

УДК 51-74+624.04+519.673

Е. Е. Вѣх, аспирант

Ижевский государственный технический университет

МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ УПРУГОХРУПКОГО МАТЕРИАЛА
ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

ИЗМЕНЕНИЕ ВРЕМЕНИ РАБОТЫ СТРОИТЕЛЬНЫХ СООРУЖЕНИЙ
 ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Ключевые слова: строительные сооружения, разрушение упругохрупких материалов

Для эффективного анализа безопасности строительного сооружения необходимо наличие математической модели здания, которая позволяла бы описывать напряженно-деформированное состояние элементов конструкций от различных внешних воздействий (силовых и кинематических), оценивать вероятность возникновения и процесс развития трещин, определять резерв несущей способности сооружения.

Построение модели неупругого деформирования с учетом структурного разрушения упругохрупкого материала выдвигает вопрос выбора критерия прочности. В общем случае можно предположить, что разрушение происходит, когда интенсивность напряжений (второй инвариант тензора напряжений) достигает критического значения. В этом случае материал теряет способность сопротивляться формоизменению и гидростатическому растяжению, сохраняя способность сопротивляться гидростатическому сжатию (если такой вид напряженного состояния возникнет после перераспределения напряжений и при дальнейшем деформировании).

При сложном напряженном состоянии упругохрупкого материала модель разрушения, соответствующая появлению дефектов в материале, может быть представлена в виде

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{f(\sigma_i)}{S} \geq \sigma_{\text{сж}}, \quad (1)$$

где $f(\sigma_i)$ – функция состояния, зависящая от главных напряжений ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$); S – функция, зависящая от прочностных характеристик материала, а именно: σ_b – предела прочности при одноосном растяжении, $\sigma_{\text{сж}}$ – предела прочности при одноосном сжатии, $\sigma_{\text{сж}}^{(2)}$ – предела прочности при двухосном сжатии, $\sigma_{\text{сж}}^{(2)P}$ – предел прочности при двухосном сжатии с учетом гидростатического напряжения σ и описывающая 3-мерную поверхность разрушения в пространстве главных напряжений.

Ортотропия свойств здесь не учитывается ввиду того, что прочностные характеристики материалов в разных направлениях не обладают высокой степенью отличия.

При выполнении условия (1) материал раскалывается, если какое-либо главное напряжение является растягивающим, или раскрашивается, если все главные напряжения сжимающие. В противном случае в материале нет ни раскалывания, ни раскрашивания.

Частный вид функций $f(\sigma_i)$ и S зависит от вида напряженного состояния, а именно:

- 1) $0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (сжатие-сжатие-сжатие);
- 2) $\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (растяжение-сжатие-сжатие);
- 3) $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \geq \sigma_3$ (растяжение-растяжение-сжатие);
- 4) $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$ (растяжение-растяжение-растяжение).

Для каждого вида напряженного состояния функции $f(\sigma_i)$ и S обозначим соответственно F_1, F_2, F_3 и F_4 и S_1, S_2, S_3 , и S_4 и выразим их в терминах главных напряжений (σ_1, σ_2 , и σ_3), где $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. При этом функции $S_i (i = 1, \dots, 4)$ должны обладать такими свойствами, что поверхность, которую они описывают, непрерывна, а поверхностные градиенты не непрерывны, когда любое из главных напряжений изменяет знак.

1. В режиме «сжатие-сжатие-сжатие» используем критерий разрушения, предложенный и обоснованный В. В. Новожиловым [1], и независимо Вильямом (Kaspar J. Willam) и Варнке (E. P. Warnke) [2], в соответствии с которым функция $f(\sigma_i)$ принимает вид:

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{15}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

а поверхность разрушения S может быть определена как

$$S_1 = \frac{2r_2(r_2^2 - r_1^2) \cos \eta + r_2(2r_1 - r_2) \left[4(r_2^2 - r_1^2) \cos^2 \eta + 5r_1^2 - 4r_1r_2 \right]^{\frac{1}{2}}}{4(r_2^2 - r_1^2) \cos^2 \eta + (r_2 - 2r_1)^2}. \quad (3)$$

Здесь

$$\cos \eta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (4)$$

$$r_1 = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2, \quad (5)$$

$$r_2 = b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2, \quad (6)$$

$$\xi = \frac{\sigma}{\sigma_{сж}}, \quad (7)$$

где σ – гидростатическое напряжение, определяющееся уравнением

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (8)$$

а коэффициенты a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 и b_2 будут определены ниже.

В пространстве главных напряжений уравнение (2) будет описывать поверхность разрушения, показанную на рис. 1. Угол η называется углом вида напряженного состояния [3], так как он определяет соотношение главных напряжений, т. е.

зависит от вида напряженного состояния. Из уравнения (4) следует, что угол $\eta = 0^\circ$ относится к напряженному состоянию, такому, что $|\sigma_3| = |\sigma_2| > |\sigma_1|$ (например, одноосное сжатие), в то время как угол $\eta = 60^\circ$ означает $|\sigma_3| > |\sigma_2| = |\sigma_1|$ (например, двухосное сжатие). Для всех других сложных напряженных состояний пределы изменения угла η составляют $0^\circ \leq \eta \leq 60^\circ$. При $\eta = 0^\circ$ S_1 (уравнение (3)) приравнивается r_1 , а при $\eta = 60^\circ$ S_1 приравнивается r_2 . Таким образом, функция r_1 представляет собой поверхность разрушения для напряженных состояний, в которых $\eta = 0^\circ$. Геометрическое изображение лучей r_1 , r_2 и угла η представлено на рис. 1.

Рис. 1. Трехмерная поверхность разрушения в пространстве главных напряжений

Можно заметить, что плоскость разрушения (след пересечения поверхности разрушения с октаэдрической плоскостью) имеет круговую симметрию относительно каждого 120° сектора октаэдрической плоскости в пределах угла $0^\circ < \eta < 60^\circ$.

Функция r_1 определяется таким подбором коэффициентов a_0 , a_1 и a_2 , чтобы значения σ_b , $\sigma_{сж}^{(2)}$ и $\sigma_{сж}^{(2)P}$ находились на поверхности разрушения. Здесь σ_b – предел прочности при одноосном растяжении, $\sigma_{сж}^{(2)}$ – предел прочности при двухосном сжатии, $\sigma_{сж}^{(2)P}$ – предел прочности при двухосном сжатии с учетом гидростатического напряжения σ .

Значения коэффициентов a_0 , a_1 и a_2 определяются из решения системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{F_1}{\sigma_{сж}}(\sigma_1 = \sigma_b, \sigma_2 = \sigma_3 = 0) \\ \frac{F_1}{\sigma_{сж}}(\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_{сж}^{(2)}) \\ \frac{F_1}{\sigma_{сж}}(\sigma_1 = -\sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma - \sigma_{сж}^{(2)J}) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_t & \xi_t^2 \\ 1 & \xi_{cb} & \xi_{cb}^2 \\ 1 & \xi_l & \xi_l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

$$\text{где } \xi_t = \frac{\sigma_b}{3\sigma_{сж}}, \xi_{cb} = -\frac{2\sigma_{сж}^{(2)}}{3\sigma_{сж}}, \xi_1 = -\frac{\sigma}{\sigma_{сж}} - \frac{2\sigma_{сж}^{(2)I}}{3\sigma_{сж}}. \quad (10)$$

Функция r_2 определяется через значения коэффициентов b_0 , b_1 и b_2 , которые должны удовлетворять условиям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{F_1}{\sigma_{сж}} (\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_{сж}) \\ \frac{F_1}{\sigma_{сж}} (\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma, \sigma_3 = -\sigma - \sigma_{сж}^I) \\ \frac{F_1}{\sigma_{сж}} \quad 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 \\ 1 & \xi_0 & \xi_0^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

$$\text{где } \xi_2 = -\frac{\sigma}{\sigma_{сж}} - \frac{\sigma_{сж}^I}{3\sigma_{сж}}; \quad (12)$$

$\sigma_{сж}^P$ – предел прочности при одноосном сжатии с учетом гидростатического напряжения, а ξ_0 – положительный корень уравнения:

$$r_2(\xi_0) = a_0 + a_1\xi_0 + a_2\xi_0^2 = 0. \quad (13)$$

Коэффициенты a_0 , a_1 и a_2 определяются из (9).

Так как поверхность разрушения должна быть выпуклой [3], отношение r_1/r_2 ограничено пределами $0,5 < r_1/r_2 < 1,25$. Но верхняя граница отношения для большинства материалов обычно $r_1/r_2 < 1$ [2].

Кроме того, коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 , b_0 , b_1 , b_2 должны удовлетворить условиям [2]:

$$a_0 > 0, \quad a_1 \leq 0, \quad a_2 \leq 0, \quad b_0 > 0, \quad b_1 \leq 0, \quad b_2 \leq 0. \quad (14)$$

Следовательно, поверхность разрушения замкнута, и предполагается разрушение при высоком гидростатическом давлении ($\xi > \xi_2$). Эта замкнутость поверхности разрушения не была проверена экспериментально и значения $\sigma_{сж}^{(2)P}$ и $\sigma_{сж}^P$ рекомендуется выбирать на уровне гидростатического напряжения σ или выше ожидаемого максимального гидростатического напряжения, встречающегося в сооружении. Уравнение (11) определяет условие того, что поверхность разрушения имеет вершину в точке $\xi = \xi_0$.

При выполнении условия разрушения (1) для данного вида напряженного состояния материал раскрашивается.

2. Растяжение – сжатие – сжатие.

Для этого вида напряженного состояния функция $f(\sigma_i)$ имеет вид [2, 3]

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \left[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

а поверхность разрушения S определяется как

$$S_2 = \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_b}\right) \frac{2p_2(p_2^2 - p_1^2) \cos \eta + p_2(2p_1 - p_2) \left[4(p_2^2 - p_1^2) \cos^2 \eta + 5p_1^2 - 4p_1 p_2\right]^{\frac{1}{2}}}{4(p_2^2 - p_1^2) \cos^2 \eta + (p_2 - 2p_1)^2}, \quad (16)$$

где $\cos \eta$ определяется уравнением (4);

$$p_1 = a_0 + a_1 \chi + a_2 \chi^2, \quad (17)$$

$$p_2 = b_0 + b_1 \chi + b_2 \chi^2. \quad (18)$$

Коэффициенты $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ определяются из (9) и (11), а

$$\chi = \frac{1}{3}(\sigma_2 + \sigma_3). \quad (19)$$

Если выполняется условие (1), то происходит растрескивание в плоскости, перпендикулярной главным напряжениям σ_1 .

3. Растяжение – растяжение – сжатие.

В данном случае функцию $f(\sigma_i)$ можно записать в виде

$$F_3 = \sigma_i; \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

а поверхность разрушения S соответственно

$$S_3 = \frac{\sigma_b}{\sigma_{сж}} \left(1 + \frac{\sigma_3}{\sigma_{сж}}\right); \quad i = 1, 2. \quad (21)$$

Если условие (1) выполняется при $i = 1, 2$, то происходит растрескивание в плоскостях, перпендикулярных главным напряжениям σ_1 и σ_2 . Если условие (1) выполняется только при $i = 1$, растрескивание происходит только в плоскости, перпендикулярной главному напряжению σ_1 .

4. Растяжение – растяжение – растяжение.

В этом случае функция $f(\sigma_i)$ принимает вид

$$F_4 = \sigma_i; \quad i = 1, 2, 3, \quad (22)$$

а поверхность разрушения S определяется как

$$S_4 = \frac{\sigma_b}{\sigma_{сж}}. \quad (23)$$

Если условие (1) выполняется в направлениях 1, 2 и 3, то растрескивание происходит в плоскостях, перпендикулярных главным напряжениями σ_1, σ_2 и σ_3 .

Если условие (1) выполняется в направлениях 1 и 2, растрескивание происходит в плоскости, перпендикулярной главным напряжениям σ_1 и σ_2 .

Если условие (1) выполняется только в направлении 1, растрескивание происходит в плоскости, перпендикулярной главному напряжению σ_1 .

Список литературы

1. Ghahghah <, <. О физическом смысле инвариантов напряжений, используемых в теории пластичности // Прикладная математика и механика. – 1952. – Т. 16. – Вып. 5. – С. 617–619.
2. Willam, K. J., Warnke, E. P. Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete // Proceedings of International Association for Bridge and Structural Engineering, ISMES, Bergamo, Italy. – 1975. – Vol. 19. – Pp. 1–30.
3. Fölsch G. G. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М. : Машиностроение, 1975. – 400 с.

M. L. Ivanov, Postgraduate Student, Izhevsk State Technical University

Model of Elastic-Brittle Fracture of Material in Complex Stress State

The mathematical model of destruction of an elastic-fragile material in a complex stress state is considered. The model is intended for effective load-carrying analysis of a building construction spatial system.

Keywords: building construction, destruction of elastic-brittle material

Получено: 30.03.11

УДК 51-74+624.04+519.673

Е. Е. Велд, аспирант;

Ижевский государственный технический университет

И. Е. Велд, начальник управления департамента инвестиций и строительства
ОАО «Газпром» (Москва)

РАЗРАБОТКА И ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ
«ЗДАНИЕ – ФУНДАМЕНТ – ОСНОВАНИЕ»

Исследована модель разрушения упруго-хрупкого материала в сложном напряженно-деформированном состоянии (НДС) элементов конструкций от различных внешних воздействий (силовых и кинематических), оценивать вероятность возникновения и процесс развития трещин, определять резерв несущей способности сооружения. Модель каждого проектируемого объекта является одновременно и частью модели целого класса объектов, ее уточнением и конкретизацией значений ее параметров применительно к заданным локальным характеристикам внешней среды.

Ключевые слова: система «здание – фундамент – основание», моделирование

Для анализа безопасности строительных конструкций требуется разработать математическую модель сооружения, которая позволяла бы описывать напряженно-деформированное состояние (НДС) элементов конструкций от различных внешних воздействий (силовых и кинематических), оценивать вероятность возникновения и процесс развития трещин, определять резерв несущей способности сооружения. Модель каждого проектируемого объекта является одновременно и частью модели целого класса объектов, ее уточнением и конкретизацией значений ее параметров применительно к заданным локальным характеристикам внешней среды.

Рассмотрим многоэтажное кирпичное здание, какими застроены многие микрорайоны российских городов. Само здание представляет собой пространственную систему с несущими стенами (продольными или поперечными), выполненными из кирпича, железобетонными перекрытиями и покрытиями, оконными и дверными проемами. Материал стен – кирпич, а точнее, кирпичная кладка, которая представляет собой