH)^T, \quad (22)$$

$$S = -\frac{1}{y}(\rho v, \rho uv, \rho v^2, \rho vH)^T. \quad (23)$$

Решение производится на структурированной криволинейной сетке методом конечных объемов. Схема дискретизации по данному методу показана на рис. 1.

Рис. 1. Фрагмент конечно-объемной сетки

Расчетная схема имеет вид [7]

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \frac{\Delta t}{V} \sum_j F_{0j} S_{0j} + S_i \Delta t, \quad (24)$$

$$F_{0j} = \frac{1}{2} (J_{0j} (Q_j + Q_0) - |J_{0j}| (Q_j - Q_0)), \quad (25)$$

где $J_{0j} = \frac{\partial F}{\partial Q} n_{0j}^x + \frac{\partial G}{\partial Q} n_{0j}^y$ – якобиан системы (19); S_{0j} – площадь грани; V – объем ячейки сетки.

Предобусловливание вводится в схему аналогично одномерной задаче, матрица имеет вид [2]

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2)(M_r^{-2} - 1) & u(1 - M_r^{-2}) & v(1 - M_r^{-2}) & M_r^{-2} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Тестирование вычислительного алгоритма проводилось на основе экспериментальных данных, представленных в работе [8]. Отношение радиуса критики к радиусу входа было задано равным 0,1 для получения низких чисел Маха. На рис. 2 приведен фрагмент расчетной сетки в области сопла. На рис. 3 приведено сравнение изолиний числа Маха в сопле. Сплошными линиями с маркерами отмечены экспериментальные данные, на них наложены результаты расчета.

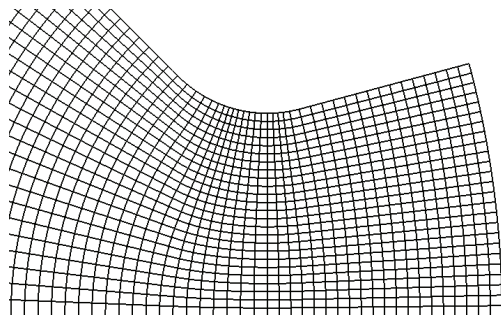


Рис. 2. Фрагмент сетки

Рис. 3. Результаты расчета
и эксперимента

Экспериментальный коэффициент расхода равен 0,985. Расчетный коэффициент расхода – [0,97; 0,995]. Минимальное число Маха – 0,005.

Представляет практический интерес моделирование газодинамики в камере сгорания с утолщенным соплом, имеющим более сложную геометрию. Сетка построена комплексным методом граничных элементов и представлена на рис. 4. Изолинии числа Маха показаны на рис. 5. Более детальная картина в области сопла – на рис. 6.

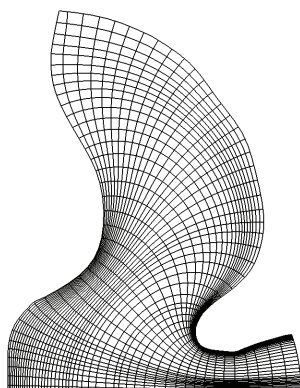


Рис. 4. Расчетная сетка

Рис. 5. Изолинии числа Маха

Из рис. 5 и 6 видно что минимальное число Маха, полученное в расчете, менее 0,006. Максимальное – более 2.

Результаты проведенных расчетов показывают, что применение метода с предобуславливанием дает возможность численного решения уравнений газодинамики в сложных областях с изменением скорости течения от глубоко дозвуковых ($M \sim 0,001$) до сверхзвуковых ($M \sim 2$).

Рис. 6. Изолинии числа Маха в области сопла

Список литературы

1. Weiss, J. M., Smith, W. A. Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows // AIAA J. – 1995. – Vol. 33, nr 11. – Pp. 2050-2062.
2. Choi, D., Merkle, C. L. Application of Time-Iterative Schemes to Incompressible Flow // AIAA J. – Vol. 23, nr 10. – Pp. 1518-1524.
3. A Barely Implicit Correction for Flux-Corrected Transport / G. Patnaik, R. H. Guirguis, J. P. Boris et al. // J. of Computational Physics. – July 1987. – Vol. 71, Iss. 1. – Pp. 1-20.
4. Wesseling, P. Principles of Computational Fluid Dynamics. – Berlin ; Heidelberg : Springer, 2000. – 652 p.
5. Никитин, J. I. Введение в вычислительную физику : [учеб. пособие] / под ред. и с доп. А. И. Лобанова. – 2-е, испр. и доп. изд. – Долгопрудный : Интеллект, 2008. – 504 с. – (Физтехковский учебник).
6. Trottenberg, U., Oosterlee, C. W., Schüller, A. Multigrid. – London : Academic Press, 2001. – 650 p. – ISBN 0-12-701070-X.
7. Toro, E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics : A Practical Introduction. – 3rd ed. – Berlin : Springer Verl., 2009. – 724 p. URL: <http://www.springerlink.com/content/978-3-540-25202-3#section=47459&page=1> (дата обращения: 04.05.2011).
8. Cuffel, R. F., Back, L. H., Massier, P. F. Transonic Flowfield in a Supersonic Nozzle with Small Throat Radius of Curvature // AIAA J. – July 1969. – Vol. 7, nr 7. – Pp. 1364-1366.

E. V. Vetchanin, Postgraduate, Izhevsk State Technical University

V. A. Tenenev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Izhevsk State Technical University

Simulation of internal flows over a wide range of Mach number

Numerical methods for gas dynamics equation solving over a wide range of Mach number are discussed. Comparative analysis of two groups of methods such as preconditioning and pressure-correction method for simulation of quasi-one-dimensional flow is made. Results of axially symmetric flows simulation in complex domains with use of preconditioning are obtained.

Keywords: preconditioning, finite volume method, flux-splitting scheme, pressure-correction method, gas dynamics

Получено: 25.04.11