Список литературы

1. *Новожилов В. В.* О физическом смысле инвариантов напряжений, используемых в теории пластичности // Прикладная математика и механика. – 1952. – Т. 16. – Вып. 5. – С. 617–619.
2. *Willam, K. J.*, *Warnke, E. P.* Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete // Proceedings of International Association for Bridge and Structural Engineering, ISMES, Bergamo, Italy. – 1975. – Vol. 19. – Pp. 1–30.
3. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – М. : Машиностроение, 1975. – 400 с.

***

M. L. Ivanov, Postgraduate Student, Izhevsk State Technical University

Model of Elastic-Brittle Fracture of Material in Complex Stress State

The mathematical model of destruction of an elastic-fragile material in a complex stress state is considered. The model is intended for effective load-carrying analysis of a building construction spatial system.

Keywords: building construction, destruction of elastic-brittle material

Получено: 30.03.11

УДК 51-74+624.04+519.673

М. Л. Иванов, аспирант;
Ижевский государственный технический университет
А. А. Дыбрин, начальник управления департамента инвестиций и строительства
ОАО «Газпром» (Москва)

РАЗРАБОТКА И ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ «ЗДАНИЕ – ФУНДАМЕНТ – ОСНОВАНИЕ»

Рассмотрена базовая математическая модель для прочностного анализа пространственной системы «здание – фундамент – основание». Для численной реализации математической модели применен алгоритм, основанный на методе конечных элементов.

Ключевые слова: система «здание – фундамент – основание», моделирование

Для анализа безопасности строительных конструкций требуется разработать математическую модель сооружения, которая позволяла бы описывать напряженно-деформированное состояние (НДС) элементов конструкций от различных внешних воздействий (силовых и кинематических), оценивать вероятность возникновения и процесс развития трещин, определять резерв несущей способности сооружения. Модель каждого проектируемого объекта является одновременно и частью модели целого класса объектов, ее уточнением и конкретизацией значений ее параметров применительно к заданным локальным характеристикам внешней среды.

Содержательная постановка задачи моделирования. Для определенности рассмотрим многоэтажное кирпичное здание, какими застроены многие микрорайоны российских городов. Само здание представляет собой пространственную систему с несущими стенами (продольными или поперечными), выполненными из кирпича, железобетонными перекрытиями и покрытиями, оконными и дверными проемами. Материал стен – кирпич, а точнее, кирпичная кладка, которая представляет собой композит, состоящий из кирпича и раствора (в некоторых случаях армированного сеткой). Фундамент – ленточный или плита – выполнен из железобетона. Грунтовое основание может быть неоднородным по структуре, как по глубине, так и по длине и ширине здания.

Расчет таких зданий в соответствии с нормативными документами по проектированию жилых зданий [1] проводится на действие статических нагрузок, таких как собственный вес несущих стен здания, перекрытий, временная нагрузка на перекрытия, в некоторых случаях учитываются временные нагрузки (ветровые и снеговые). Основную опасность для таких зданий представляют неравномерные осадки основания, которые в каждом конкретном случае могут быть вызваны разными причинами.

Концептуальная постановка задачи моделирования. Пространственная система «здание – фундамент – основание» (ЗФО) схематично изображена на рис. 1. Отнесем систему ЗФО к прямоугольной декартовой системе координат $x_i\,(i = 1, 2, 3)$, начало которой совпадает с угловой точкой здания. Будем считать трехмерную сплошную среду – систему ЗФО, занимающую объем V, ограниченный поверхностью Γ, состоящей из объемов элементов здания (V_1), фундамента (V_2) и грунтового основания (V_3), т. е. $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$.

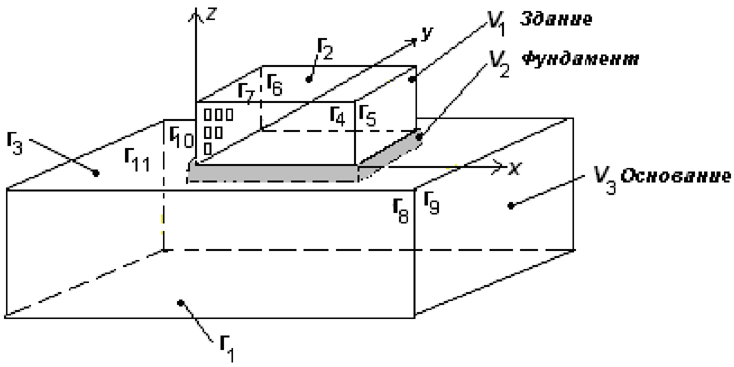

Рис. 1. Система «здание – фундамент – основание»

Предполагается идеальный контакт между элементами системы (отсутствие граничных условий контактного типа). Грунтовое основание представлено некоторой «областью влияния», внешние границы которой должны быть выбраны так, чтобы краевые эффекты на этих границах не оказывали влияния на напряженно-деформированное состояние здания. Деформации будем считать малыми.

Математическая постановка задачи моделирования. Напряженно-деформированное состояние системы определяется тензором напряжений $\hat{\sigma}$ с компонентами σ_{ij} и тензора деформаций $\hat{\varepsilon}$ с компонентами ε_{ij}, которые требуется найти по известным внешним силовым факторам и геометрии. Для их определения имеем следующую краевую задачу [2], включающую:

Уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,j}(\vec{x}) + \rho(\vec{x})F_i = 0\,, \quad \vec{x} \in V, \tag{1}$$

где $\vec{x}$ – радиус-вектор пространственного положения частицы; $\rho(\vec{x})$ – плотность материала; ρF_i – компоненты вектора внешних массовых сил.

Здесь и далее по умолчанию запятая с индексом означает частную производную по соответствующей координате x_i; индексы при компонентах тензоров, набранные строчными латинскими буквами, принимают значения от 1 до 3. По повторяющемуся индексу (называемому немым индексом) предполагается суммирование также от 1 до 3, если не оговорено другое.

Геометрические уравнения Коши (деформации считаем малыми):

$$\varepsilon_{ij}(\vec{x}) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\vec{x}) + u_{j,i}(\vec{x})),\ \vec{x} \in V, \tag{2}$$

где u_i – компоненты вектора перемещения $\vec{u}$.

Определяющие соотношения, устанавливающие связь между тензорами $\hat{\sigma}$ и $\hat{\varepsilon}$, конкретный вид которых зависит от физико-механических свойств материалов элементов системы ЗФО. В общем случае для изотермических процессов тензор напряжений определяется оператором тензора деформаций или процесса деформаций, который для неоднородной среды имеет вид [3]:

$$\hat{\sigma}(\vec{x}) = \breve{F}(\hat{\varepsilon}(\vec{x})),\ \vec{x} \in V. \tag{2.3}$$

Оператор $\breve{F}$ должен быть инвариантен относительно группы преобразований, характеризующей некоторый класс анизотропии изучаемой среды. Вид этого оператора позволяет моделировать разные свойства материалов (линейную и нелинейную упругость, упругопластичность, вязкоупругость и т. п.). Для каждого из объектов V_1, V_2, V_3 тензор-функция $\breve{F}$ будет иметь свой вид и будет конкретизирована в последующих разделах.

Граничные условия, зависящие от условий закрепления и нагружения, – смешанного типа: на части границы тела по некоторым направлениям будут заданы поверхностные нагрузки P, а на остальных частях – перемещения U. При расчете системы ЗФО учитывается собственный вес элементов системы, в некоторых случаях – временные нагрузки (ветровые и снеговые). В частных задачах исследования влияния характера неравномерных осадок основания будет рассматриваться кинематическое воздействие на основание фундамента.

В большинстве задач для системы ЗФО граничные условия будут иметь следующий вид:

$$u_i(\vec{x}) = 0,\quad \vec{x} \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_8 \cup \Gamma_9 \cup \Gamma_{10} \cup \Gamma_{11}); \tag{4}$$

$$\sigma_{ij}(\vec{x})n_j(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in (\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7). \tag{5}$$

В ряде задач

$$u_i(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \Gamma_1; \tag{6}$$

$$\sigma_{ij}(\vec{x})n_j(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in (\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7 \cup \Gamma_8 \cup \Gamma_9 \cup \Gamma_{10} \cup \Gamma_{11}). \tag{7}$$

При учете ветровых и снеговых нагрузок

$$u_i(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_8 \cup \Gamma_9 \cup \Gamma_{10} \cup \Gamma_{11}); \tag{8}$$

$$\sigma_{ij}(\vec{x})n_j(\vec{x}) = 0\,,\ \vec{x} \in (\Gamma_3 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_7)\,; \tag{9}$$

$$\sigma_{ij}(\vec{x})n_j(\vec{x}) = P_i\left(\vec{x}\right),\ \vec{x} \in (\Gamma_2 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_6)\,. \tag{10}$$

При исследовании влияния характера неравномерных осадок основания на НДС здания грунт может быть исключен из системы, и в этом случае граничные условия будут:

$$u_i(\vec{x}) = U_i(\vec{x}),\ \vec{x} \in (\Gamma^{/})\,; \tag{11}$$

$$\sigma_{ij}(\vec{x})n_j(\vec{x}) = 0\,,\ \vec{x} \in (\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7)\,. \tag{12}$$

Для получения замкнутой краевой задачи механики деформируемого твердого тела (МДТТ) необходимо конкретизировать вид определяющих соотношений (3), который зависит от механического поведения материалов, составляющих систему ЗФО. Построение единых определяющих соотношений возможно лишь для случая, когда все материалы сооружения ведут себя как линейно-упругие.

На стадии проектирования строительных объектов традиционно нелинейными эффектами пренебрегают, полагая, что все конструкции должны работать в упругой области. Определяющие соотношения механики деформируемого твердого тела (3) для случая линейной связи между напряжениями и деформациями имеют вид обобщенного закона Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\vec{x})\varepsilon_{kl}\,,\ \vec{x} \in V, \tag{13}$$

где C_{ijkl} – компоненты тензора модулей упругости.

В соответствии с рекомендациями СНиП [4] в инженерных расчетах материалы, составляющие систему ЗФО, принято считать изотропными. В изотропной среде любая плоскость является плоскостью симметрии упругих свойств. Поэтому у изотропного материала всего две независимые упругие константы:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\,,\ i, j, k, l = 1,2,3, \tag{14}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, определяемый соотношениями

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j, \end{cases} \tag{15}$$

и связь между напряжениями и деформациями (13) для изотропной линейно-упругой кусочно-однородной среды имеет вид:

$$\sigma_{ij} = \lambda(\vec{x})\theta\delta_{ij} + 2\mu(\vec{x})\varepsilon_{ij}\,,\ \vec{x} \in V, \tag{16}$$

где $\theta = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ – относительная объемная деформация или первый инвариант тензора деформации, описывающий относительное изменение объема среды; λ и μ – так называемые упругие параметры Ляме, которые для неоднородного материала являются функциями координат. Иногда коэффициент μ называют модулем сдвига и обозначают *G*.

Соотношения между упругими постоянными линейной изотропной среды имеют вид

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \ \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \tag{17}$$

где E и ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно.

Для описания нелинейных эффектов в определяющих соотношениях для разных материалов конструкций сооружения используют разные теории и математические модели, в зависимости от механического поведения материала в конкретных условиях эксплуатации, которые будут рассмотрены ниже. Условно можно выделить две группы нелинейных моделей:

1) нелинейные модели, устанавливающие связь тензора деформаций и напряжений в области упругости, пластичности, ползучести;

2) нелинейные модели, связанные с изменением состояния материала конструкции (появление трещин, раскрашивание). Жесткость в таких случаях меняется скачком и может зависеть непосредственно от нагрузки или определяться некоторыми внешними причинами.

Применение метода конечных элементов (МКЭ) для численной реализации математической модели прочностного анализа системы ЗФО

Для численной реализации краевых задач механики деформированного твердого тела используем метод конечных элементов. Он основан на замене исследуемого объекта совокупностью конечного числа дискретных элементов, связанных между собой в узлах, и представляет собой математическую модель системы, поведение которой нужно исследовать.

Процесс разбиения на конечные элементы такого сложного объекта, как сооружение, включающего в себя здание, фундамент и грунтовое основание, – задача нетривиальная. Не уточняя пока тип конечного элемента и способ аппроксимации искомой функции в пределах каждого конечного элемента, рассмотрим, как это можно сделать с помощью современных программных средств. В настоящее время большинство расчетных программных комплексов (SCAD, ЛИРА-Windows, ANSYS, NASTRAN и др.) выполняют автоматическую разбивку области исследования на конечные элементы с применением разных приемов. При этом геометрия модели может создаваться как средствами самих этих комплексов, так и средствами графических систем. В качестве примера на рис. 2 показано исследуемое здание, созданное в системе AutoCAD с прорисовкой всех наиболее существенных деталей, таких как оконные и дверные проемы, перемычки, перекрытия, лестничные клетки.

По имеющейся в литературе информации [5] логически взаимосвязанное применение CAD-систем должно приводить к существенному ускорению подготовки расчетных моделей. При этом геометрическая информация из среды AutoCAD может передаваться в виде твердотельной модели (в формате ACIS, расширение *.sat) либо в виде модели, описываемой точками, линиями, поверхностями и объемами (стандарт IGES, расширение *.igs). После импорта в препроцессор МКЭ по граничным линиям и их конечным точкам создаются плоские поверхности, подлежащие выдавливанию или разворачиванию. При решении рассматриваемого класса задач реального ускорения не наблюдается.

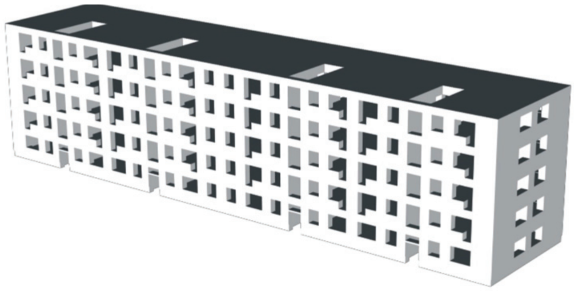

Рис. 2. Геометрическая модель здания, созданная средствами AutoCAD

Разработка эффективного алгоритма построения конечно-элементной модели системы «здание – фундамент – основание»

Для выполнения численных исследований использовался программный комплекс ANSYS. Многочисленные расчеты и исследования, выполненные с использованием разных приемов построения геометрической модели (способов нисходящего и восходящего твердотельного моделирования с применением операций булевой алгебры, использование CAD-систем и различных способов генерации сетки), позволили выявить наиболее рациональный метод построения конечно-элементной модели системы ЗФО – это твердотельное моделирование способом экструзии (выдавливания), который используется для превращения областей двумерной сетки в трехмерные объекты, состоящие из параллелепипедов и/или клиновидных элементов. Процесс экструзии осуществляется, в общем случае, за счет сочетания поступательного и вращательного перемещения элементов. При использовании этого способа время расчета может быть сокращено в 5–6 раз по сравнению с другими, а учитывая, что моделируется достаточно сложный объект, этот фактор является немаловажным.

На рис. 3 показана конечно-элементная модель здания, созданная в программном комплексе ANSYS.

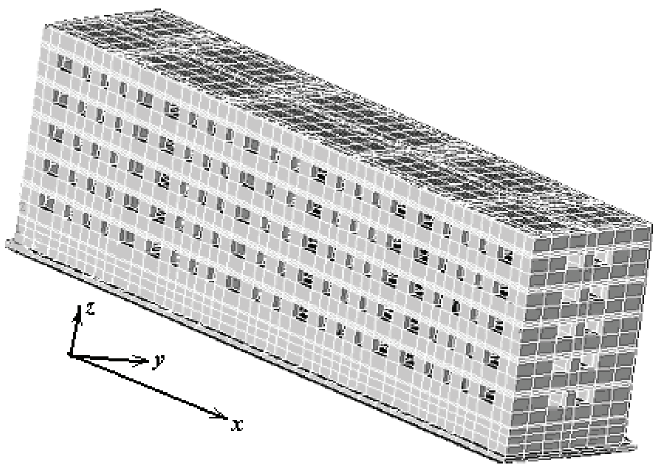

Рис. 3. Геометрическая модель здания, созданная средствами ANSYS

В модели учтены все несущие ограждения и междуэтажные перекрытия. Перегородки и лестничные марши в модели не учитывались ввиду их незначительного веса по сравнению с весом несущих конструкций и перекрытий (перекрытия частично содержат в себе вес перегородок). В модели также учтены все проемы окон с их реальными размерами и с перемычками, материал которых отличен от материала несущих стен (перемычки – бетонные, стены – кирпичные). Двухскатная кровля здания и балконные плиты в данную модель не включены. Для учета веса кровли был использован дополнительный слой покрытия, и ему присвоены свойства материала бетона.

В строительной отрасли широко применяются типовые конструкции и типовые проекты зданий и сооружений, а освоение ANSYS и других универсальных комплексов требует серьезной подготовки. Поэтому для выполнения численных исследований разработан алгоритм, а на языке параметрического проектирования APDL составлена программа построения конечно-элементной модели системы ЗФО и расчета НДС элементов системы. Данная программа может быть использована как для проектирования и анализа новых сооружений, так и при реконструкции или модернизации уже существующих объектов. Используя ее, можно выполнить численный анализ по существу любой системы «здание – фундамент – основание», меняя значения соответствующих параметров в перечне входных команд. Дальнейшим шагом в совершенствовании техники использования языка APDL применительно к рассматриваемому объекту может стать вариантное проектирование.

Ниже представлен процедурный алгоритм построения конечно-элементной модели системы ЗФО.

1. Процесс построения модели методом экструзии удобнее начинать с верхнего строения, т. е. здания, которое можно моделировать вместе с фундаментом. На условной отметке 0 (под подошвой фундамента) строятся двумерные области и на них наносится конечно-элементная сетка (рис. 4). При разбиении сразу указываются свойства материалов верхнего строения модели (фундамента и здания). На плоских областях должны отображаться все объемы, которые требуется получить в итоге.

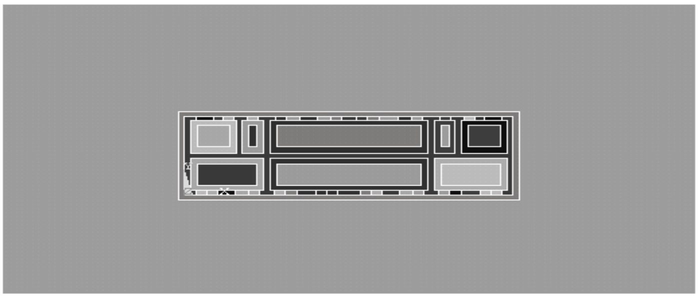

Рис. 4. Построение плоской конечно-элементной модели (на условной нулевой отметке)

2. На втором этапе «выдавливаются» фундамент, стены, перемычки и плиты перекрытия (рис. 5). Легче всего построение этих объектов описывать циклами, поочередно, удаляя лишние объемы по ходу построения модели, а не после ее завершения.

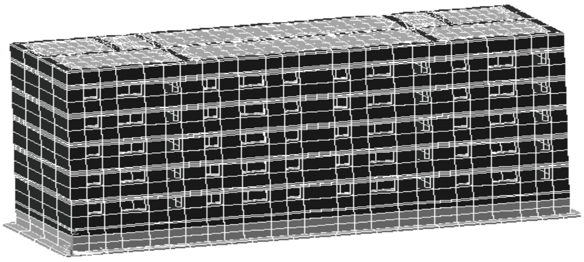

Рис. 5. Второй этап построения модели

3. На третьем этапе от нулевой плоскости вниз экструдируется (выдавливается) грунтовое основание необходимых размеров. Так как грунтовое основание чаще всего не имеет четко выраженных геометрически правильных структурных составляющих, выдавливается грунт одного типа по всей толще основания.

Конечно-элементная модель грунтового основания строится по результатам инженерно-геологических изысканий. Чаще всего основание представляет собой неоднородную среду, состоящую из чередующихся слоев различной мощности (толщины), отличающихся в плане и по глубине. Поверхности раздела слоев описываются (аппроксимируются) математическими функциями, а затем в цикле определяются координаты центров масс конечных элементов, определяется их принадлежность слою грунта, и этим элементам присваиваются соответствующие свойства материалов. Таким образом, можно построить любое грунтовое основание, точность и сложность которого ограничивается лишь той математической моделью, которую приняли для его описания.

При построении конечно-элементной модели системы ЗФО способом экструзии, помимо сокращения машинного времени на создание модели, значительно облегчается нанесение сетки. Разбивать необходимо лишь двумерные объекты, при выдавливании на трехмерных объектах сетка сгенерируется сама с шагом по высоте, который легко можно изменять. Таким образом, сетка получается более регулярной, и отдельные конечные элементы практически не имеют острых углов, которые могут приводить к значительным погрешностям в расчетах.

В итоге получается конечно-элементная модель всей системы «здание – фундамент – основание» (рис. 6).

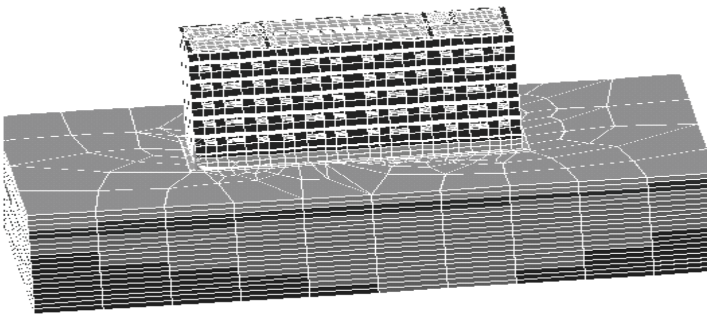

Рис. 6. Конечно-элементная модель системы ЗФО

Чтобы получить численное решение методом конечных элементов, нужно располагать средствами перехода от соотношений, выполняющихся в точке, к соотношениям, выполняющимся в некоторой конечной области. Традиционно при решении задач исследования НДС системы с линейными определяющими соотношениями (14) такой переход осуществляется с помощью вариационной постановки задачи [6–8]. Известно, что законы механики сплошной среды наряду с описанием их дифференциальными уравнениями сводятся к утверждению, что некоторый функционал в рассматриваемом процессе должен достигать экстремума или стационарной точки. В такой формулировке эти законы называются вариационными принципами механики, а задачи, в которых требуется исследовать функционал на экстремум, – вариационными задачами.

Краевая задача линейной теории упругости по определению напряженно-деформированного состояния элементов системы ЗФО, описываемая уравнениями равновесия (1), условиями Коши (2) и граничными условиями (4)–(12), эквивалентна задаче о нахождении стационарной точки функционала общей потенциальной энергии упругой системы:

$$\Pi(\vec{u}) = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}(\vec{u})\varepsilon_{ij}(\vec{u})\,dV - \int_V \rho F_i u_i\,dV - \int_{\Gamma_2} P_i u_i\,d\Gamma. \qquad (18)$$

В соответствии с вариационным принципом Лагранжа из всех кинематически возможных полей перемещений в действительности реализуются те, которые доставляют минимальное значение полной потенциальной энергии системы, т. е.

$$\delta\Pi = 0\,, \quad \delta^2\Pi > 0. \qquad (19)$$

Решение вариационного уравнения (19) является обобщенным решением исходной краевой задачи теории упругости (1)–(2), (4)–(12).

Согласно основной идее МКЭ рассматриваемая область V разбивается на E конечных элементов, каждый из которых имеет N_e узлов и занимает область V_e. Обозначим через N общее число узлов в сетке конечных элементов. С учетом свойства аддитивности интегралов по области V функционал Π будет состоять из суммы функционалов Π_e для каждого конечного элемента V_e, т. е. вместо (18) получим

$$\Pi(\vec{u}) = \sum_{e=1}^{E} \Pi_e(\vec{u})\,. \qquad (20)$$

Будем решать задачу прямым методом в форме метода Ритца в традиционной реализации метода перемещений. Детальное описание метода с подробной аргументацией содержится в многочисленных литературных источниках [3, 6–9].

Выбор именно этой формы метода объясняется простотой алгоритмизации и физической интерпретации, возможностью создания единых приемов построения матриц жесткости и векторов нагрузок для различных типов конечных элементов, а также учета произвольных граничных условий и сложной геометрии рассчитываемой конструкции.

Не уточняя тип конечного элемента и способ аппроксимации искомой функции в пределах каждого конечного элемента, предположим, что существует совокупность линейно независимых непрерывных в области V функций $\left\{\varphi_i(\vec{x})\right\}_{i=1}^{N}$ – система базисных функций. В пределах каждого конечного элемента с номером (e) векторное поле перемещений $\vec{u}\left(\vec{x}\right)$, $\vec{x} \in V_e$, приближенно представим выражением

$$u_i^e\left(\vec{x}\right) = u_{ni}^e \varphi_n^e\left(\vec{x}\right), \quad \vec{x} \in V_e , \tag{21}$$

где $i = \overline{1, 3}$ (в случае трехмерной задачи), $n = \overline{1, N_e}$, индекс n – немой; $\varphi_n^e\left(\vec{x}\right)$ – локальные координатные функции (функции формы конечного элемента). Параметры u_{ni}^e являются неизвестными значениями узловых перемещений конечного элемента, которые в совокупности образуют вектор $\{u\}$ узловых неизвестных конечноэлементной системы с компонентами u_{li}, $i = \overline{1,3}$; $l = \overline{1,N}$. Глобальная узловая неизвестная u_{li} совпадает с узловой неизвестной конечного элемента u_{ni}^e, если локальный номер n узла конечного элемента имеет глобальный номер l в сетке конечных элементов. Глобальные узловые неизвестные $\{u\}$ будут определяться из условия минимума функционала П.

Таким образом, по методу конечных элементов система базисных функций

$$\varphi_i\left(\vec{x}\right) = \begin{cases} \varphi_i^e\left(\vec{x}\right), & \vec{x} \in V_{(i)}^e, \\ 0, & \vec{x} \notin V_{(i)}^e, \end{cases} \quad i = \overline{1,N}, \ \vec{x} \in V, \tag{22}$$

где $V_{(i)}^e$ – множество конечных элементов, имеющих узловую точку с глобальным номером i.

Подставляя (21), (22) в функционал (18), для линейно упругой среды (14) получим функцию конечного числа переменных:

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} u_{mi}^e u_{nj}^e a\left(\varphi_n^e\left(\vec{x}\right), \varphi_m^e\left(\vec{x}\right)\right) -$$
$$-\sum_{i=1}^{3} u_{mi}^e \int\limits_{Ve} F_i\left(\vec{x}\right)\varphi_m^e\left(\vec{x}\right) dV - \sum_{i=1}^{3} u_m^e \int\limits_{\Gamma e} P_i\left(\vec{x}\right)\varphi_m^e\left(\vec{x}\right) d\Gamma, \tag{23}$$

где $a\left(\varphi_n^e, \varphi_m^e\right) = \int\limits_{Ve} C_{klpq}\varepsilon_{pq}\left(\varphi_n^e\right)\varepsilon_{kl}\left(\varphi_m^e\right) dV$; $n, m = \overline{1, N_e}$.

Отметим, что

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial u_{mi}^e} = \sum_{j=1}^{3} u_{nj}^e a\left(\varphi_n^e, \varphi_m^e\right) - \int\limits_{Ve} F_i \varphi_m^e dV - \int\limits_{\Gamma e} P_i \varphi_m^e d\Gamma, \quad m = \overline{1, N_e}, \quad i = \overline{1,3}.$$

Условие минимума функционала (18) можно записать в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_{li}} = \frac{\partial}{\partial u_{li}}\sum_{e=1}^{E}\Pi_e = \sum_{e=1}^{E}\frac{\partial \Pi_e}{\partial u_{li}} = 0; \ i = \overline{1, 3}, \ l = \overline{1, N}, \tag{24}$$

причем

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial u_{li}} = \begin{cases} \dfrac{\partial \Pi_e}{\partial u_{mi}^e}, \text{ если } m \Rightarrow l; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Символ «$\Rightarrow$» означает, что узел элемента с локальным номером m $\left(m = \overline{1, N_e}\right)$ имеет глобальный номер l $\left(l = \overline{1, N}\right)$.

В результате получаем разрешающую систему линейных алгебраических уравнений МКЭ, которую обычно записывают в матричной форме:

$$[\mathrm{K}] \cdot \{u\} = \{F\}, \tag{25}$$

где $[\mathrm{K}]$ – глобальная матрица жесткости системы конечных элементов; $\{u\}$ – вектор узловых неизвестных; $\{F\}$ – глобальный вектор узловых внешних сил.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (25) может быть получено численно, например, методом Гаусса с учетом симметричности получаемых уравнений. В данной работе система (25) решалась с помощью алгоритма прямого действия (Rank-n алгоритм, обеспечивающий параллельную обработку системы уравнений, т. е. вычисление основных неизвестных не порознь, а группами), в результате которого получали приближенное решение системы. Учитывая то, что количество уравнений весьма велико, для уточнения решения применялись итерационные методы: алгоритм на основе метода обусловленных сопряженных градиентов, алгоритм на основе метода сопряженных градиентов Якоби [10] и метод частично сопряженных градиентов Холесского [11].

Список литературы

1. Пособие по проектированию жилых зданий. Вып. 3. Ч. 1. Конструкции жилых зданий (к СНиП 2.08.01-85). Утверждено приказом ЦНИИЭП жилища Госкомархитектуры от 31 июля 1986 г. № 459. URL: http://www.stroi-baza.ru/snips/one.php?id=1338 (дата обращения: 05.04.2011).

2. *Ионов В. Н.*, *Огибалов П. М.* Прочность пространственных элементов конструкций. – М. : Высш. шк., 1972. – 752 с.

3. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности : учеб. пособие. – 2-е изд. – М. : Изд-во МГУ, 1995. – 366 с. URL: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Pobedrya1995ru.djvu (дата обращения: 05.04.2011).

4. СНиП 2.02.01–83. Основания зданий и сооружений. – М. : Стройиздат, 1985. – 40 с. URL: http://publ.lib.ru/ARCHIVES/S/SNiP/SNiP_2.02.01-83.%20%5Bdjv%5D.zip (дата обращения: 05.04.2011).

5. *Басов К. А.* ANSYS в примерах и задачах / под общ. ред. Д. Г. Красковского. – М. : КомпьютерПресс, 2002. – 224 с.

6. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М. : Мир, 1975. – 541 с. URL: http://rapidshare.com/files/43793422/Zenkevich_O._Metod_konechnyh_jelementov_v_tehnike.rar (дата обращения: 05.04.2011).

7. *Розин Л. А.* Метод конечных элементов в применении к упругим системам. – М. : Стройиздат, 1977. – 128 с. URL: http://depositfiles.com/files/b3u77itg7 (дата обращения: 05.04.2011).

8. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. – М. : Мир, 1979. – 392 с.

9. *Корнеев В. Г.* Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. – 206 с.

10. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М. : Мир, 1976. – 464 с.

11. Математическое моделирование / под ред. Дж. Эндрюса, Р. Мак-Лоуна ; пер. с англ. под ред. Ю. П. Гупало. – М. : Мир, 1979. – 276 с.

***

M. L. Ivanov, Postgraduate Student, Izhevsk State Technical University
A. A. Dybrin, Head of the Investment and Construction Department of JSC Gazprom

Development and Numerical Implementation of Mathematical Model of "Building-Foundation-Ground" Spatial System

The basic mathematical model for the strength analysis of the "building-foundation-base" spatial system is considered. The algorithm based on of finite element method is applied to the numerical realization of the model.

Keywords: "building-foundation-ground" system, model

Получено: 30.03.11

УДК 519.863

Е. И. Попова, студентка
Ижевский государственный технический университет

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ПОЛИРЕГИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКИ

Рассмотрена модель государственного управления полирегиональной экономикой на основе теории активных систем. По статистическим данным проведена идентификация коэффициентов модели. Рассмотрены вопросы устойчивости полученных коэффициентов.

Ключевые слова: модель, активная система, идентификация

При моделировании сложных социально-экономических объектов, имеющих иерархическую структуру, применяется понятие активной системы [1]. Составными элементами базовой модели активной системы являются управляющий центр и управляемые элементы. Управляющий центр находится на верхнем уровне иерархии и имеет свои интересы и цели, которые он достигает через организацию деятельности управляемых элементов. Они расположены на следующих уровнях иерархии и также могут иметь свои собственные цели.

При построении модели управления активной системы необходимо определить ее составные элементы. Установление структуры активной системы предполагает установление связей между элементами системы. К связям относятся управляющие воздействия, информационный обмен, права и обязанности элементов, а также иерархия подчиненности между элементами [2].

В книге [3] экономическая деятельность государства рассматривается как активная система. Основными элементами этой системы являются товаропроизводители, научно-образовательная деятельность и здравоохранение.

Управляющим центром является государство, устанавливающее налоги и выделяющее средства на научно-образовательную деятельность и здравоохранение. Научно-образовательная деятельность должна увеличивать качество производственных процессов за счет улучшения технологий и управления. Роль здравоохра-