10. *Hq >* . Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М. : Мир, 1976. – 464 с.

11. Математическое моделирование / под ред. Дж. Эндрюса, Р. Мак-Лоуна ; пер. с англ. под ред. Ю. П. Гупало. – М. : Мир, 1979. – 276 с.

***

M. L. Ivanov, Postgraduate Student, Izhevsk State Technical University
A. A. Dybrin, Head of the Investment and Construction Department of JSC Gazprom

Development and Numerical Implementation of Mathematical Model of “Building-Foundation-Ground” Spatial System

The basic mathematical model for the strength analysis of the “building-foundation-base” spatial system is considered. The algorithm based on of finite element method is applied to the numerical realization of the model.

Keywords: “building-foundation-ground” system, model

Получено: 30.03.11

УДК 519.863

?. B. IhihZ , студентка
Ижевский государственный технический университет

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ПОЛИРЕГИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКИ

JZkkfhlj_gZ *fhev hkmZklgh mijZgby ihebjhgZvghc wdhghfbdhc gZ hkgh_ lhjbb Zlbguo kbklf . Ih klZbklbqkdbf Zguf ijhgZ bglbnbdZby dhwnnbpbglh\ fhb . JZkfhljgu hijhku mklhcqbhklb ihemqguo dhwnnbpbglh\ .*

Dexqu **keh :** модель, активная система, идентификация

При моделировании сложных социально-экономических объектов, имеющих иерархическую структуру, применяется понятие активной системы [1]. Составными элементами базовой модели активной системы являются управляющий центр и управляемые элементы. Управляющий центр находится на верхнем уровне иерархии и имеет свои интересы и цели, которые он достигает через организацию деятельности управляемых элементов. Они расположены на следующих уровнях иерархии и также могут иметь свои собственные цели.

При построении модели управления активной системы необходимо определить ее составные элементы. Установление структуры активной системы предполагает установление связей между элементами системы. К связям относятся управляющие воздействия, информационный обмен, права и обязанности элементов, а также иерархия подчиненности между элементами [2].

В книге [3] экономическая деятельность государства рассматривается как активная система. Основными элементами этой системы являются товаропроизводители, научно-образовательная деятельность и здравоохранение.

Управляющим центром является государство, устанавливающее налоги и выделяющее средства на научно-образовательную деятельность и здравоохранение. Научно-образовательная деятельность должна увеличивать качество производственных процессов за счет улучшения технологий и управления. Роль здравоохранения состоит в улучшении качества рабочей силы и в увеличении объема трудовых ресурсов. Образовательная деятельность также направлена на повышение эффективности использования рабочей силы. Товаропроизводители являются активными элементами в этой иерархической системе. Они также могут выделять средства на развитие науки, образования и здравоохранения.

Целью товаропроизводителей является максимальное потребление. Цель государства как управляющего центра состоит в максимальном сборе налогов с производства.

Математическая модель такой экономической системы строится на основе производственных функций с учетом инвестиций в улучшение производства. Предполагается, что в системе находятся несколько товаропроизводителей.

В рассматриваемой модели полирегиональной экономики в качестве товаропроизводителей выступают территориальные образования Российской Федерации – федеральные округа (ФО). В соответствии с Указом Президента Российской Федерации от 13 мая 2000 г. № 849 «О полномочном представителе Президента Российской Федерации в федеральном округе», выделяют семь ФО: Центральный, Северо-Западный, Южный, Приволжский, Уральский, Сибирский и Дальневосточный.

В модели используются следующие обозначения:

$y_i, x_i, i = \overline{1,n}$ – объемы выпускаемой продукции и производственных фондов, где n – количество товаропроизводителей;

$q_i, i = \overline{1,n}$ – объемы научно-образовательного потенциала в сфере науки и образования;

$Q_i, i = \overline{1,n}$ – объемы потенциала физического состояния населения;

$L_i, i = \overline{1,n}$ – объем трудовых ресурсов.

Связь между объемом продукции и используемыми ресурсами определяется производственной функцией типа Кобба – Дугласа:

$$y_i = A_i \phi(q_i) x_i^{\alpha} L_i^{1-\alpha}, \tag{1}$$

где A_i – технологический коэффициент.

Влияние научно-образовательного потенциала на увеличение выпуска продукции задается функцией

$$\phi(q_i) = \left(1 + a_i q_i^{\gamma_i} \exp\left(-\frac{E_i}{q_i}\right)\right), \tag{2}$$

где a_i, γ_i, E_i – некоторые коэффициенты.

Коэффициент a_i отвечает за способность системы к реализации потенциала q_i. Коэффициент E_i отражает некоторый порог средств, после достижения которого начинается проявление эффекта от вложения средств в улучшение производства. Показатель степени γ_i характеризует способность системы к непрерывному увеличению эффекта от вложения средств. При $\gamma = 0$ происходит насыщение, и дальнейшее увеличение q_i не приносит эффекта.

Объем трудовых ресурсов зададим в виде

$$L_i = L_i^0 \phi(Q_i) \exp\left(b_i + R_i \delta_i t\right), \tag{3}$$

где L_i^0 – начальный уровень трудового ресурса; $b_i + R_i \delta_i t$ – выражение, учитывающее прирост или убыль трудового ресурса; R_i – средства, выделяемые государством на здравоохранение; t – текущее время.

Основные производственные фонды подвержены амортизации с коэффициентом μ_x. Научно-образовательный потенциал и потенциал здоровья без инвестиций в эти области также могут снижаться с темпами μ_q, μ_Q.

Средства от реализации продукции товаропроизводителя распределяются на пять частей:

1) инвестиции в расширение производства – $S_i^1 y_i$;

2) вложения в науку и образование – $S_i^2 y_i$;

3) вклад в охрану здоровья – $S_i^3 y_i$;

4) потребление – $S_i^4 y_i$;

5) налоги государству – $H_i\, y_i$.

Государство из собранных налогов направляет средства на развитие науки и образования r_i и на здравоохранение R_i.

Дифференциальные уравнения, описывающие прирост производственных фондов, научно-образовательного потенциала и потенциала здоровья, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= S_i^1 y_i - \mu_{xi} x_i, \\ \frac{dq_i}{dt} &= (S_i^2 + r_i) y_i - \mu_{qi} q_i, \\ \frac{dQ_i}{dt} &= (S_i^3 + R_i) y_i - \mu_{Qi} Q_i, \quad i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Системе обыкновенных дифференциальных уравнений соответствуют начальные условия:

$$x_i(0) = x_i^0;\ q_i(0) = q_i^0;\ Q_i(0) = Q_i^0. \tag{5}$$

Целевым критерием государства является получение максимального налога за вычетом средств, направляемых на науку и здравоохранение:

суммарная за плановый отрезок времени □ величина

$$\Phi_0 = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^n H_i(t) y_i(t) - \sum_{i=1}^n r_i(t) y_i(t) - \sum_{i=1}^n R_i(t) y_i(t) \right) dt \to \max \tag{6}$$

либо соответствующее моменту времени □

$$\Phi_0 = \sum_{i=1}^n H_i(T) y_i(T) - \sum_{i=1}^n r_i(T) y_i(T) - \sum_{i=1}^n R_i(T) y_i(T) \to \max. \tag{7}$$

Для производственных элементов можно задать максимальное потребление:

$$\Phi_i = \int_0^T S_i^4(t) y_i(t) dt \to \max \tag{8}$$

или

$$\Phi_i = S_i^4(T) y_i(T) \to \max . \tag{9}$$

Управляющими функциями являются следующие переменные:

$$S_i^1(t), S_i^2(t), S_i^3(t), S_i^4(t), H_i(t), r_i(t), R_i(t),$$

удовлетворяющие условиям:

$$S_i^1 + S_i^2 + S_i^3 + S_i^4 + H_i = 1, \tag{10}$$

$$r_i + R_i \le H_i, \quad i = \overline{1, n} . \tag{11}$$

Таким образом, построена модель оптимального управления по нескольким критериям (6), (8) (или (7), (9)) с уравнениями для фазовых переменных (4), начальными условиями (5) и ограничениями (10), (11).

Построенная математическая модель может быть использована для нахождения оптимального управления данной системой. Но прежде необходимо провести идентификацию модели, определив значения входящих в уравнения коэффициентов на основе статистических данных.

Представленная модель содержит коэффициенты A_i, a_i, γ_i, E_i, μ_{xi}, μ_{qi}, μ_{Qi}, α_i, которые определяют поведение описываемой экономической системы.

В качестве данных для идентификации модели были использованы статистические результаты по объему валового регионального продукта (ВРП), сгруппированного по федеральным округам за 2002–2009 гг. (табл. 1).

LZ[ebpZ *1*. H[t_f **JI (ldmsbo pgo , fej jm) a 2002–2009 .**

ФО \ Год	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Центральный	8 741,22	10 742,42	13 964,31	18 034,39	22 492,12	27 963,96	33 908,76	32 072,55
Северо-Западный	2 878,66	3 577,14	4 617,09	6 278,36	7 965,17	10 208,92	12 674,40	11 445,21
Южный	886,84	1 091,03	1 474,88	1 799,78	2 198,61	2 770,19	3 388,22	3 405,65
Приволжский	693,58	836,25	1 042,46	1 288,13	1 652,31	2 150,30	2 729,34	2 784,09
Уральский	1 483,31	1 807,99	2 284,90	2 799,04	3 513,34	4 330,43	5 324,05	4 919,92
Сибирский	1 335,98	1 659,32	2 234,75	3 091,36	3 720,62	4 236,33	4 815,67	4 396,56
Дальневосточный	991,74	1 209,60	1 631,78	1 951,30	2 443,00	2 990,67	3 442,21	3 390,22

Для подбора коэффициентов решается задача минимизации отклонения расчетного значения $y(t)$ от фактического $Y(t)$. Отклонение характеризуется следующим функционалом:

$$F(\mathbf{W}) = \int_0^T \left(y(t) - Y(t) \right)^2 dt \to \min, \tag{12}$$

где $\mathbf{W} = \left(A_i, a_i, \gamma_i, E_i, \mu_{xi}, \mu_{qi}, \mu_{Qi}, \alpha_i \right)^T$.

Задача (12) решалась с помощью генетического алгоритма с вещественным кодированием.

Для идентификации модели использовались следующие значения управляющих функций (табл. 2).

LZ[ebpZ 2. **Mijeyxsb nmgdpbb**

Федеральный округ	S^1	S^2	S^3	S^4	H	r	R
Центральный	0,157	0,002	0,002	0,559	0,280	0,022	0,122
Северо-Западный	0,260	0,001	0,004	0,455	0,280	0,022	0,156
Южный	0,282	0,002	0,012	0,424	0,280	0,022	0,145
Приволжский	0,222	0,003	0,007	0,488	0,280	0,022	0,151
Уральский	0,246	0,004	0,004	0,466	0,280	0,022	0,169
Сибирский	0,194	0,002	0,005	0,519	0,280	0,022	0,144
Дальневосточный	0,318	0,004	0,006	0,392	0,280	0,022	0,142

Начальные условия (5) для системы дифференциальных уравнений (4) по каждому ФО представлены в табл. 3.

LZ[ebpZ 3. **Gqvgu mkehby**

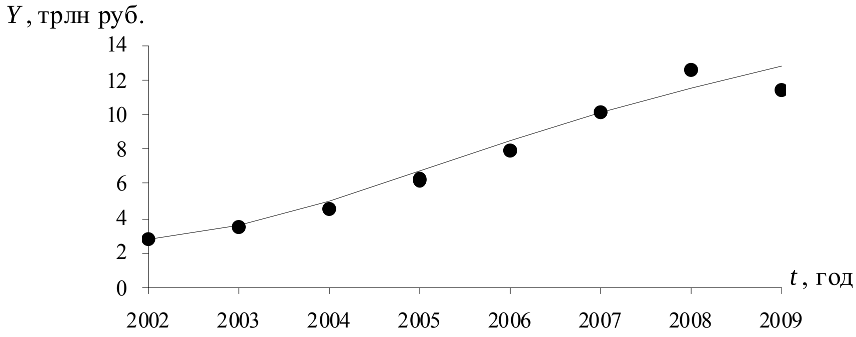
Федеральный округ	x_0, млрд руб.	q_0, млрд руб.	Q_0, млрд руб.	L_0, тыс. чел.
Центральный	451,95	69,09	356,95	17 927,80
Северо-Западный	230,58	20,40	141,89	6 659,50
Южный	195,59	16,65	108,89	8 686,20
Приволжский	329,29	37,08	234,36	14 481,00
Уральский	328,65	34,74	231,12	5 879,00
Сибирский	192,40	23,80	147,77	8 727,10
Дальневосточный	149,81	12,25	69,72	3 212,90

На рис. 1 точками нанесены значения ВРП, сплошной линией – восстановленная зависимость $y(t)$ на примере Центрального и Дальневосточного федеральных округов.

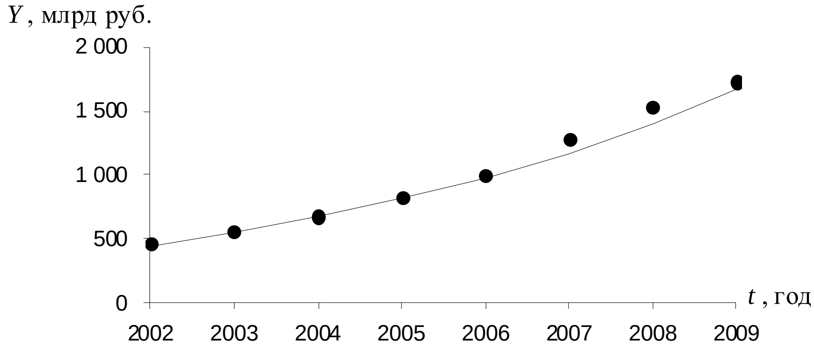
Коэффициенты детерминации по данной модели для каждого из федеральных округов являются значимыми, что свидетельствует о том, что модель достаточно точно описывает исходные данные. Однако некоторый разброс значений указывает на неучтенные факторы (кризисные явления, циклические колебания и т. п.). Разброс приводит к неоднозначности получаемых коэффициентов.

Была проведена серия из 25 запусков оптимизационного алгоритма, и для каждого коэффициента рассчитаны среднее значение и дисперсия.

Коэффициенты $\gamma_{qi}, \gamma_{Qi}, \mu_{xi}, \mu_{qi}, \mu_{Qi}, \alpha_i$ имеют малый разброс (табл. 4), поэтому можно говорить, что значения коэффициентов правильно идентифицируемы и их можно использовать для дальнейших вычислений.



Z



[

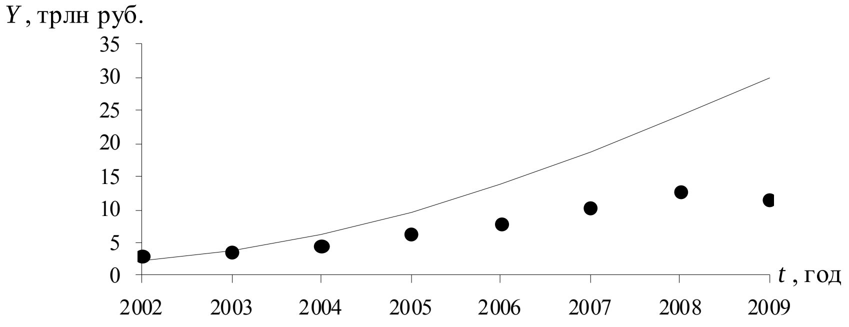
Jbk. 1. Динамика ВРП за 2002–2009 гг.:
Z – Центральный ФО; [– Дальневосточный ФО

LZ[bpZ 4. **Kjgb aggby b bkijkby dhwnnbpbglh fheb**

ФО \ Коэффициенты	α	γ_q	γ_Q	μ_x	μ_q	μ_Q
	Среднее значение					
Центральный	0,300	0,161	0,048	0,134	0,006	0,023
Северо-Западный	0,268	0,248	0,048	0,163	0,011	0,025
Южный	0,388	0,185	0,078	0,170	0,009	0,030
Приволжский	0,345	0,375	0,029	0,171	0,011	0,038
Уральский	0,271	0,156	0,000	0,247	0,005	0,001
Сибирский	0,290	0,361	0,022	0,144	0,007	0,038
Дальневосточный	0,272	0,283	0,330	0,120	0,010	0,056
	Дисперсия					
Центральный	0,033	0,093	0,013	0,002	0,001	0,002
Северо-Западный	0,032	0,108	0,010	0,006	0,001	0,002
Южный	0,033	0,107	0,026	0,007	0,001	0,003
Приволжский	0,042	0,209	0,010	0,004	0,001	0,004
Уральский	0,024	0,128	0,001	0,001	0,001	0,001
Сибирский	0,036	0,211	0,003	0,003	0,001	0,003
Дальневосточный	0,032	0,129	0,115	0,010	0,001	0,003

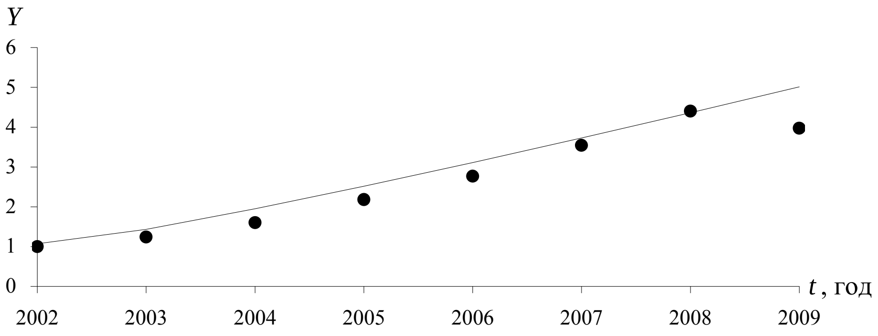
Коэффициенты $A_i, a_{qi}, a_{Qi}, E_{qi}, E_{Qi}$ имеют большой разброс (плохо идентифицируемы). Дисперсии данных коэффициентов больше единицы.

Зависимость $y(t)$ восстанавливается с хорошей точностью для различных сочетаний параметров модели, но при этом некоторые из коэффициентов изменяются в довольно больших диапазонах. Поэтому если данную зависимость $y(t)$ строить с использованием средних значений коэффициентов по нескольким запускам, то она будет описывать исходную модель хуже (см. рис. 2).



Jbk. *2*. Динамика ВРП для Центрального ФО

Если провести нормирование начальных данных к первому году по каждому из федеральных округов, то значения коэффициентов $A_i, a_{qi}, a_{Qi}, E_{qi}, E_{Qi}$ будут более устойчивыми, т. е. иметь меньший разброс. Так, коэффициенты A_i имеют дисперсию в среднем 0,07. На рис. 3 представлена восстановленная зависимость $y(t)$ при усреднении полученных коэффициентов. Она описывает исходные данные лучше, чем в предыдущем случае.



Jbk. *3*. Динамика ВРП для Центрального ФО

В заключение можно сказать, что представленная модель достаточно точно описывает статистические данные. Некоторый разброс получаемых коэффициентов можно уменьшить путем нормировки исходных данных. На основе полученных коэффициентов возможно нахождение оптимального управления задачи (1)–(11).

Kibkhd ebljZlmju

1. *Ghbdh\ >. : ., IljZh\ K. G.* Курс теории активных систем. – М. : СИНТЕГ, 1999. – 104 с. URL: http://www.aup.ru/books/m110/file_46.pdf (дата обращения: 03.05.2011).

2. *=jhdbc <. I ., Lgg\ <. : .* Моделирование оптимального управления холдинговой структурой на основе теории активных систем // Интеллектуал. системы в пр-ве. – 2007. – № 2. – С. 20–35.

3. *Lgg\ <. : ., Ydbfhbq ; . : .* Генетические алгоритмы в моделировании систем : моногр. – Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2010. – 308 с.

***

E. I. Popova, Student, Izhevsk State Technical University

Identification Model of Polyregional Economics

A model of polyregional economics state management, based on the theory of active systems is considered. The model is identified according to the statistics data. Stability of received coefficients is considered.

Keywords: model, active system, identification

Получено: 25.04.11

УДК 532.5.011

<. : . Lggz, доктор физико-математических наук, профессор;
. : . DZbgdbg, кандидат технических наук, доцент;
X . <. Lmjubg, доктор технических наук, профессор
Ижевский государственный технический университет

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВЫСОКОНАПОРНОЙ СВОБОДНОЙ ЖИДКОСТНОЙ СТРУИ С ПРОМЫВАЕМЫМ ПОРИСТЫМ МАТЕРИАЛОМ

Ij_klZ\e_gZ *fZlbqkdZ fhv gZdby bdhc kljmb gZ ihjbklmx ijjh . Qbkeg gh_ bkkehZb_ uybeh aZkbfhklv kljmdlmju lggby hl oZljbklbd bklggby b khckl\ ihjbklhc kju . JamevlZu fhl ulv bkihevahZu ey hjZbaZbb ijhfuhqghh ijhpkkZ ihjbkluo fZbZh\ .*

Dexqu **keh :** течение струи, пористый материал, математическая модель

В России и во всем мире во многих отраслях промышленности, таких как строительство, транспорт, металлургия, машиностроение, широко применяются устройства струйной промывки жидкостью, нагнетаемой под высоким давлением (до 5–10 МПа и более). Их главное преимущество состоит в том, что с использованием таких устройств обеспечивается быстрое очищение загрязненных поверхностей при сравнительно невысоком расходе жидкости.

Подобные моющие устройства используются, например, в бумагоделательной промышленности [1, 2]. От них зависят эффективность работы бумагоделательного оборудования в целом и качество выпускаемой бумажной продукции.

Устройства струйной промывки применяют для поддержания работоспособности технологических полотен – сукон и сеток. В процессе работы происходит постепенное их загрязнение различными частицами органического и неорганического происхождения, отделяющимися от бумажного полотна. Это приводит к снижению