9. Ilbf *K*. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / пер. с англ. под ред. В. Д. Виленского. – М. : Энергоиздат, 1984. – 152 с.

***

V. : . Lenenev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Izhevsk State Technical University
. : . Dalinkin, Candidate of Technical Sciences, Izhevsk State Technical University
X . <. *Iijubg*, Doctor of Technical Sciences, Professor, Izhevsk State Technical University

Hydrodynamic Modelling of Interaction of High-Pressure Free-Discharging Fluid Jet with Porous Material during Flushing

The model of interaction of fluid jet with porous material is presented. The numerical investigation of the process revealed the flow structure dependence on its characteristics and properties of the porous material. The results may be used in the flushing process of porous materials.

Keywords: jet flow, porous material, mathematical model

Получено: 25.04.11

УДК 519.21

. X . *Ngh*, аспирант
Удмуртский государственный университет

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ К ОПИСАНИЮ ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Kkfhljg *Zbfilhlbqdb_ khcklZ kemqZghh ijhpkkZ , gZZghh hfljbqdbf kem Zguf emZbf_ \ kemZghc kj^ , uibkZu iehlghklv b ijhfZhZb_ KeZ h ijev - ghh jZijegby . hdZZh , qh ijevgh_ jZijegb_ ihkljhgghh kemZghh ijhpkkZ lhq_ hibkuZ wfibjbqdb_ jZijegby hohghklc gZ nhghhf jugd_ , q ghjfZvgh_ jZijegb_ .*

Ключевые слова: геометрическое случайное блуждание в случайной среде, предельное распределение, финансовый временной ряд, логарифмические доходности

В основе современных представлений об экономике лежит вера в силу рынка, чья «невидимая рука» обеспечивает устойчивость механизмов взаимодействия продавцов и покупателей, определения рыночной цены. Попытка исследовать успешность функционирования рынка капитала привела к формированию в двадцатом столетии гипотезы рыночной эффективности (ГРЭ), согласно которой финансовый рынок наилучшим образом использует имеющуюся информацию, в том числе при ценообразовании активов. В частности, слабая форма ГРЭ предполагает, что цены финансовых активов полностью отражают всю информацию, содержащуюся в исторических данных об их динамике. Фактически это означает, что все изменения цен представляют собой случайные отклонения от предыдущих значений, т. е. ряд цен представляет собой «случайное блуждание», или, в более узкой трактовке, доходы от инвестиций в ценные бумаги не имеют серийной корреляции, и распределения их вероятностей инвариантны во времени.

Многочисленные эмпирические исследования (Л. Башелье, Ю. Фама, Р. Мертон и др.) убедительно свидетельствуют в пользу случайности изменений цен. В результате большинство исследователей в целом разделяют гипотезу рыночной эффективности в ее слабой форме, делая, однако, оговорку, что время от времени на рынках возникают отклонения от эффективного ценообразования, различные перекосы и модные поветрия, постепенно исчезающие в результате воздействия рыночных механизмов, которые приводятся в движение инвесторами, ищущими возможности обыграть рынок.

Однако кроме чисто спекулятивного интереса к прогнозированию котировок ценных бумаг перед исследователем динамики цены финансового актива ставятся задачи другого рода. Они связаны с управлением рисками финансовых инвестиций и финансами фирмы, дисконтированием стоимости активов, подверженных процентному или курсовому риску, расчетом стоимости производных инструментов, определением приведенной ценности корпораций с учетом возможности менеджмента корректировать стратегию в условиях изменяющейся конъюнктуры.

Классическое теоретическое решение вопроса о характере эволюции цен финансовых активов опирается на гипотезу случайного блуждания и предложенную С. Россом концепцию отсутствия на рынке асимптотического арбитража. Оказывается, что при достаточно простых и очевидных предположениях логарифмические доходности имеют нормальное распределение, а цена финансового актива изменяется в соответствии с интуитивно понятной моделью геометрического броуновского движения. При этом стоимости производных определяются с помощью признанных финансовым сообществом формул Блэка – Шоулза – Мертона. Модель, предложенная Дж. Коксом, С. Россом и М. Рубинштейном и имеющая ряд привлекательных черт, прежде всего, возможность вовсе отказаться от использования вероятностей, фактически приводит к тому же результату.

Несмотря на это классическая модель гауссовского случайного блуждания давно признана неадекватно отражающей реальные данные (по крайней мере, для кратко- и среднесрочного периода). Оказалось, что эмпирические плотности распределений логарифмических доходностей не являются «нормальными». С одной стороны, они более вытянуты, более пикообразны в окрестности среднего значения, а с другой – хвосты эмпирических распределений более тяжелые, чем хвосты нормального распределения. Другой фактор – не объясняемые классической моделью эффекты, в частности, существование так называемых уровней поддержки и сопротивления. Для разрешения указанных трудностей исследователь может пойти двумя путями. Во-первых, вовсе отказаться от попыток построить теоретический случайный процесс, моделирующий изменение цен во времени, и обратить все внимание на эмпирические распределения, на которые и опираться при расчетах производных инструментов. Во-вторых, попытаться подобрать не столь очевидную математическую модель, которая лучше согласуется со статистическими данными. Второй путь, хотя и является более сложным, в перспективе может дать интересные результаты, которые гарантированно не окажутся подогнанными под конкретный исторический период на конкретном рынке.

Ставшая классической биномиальная модель предполагает, что цену финансового актива S_t в любой момент времени можно представить в виде $S_t = S_0 \cdot e^{x_t \ln u}$, где S_0 и u – константы, а x_t – некоторый базовый случайный процесс со значениями из множества целых чисел. В простейшем случае x_t представляет собой процесс случайного блуждания по целым числам с началом в нуле и переходами на единицу влево или вправо с вероятностями q и p соответственно, $q + p = 1$. Как отмечает А. Н. Ширяев в [1], биномиальная модель играет в финансовой математике роль, сходную со схемой Бернулли в классической теории вероятностей – будучи весьма простой, эта модель дает возможность полного расчета многих финансовых характеристик, например, справедливых цен опционов, хеджирующих стратегий и др.

Можно рассматривать и более сложные модели. Например, в работе [2] исследовалась модель геометрического случайного блуждания в случайной среде, где процесс x_t является случайным блужданием по целым числам, вероятности перехода влево или вправо которого случайны и зависят от текущей координаты блуждающей частицы. При определенных условиях поведение такого процесса становится нетипичным, и предельное распределение S_t не является логарифмически нормальным, что приводит, в частности, к необходимости применения неклассических методов ценообразования финансовых производных.

В настоящей работе приводятся результаты исследования соответствия статистических рыночных данных процессу геометрического случайного блуждания в случайной среде и классическому процессу геометрического броуновского движения. В частности, была проведена статическая проверка статических гипотез о виде распределения логарифмических доходностей, а также проанализированы причины возникновения «улыбок волатильности» и возможность их устранения путем применения модели ценообразования финансовых производных, опирающейся на предельное распределение геометрического случайного блуждания в случайной среде.

В основу рассматриваемой модели эволюции цен финансовых активов положим следующие ограничения:

1) в начальный момент времени $t = 0$ цена S_0 известна и является неслучайной величиной;

2) цена изменяется только в некоторые дискретные моменты времени $t = 1, 2, !$ по прошествии очередного единичного временного отрезка;

3) в каждый такой момент времени цена может измениться либо в u раз с вероятностью $p(z)$, зависящей от текущего значения z цены финансового актива, либо в $d = u^{-1}$ раз с вероятностью $1 - p(z)$, $d < 1 < u$;

4) изменения цены в каждый дискретный момент времени являются статистически независимыми.

Обозначим через S_t значение цены финансового актива в момент времени t. Тогда в соответствии с п. 3 ее значение в следующий момент времени $t + 1$ является случайной величиной с возможными значениями $S_{t+1} = S_t \cdot u$ и $S_{t+1} = S_t \cdot u^{-1}$ и вероятностями $p(S_t)$ и $1 - p(S_t)$ соответственно, зависящими как от параметра от текущего уровня цены S_t. Тогда вероятности траекторий рассматриваемого случайного процесса – изменения во времени стоимости актива S_t, $t = 0, 1, 2, >$, – определяются некоторой заданной последовательностью чисел $p(z)$, где аргумент z принимает всевозможные значения цены финансового актива. Ниже эта последовательность будет определена и названа случайной средой. Очевидно, относительно большое значение $p(z)$ (большее 1/2) означает, что если текущее значение $S_t = z$, то в ближайший момент времени цена актива скорее вырастет, чем уменьшится; наоборот, относительно маленькое значение $p(z)$ обеспечивает бóльшую вероятность понижения цены, чем ее роста. Введение последовательности $p(z)$ вероятностей повышения и понижения цены позволяет определять уровни поддержки и сопротивления: так, например, зоне сопротивления может соответствовать несколько последовательных относительно малых значений $p(z)$ – вероятностей повышения цены. В результате вероятность преодоления такой зоны будет мала при движении цены снизу вверх.

Предположение о том, что вероятности изменения цены вверх и вниз могут быть различными для различных значений цены, фактически означает отказ от нейтральности вероятностей к риску. Не будем, однако, придавать этому обстоятельству слишком большого значения по двум следующим причинам. Во-первых, распределения случайных величин $p(z)$ можно задать так, что в среднем условие о нейтральности к риску будет выполняться, и, следовательно, построение арбитражной стратегии будет все равно невозможно (по крайней мере, наблюдения за ценой в течение любого конечного отрезка времени не позволят определить значения $p(z)$ и на их основе сформировать стратегию, ожидаемая доходность которой превысит среднюю по рынку). Во-вторых, предположение о нейтральности к риску слабо подтверждается практикой. Против него говорит хотя бы то, что заем ценными бумагами (для продажи без покрытия) оплачивается трейдерами обычно на тех же условиях, что и денежный заем (для маржинальной покупки бумаг), хотя в соответствии с общепринятыми теоретическими воззрениями уплата процентов за заем ценными бумагами не требуется, поскольку владелец получает необходимый доход вследствие повышения их стоимости. Наконец, использование арбитражной концепции означает исключение непредвиденных обстоятельств и мгновенную корректировку цен в результате анализа всевозможных событий на долгие годы вперед. Финансовые рынки, функционирующие в соответствии с нейтральными к риску вероятностями, – это теоретическая конструкция, некое идеальное приближение реального мира, которое никогда не достигается в реальности. В этом смысле рассматриваемая нами модель подобна ситуации на практике: она стремится к тому, что предписывается теорией в долгосрочном периоде.

Пусть $x_t = \log_u S_t/S_0 = \dfrac{\ln S_t/S_0}{\ln u}$. Полученный ряд $x(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, принимает значения из множества целых чисел, его начальное значение равно нулю, а вероятности перехода влево или вправо на единицу определяются его текущим значением. Такая модель в теории вероятностей получила название случайного блуждания в случайной среде по целым числам. Дадим формальное определение.

Допустим, что на отрезке $[0,1]$ с σ-алгеброй $\mathcal{B}$ борелевских подмножеств задано некоторое распределение вероятностей μ. Ijhklj Zgkl\hf *kemqZguo kj^* $(\Pi, \mathcal{F}_\Pi, \pi)$ назовем прямое произведение измеримых пространств:

$$(\Pi, \mathcal{F}_\Pi, \pi) = \prod_{x \in \mathbb{Z}} \left([0,1], \mathcal{B}, \mu \right).$$

Каждый элемент этого пространства будет соответственно средой *p*. Таким образом, среда $p = \{ p(x),\ x \in \mathbb{Z} \}$ является двусторонней последовательностью чисел из отрезка $[0,1]$. В силу задания пространства случайных сред последовательность $p(x)$ как функция от среды *p* является двусторонней последовательностью независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение μ.

Зафиксируем произвольную среду *p*. Пусть $\mathrm{T} = \{0, 1, > \}$ – множество значений параметра времени *t*, а множество целых чисел $\mathbb{Z}$ – фазовое пространство марковской цепи. Под kemqZcguf *emZbf* \ *kj^* *p* будем понимать однородную по времени цепь Маркова с пространством состояний $\mathbb{Z}$, временным пространством Т, начальным состоянием 0 и матрицей переходных вероятностей $A = \{ a_{xy},\ x, y \in \mathbb{Z} \}$, элементы которой определяются по следующей формуле:

$$a_{xy} = \begin{cases} p(x), & \text{если} \quad y = x+1, \\ 1 - p(x), & \text{если} \quad y = x-1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, $p(x)$ и $1 - p(x)$ определяют вероятности перехода блуждающей точки в соседние вершины справа и слева соответственно.

Обозначим через $X = \mathbb{Z}^{\mathrm{T}}$ пространство траекторий одномерных блужданий, а через $\mathcal{F}_X$ – σ-алгебру, порожденную цилиндрическими подмножествами X. Элемент пространства X будем обозначать символом $x(\cdot)$. Тогда случайное блуждание в среде p определяет на измеримом пространстве $(X, \mathcal{F}_X)$ вероятностное распределение Pr_p. В силу задания вероятностного пространства $(\Pi, \mathcal{F}_\Pi, \pi)$ нетрудно убедиться, что для любого $B \in \mathcal{F}_X$ функция $\mathrm{Pr}_p(B)$ измерима по *p*.

Введем обозначения: $\Omega = \Pi \times X$, $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_\Pi \times \mathcal{F}_X)$. На полученном измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ зададим вероятностную меру P следующим образом: для любых $C \in \mathcal{F}_\Pi$, $B \in \mathcal{F}_X$

$$\mathrm{P}(C \times B) = \int_C \mathrm{Pr}_p(B) \, \pi(dp).$$

Построенное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ принято считать hkgh\guf *jhylghklguf ijhklj Zklhf*. Тогда kemqZcguf *emZbf* \ *kemqZghc kj^* x_t

называется случайный процесс, заданный на основном вероятностном пространстве по следующему правилу:

$$x_t(\omega) = x(t), \quad \omega = \left(p, x(\cdot)\right) \in \Omega\,, \ t \in \mathrm{T}.$$

Следует заметить, что хотя для каждой среды p случайное блуждание в среде p является цепью Маркова, сам процесс случайного блуждания в случайной среде не обладает марковским свойством. Однако в силу задания вероятностной меры P нетрудно убедиться, что условное распределение случайного блуждания в случайной среде относительно фиксированной среды p есть распределение $\Pr_p$ случайного блуждания в среде p π-почти наверное. Поэтому принято говорить, что случайное блуждание обладает каким-либо свойством, характерным для марковских цепей, если для почти каждой среды p (относительно π) это свойство имеет место для случайного блуждания в среде p. Например, случайное блуждание в случайной среде возвратное, если возвратным является случайное блуждание в почти каждой среде p (это означает, что начальное состояние 0 принадлежит возвратному классу существенных состояний).

Возвращаясь к моделированию процесса изменения цены финансового актива, заметим, что обратный переход от процесса x_t к процессу S_t осуществляется по следующей формуле:

$$S_t = S_0 \exp\left(x_t \ln u\right).$$

Таким образом, по аналогии, как из обычного случайного блуждания можно получить процесс геометрического случайного блуждания, построенный процесс случайного блуждания в случайной среде x_t определяет процесс S_t, моделирующий динамику изменения цены финансового актива относительно известной начальной цены S_0 и обладающий рядом свойств, перечисленных выше в форме основных параметров рассматриваемой модели. Такой случайный процесс назовем]_hf_ljbq_kdbf *kemqZguf [emZbf_* \ *kemqZghc kj^* .

Очевидно, что свойства процесса S_t полностью определяются свойствами случайного блуждания в случайной среде x_t, которое достаточно хорошо изучено. Остановимся на некоторых наиболее важных результатах в этой области.

Обозначим через $d = \mathrm{M}\left[\ln\dfrac{1-p(x)}{p(x)}\right]$ среднее логарифма отношения вероятностей перехода влево и вправо соответственно. Здесь M означает математическое ожидание по вероятности π. Ф. Соломон выписал для построенной модели случайных блужданий в случайной среде следующий критерий возвратности [3]:

1. Если $d < 0$, то случайное блуждание в случайной среде невозвратное и $\lim\limits_{t\to\infty} x_t = +\infty$ P - п. н.

2. Если $d = 0$, то случайное блуждание в случайной среде возвратное и $\mathrm{P}\left\{\liminf\limits_{t\to\infty} x_t = -\infty,\ \limsup\limits_{t\to\infty} x_t = +\infty\right\} = 1$.

3. Если $d > 0$, то случайное блуждание в случайной среде невозвратное и $\lim_{t\to\infty} x_t = -\infty$ P - п. н.

В той же работе показано, что условие

$$r = \mathrm{M}\left[\frac{1-p(x)}{p(x)}\right] < 1 \qquad (1)$$

является необходимым и достаточным для того, что случайное блуждание в случайной среде обладало эффективным линейным сносом:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_t}{t} = a \quad \text{P - п. н., где } a = \frac{1-r}{1+r} > 0.$$

Из выписанного критерия линейного сноса, в частности, вытекает, что если

$$r^{-1} \le 1 \le r, \qquad (2)$$

то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_t}{t} = 0 \quad \text{P - п. н.}$$

М. В. Козловым [4] было замечено, что при таком условии для невозвратных случайных блужданий в случайных средах поведение этого процесса существенно отличается от обычных случайных блужданий на $\mathbb{Z}$. В более общей ситуации Г. Кестен, М. В. Козлов и Ф. Спитцер [5] доказали, что при $d < 0$, условии (2) и некоторых дополнительных предположениях для подходящего $\theta \in (0,1)$ величина $t^{-\theta}x_t$ при $t \to \infty$ имеет предельное распределение. Это означает, что случайное блуждание с P - вероятностью 1 стремится к $+\infty$, но смещение блуждающей точки в бесконечность происходит аномально медленно. С другой стороны, в той же работе [5] показано, что если

$$\mathrm{M}\left[\left(\frac{1-p(x)}{p(x)}\right)^2\right] < 1, \qquad (3)$$

то найдутся положительные константы a и σ, для которых $\frac{x_t - at}{\sigma\sqrt{t}}$ сходится при $t \to \infty$ по распределению (относительно P) к гауссовской случайной величине с нулевым средним и дисперсией 1. Таким образом, соотношение (3) является условием применимости центральной предельной теоремы к случайным блужданиям в случайной среде, а значит, и условием классического поведения динамики логарифма цены финансового актива, моделируемой геометрическим случайным блужданием в случайной среде.

Наиболее интересным является случай построенной модели, когда

$$d = 0, \quad 0 < \mathrm{M}\left[\ln^2\frac{1-p(x)}{p(x)}\right] = \gamma^2 < +\infty.$$

В этой ситуации координата движения случайного блуждания растет еще медленнее, чем при условии (1). Я. Г. Синай [6] доказал существование предельного распределения при $t \to \infty$ для нормированной координаты $x_0(t) = \dfrac{x_t}{(\gamma \cdot \ln t)^2}$ случайного блуждания в случайной среде. Им было обнаружено, что при $t \to \infty$ распределение вероятностей для $x_0(t)$ становится локализованным в сколь угодно малой окрестности некоторой точки $m_0(t)$, зависящей только от момента времени t и реализации среды p. Явное выражение предельного распределения для $x_0(t)$ и $m_0(t)$ было найдено А. О. Голосовым [7] и Г. Кестеном [8] и оказалось отличным от гауссовского, а именно для $m_0(t)$ справедливо

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\left\{m_0(t) \le u\right\} = \int_{-\infty}^{u} h(s)\,ds,$$

$$h(s) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \exp\left(-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{8}|s|\right). \tag{4}$$

Обозначим через ψ случайную величину, имеющую плотность $h(s)$. Тогда случайная величина $|\psi|$ – абсолютное значение ψ имеет преобразование Лапласа

$$\varphi(t) = \mathrm{M}\left[-t|\psi|\right] = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{2t} - 1}{t \operatorname{ch}\sqrt{2t}}.$$

Распределение с плотностью (4) имеет математическое ожидание 0 и дисперсию 61/45. Для того чтобы его нормировать, достаточно ввести поправку на значение математического ожидания a и среднего квадратического отклонения σ в вернем пределе интегрирования:

$$S(u, a, \sigma) = \int_{-\infty}^{\frac{u-a}{\sigma\sqrt{\frac{45}{61}}}} h(s)\,ds. \tag{5}$$

Многочисленные исследования свидетельствуют, что распределение эмпирических логарифмических доходностей существенно отличается от нормального. В частности, эмпирическое распределение характеризуется большим эксцессом (т. е. большей частотой значений вблизи математического ожидания) и более «тяжелыми хвостами» (т. е. большей частотой экстремально больших отклонений). Типичная гистограмма распределения эмпирических доходностей и аппроксимирующая «нормальная» кривая с теми же математическим ожиданием и дисперсией приводятся на рис. 1.

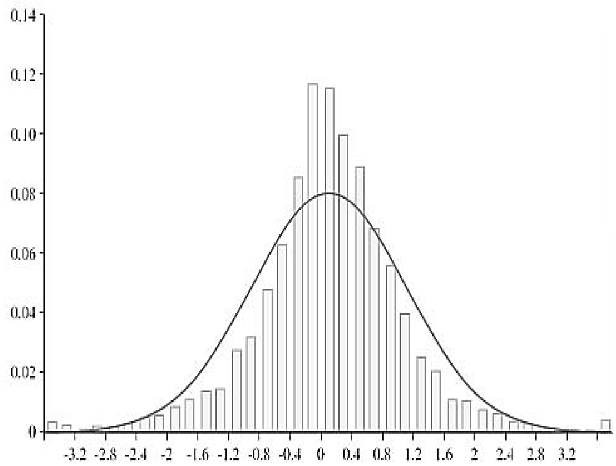


Рис. *1*. Эмпирическое распределение логарифмических доходностей

На рис. 2 показаны графики плотности нормированного нормального распределения и предельного распределения случайного блуждания в случайной среде (5) с математическим ожиданием, равным 0, и единичной дисперсией. На рисунках видно, что распределение (5) благодаря более высокому пику и большим вероятностям экстремальных значений предположительно лучше подходит для описания распределения доходностей на фондовом рынке. Случайная величина, имеющая распределение (5), принимает значения, отличающиеся от математического ожидания более чем на 3σ, с вероятностью приблизительно 0,0139, т. е. в 5,14 раза чаще, чем нормально распределенная случайная величина.

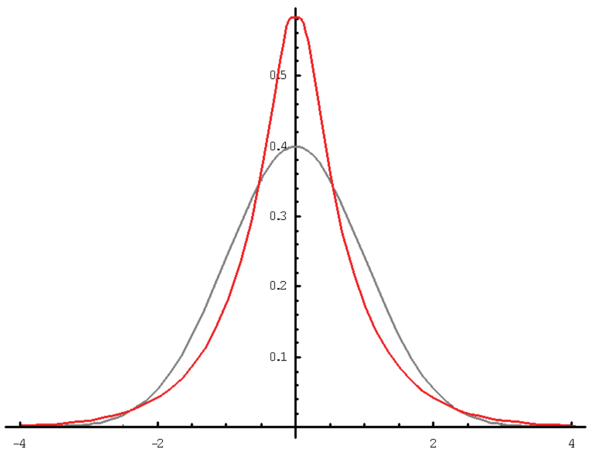


Рис. *2*. Плотности распределения случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение и предельное распределение (5)

Для объективной оценки вида распределения исторических доходностей была проведена серия статистических тестов ценовых данных различных финансовых активов: акций российских эмитентов, валют, индексов акций. Установление соответствия выборочных данных проверяемому гипотетическому распределению проводилось с помощью критерия согласия Колмогорова: для каждого ряда логарифмических доходностей (в точках, где эмпирическая функция распределения претерпевает разрыв) определялась статистика – величина $D_n = \max\left|F^*(x) - F(x)\right|$, представляющая собой модуль максимального отклонения выборочной (эмпирической) функции распределения $F^*(x)$ от гипотетической (теоретической) функции распределения $F^*(x)$. Как известно, при большом объеме выборки $n \gg 1$ независимо от вида закона распределения анализируемой случайной величины случайная величина $z = \sqrt{n}D_n$ имеет асимптотическую функцию распределения вида

$$K(z) = \mathrm{P}\left\{\sqrt{n}D_n < z\right\} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}(-1)^j \exp\left(-2j^2z^2\right) = 1 + 2\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^j \exp\left(-2j^2z^2\right).$$

Величина $\alpha = 1 - K(z)$ – уровень значимости – выступает основным показателем при принятии решения о том, принимается или отвергается гипотеза о равенстве эмпирического и гипотетического распределений. В табл. 1 представлены результаты тестирования статистических гипотез о том, что логарифмические доходности, вычисленные на основе значений индекса РТС (дневные данные) за различные периоды, соответствуют а) нормальному распределению и б) распределению (5) с соответствующими математическим ожиданием и дисперсией.

LZ[ebpZ *1.* **Тестирование гипотезы о виде распределения. Дневные данные. Индекс РТС**

Финансовый инструмент	Период данных	Количество значений в выборке	Нормальное распределение (уровень значимости)	Предельное распределение для СБСС (уровень значимости)
Индекс РТС	01.01.2000 – 31.12.2010	2 743	0,0000	0,0003
Индекс РТС	01.01.2006 – 31.12.2010	1 241	0,0000	0,0052
Индекс РТС	01.01.2008 – 31.12.2010	745	0,0000	0,0702
Индекс РТС	01.01.2009 – 31.12.2010	497	0,0494	0,9561

При анализе выборок большого объема обе гипотезы обнаруживают свою несостоятельность: эмпирическая функция распределения значимо отличается как от нормального распределения, так и от распределения (5). Уменьшая объем выборки, мы снижаем точность анализа и получаем приемлемые результаты. Так, при объеме выборки 745 (дневные данные за три года) гипотеза о том, что эмпирическое распределение совпадает с предельным распределением (5), принимается при классическом уровне значимости 0,05. Гипотеза о нормальности распределения выборки на этом этапе однозначно отвергается. Во всех случаях функция распределения (5) гораздо лучше описывает исторические данные по сравнению с функцией нормального распределения. Аналогичные результаты дает анализ доходностей вычисленных на основе котировок обыкновенных акций ОАО «Газпром» и ОАО «НК „ЛУКОЙЛ“» за различные периоды.

В табл. 2 представлены результаты анализа котировок ряда акций российских эмитентов и валютных пар. Во всех случаях предельное распределение (5) на порядок лучше соответствует эмпирическим данным по сравнению с нормальным распределением. Следовательно, модель геометрического случайного блуждания в случайной среде, предложенная в работе [2], точнее описывает динамику цен финансовых активов, чем классическая модель геометрического броуновского движения.

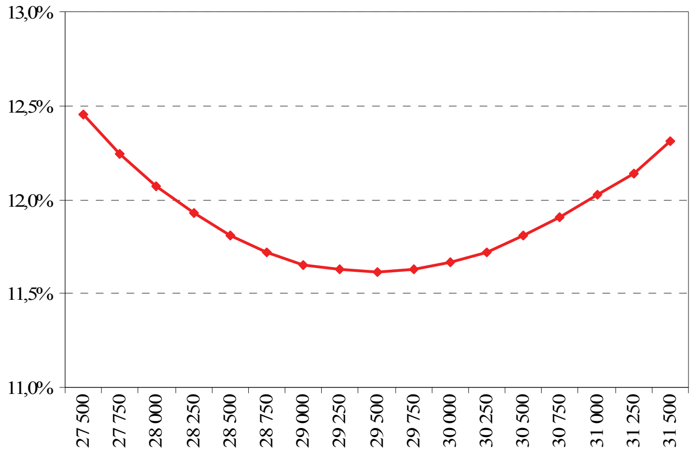
LZ[ebpZ *2.* **Тестирование гипотезы о виде распределения. Дневные данные. Акции российских эмитентов, курсы валют**

Финансовый инструмент (тикер ММВБ)	Период данных	Количество значений в выборке	Нормальное распределение (уровень значимости)	Предельное распределение для СБСС (уровень значимости)
GMKN	01.01.2008 – 31.12.2010	743	0,0000	0,0977
NLMK	01.01.2008 – 31.12.2010	742	0,0000	0,0420
SIBN	01.01.2008 – 31.12.2010	743	0,0000	0,1953
VTBR	01.01.2008 – 31.12.2010	743	0,0000	0,0365
CTLK	01.01.2009 – 31.12.2010	496	0,0003	0,2117
HYDR	01.01.2009 – 31.12.2010	496	0,0002	0,2060
MRKH	01.01.2009 – 31.12.2010	497	0,0041	0,0655
MTSI	01.01.2009 – 31.12.2010	497	0,0000	0,1784
OGK4	01.01.2009 – 31.12.2010	497	0,0000	0,0308
RASP	01.01.2009 – 31.12.2010	497	0,0001	0,2707
ROSN	01.01.2009 – 31.12.2010	497	0,0054	0,4207
SBER	01.01.2009 – 31.12.2010	497	0,0044	0,7371
SBERP	01.01.2009 – 31.12.2010	497	0,0008	0,0704
SNGS	01.01.2009 – 31.12.2010	497	0,0095	0,4992
TATN	01.01.2009 – 31.12.2010	497	0,0000	0,0973
TATNP	01.01.2009 – 31.12.2010	497	0,0004	0,4041
URSI	01.01.2009 – 31.12.2010	497	0,0073	0,3764
URSIP	01.01.2009 – 31.12.2010	497	0,0001	0,2305
EURCHF	01.01.2010 – 31.12.2010	364	0,0000	0,0024
EURJPY	01.01.2010 – 31.12.2010	364	0,0000	0,0059
USDCAD	01.01.2008 – 31.12.2010	832	0,0008	0,2328
USDJPY	01.01.2009 – 31.12.2010	728	0,0001	0,2118
USDRUB	01.07.2009 – 31.12.2010	508	0,0002	0,1110

Одной из задач исследования динамики цен финансовых активов является построение модели ценообразования производных финансовых инструментов, прежде всего опционов (поскольку опционная премия существенно зависит от предположения о распределении цены базового актива). Классическая модель Блэка – Шоулза получила всеобщее признание и распространение, однако практика ее применения выявила некоторые недостатки: складывающиеся на рынке цены порой существенно отличаются от предписываемых теорией. В результате исследований был обнаружен эффект, получивший название «деформации» или «улыбки волатильности». Его суть состоит в следующем: теоретические модели, используемые для оценки стоимости опционов, на входе используют ряд известных параметров (например, текущая цена базового актива, число дней до истечения опциона) и один ключевой неизвестный параметр: волатильность рынка в период до истечения опционного контракта. Поскольку этот параметр неизвестен, приходится предполагать, что будущая волатильность будет равна волатильности в недавнее время (исторической волатильности). Цена опциона, получаемая на основе этой предпосылки, обычно и считается справедливой ценой. Соответственно, если рыночная цена опциона выше, чем его справедливая стоимость, то опцион переоценен, а если она ниже справедливой стоимости, то он недооценен. Иная интерпретация отличия рыночной цены опциона от его справедливой стоимости заключается в том, что рынок прогнозирует величину волатильности в период, остающийся до истечения опциона. Этот прогноз, разумеется, будет отличаться от прошлой волатильности. Расчетная волатильность, соответствующая рыночной цене, называется подразумеваемой волатильностью. В некотором смысле подразумеваемая волатильность является констатацией того, что считают справедливой ценой для будущей волатильности все игроки, находящиеся на рынке и подавшие свои голоса.

Под «деформацией» волатильности понимается ситуация, когда опционы с jZa-*gufb* страйками торгуются с различными подразумеваемыми (прогнозируемыми) волатильностями. Отметим, что путы и коллы с hbgZdh\ufb страйками должны торговаться с одинаковыми прогнозируемыми волатильностями, иначе конверсионный или обратный конверсионный арбитраж сведут расхождение на нет. Однако соответствующего арбитража для случая коллов и путов с разными страйками не существует. Поэтому деформацию волатильности устранить не удается.

График подразумеваемой волатильности стоимости опциона, зависящий от цены акции, называется «улыбкой волатильности». Зависимость подразумеваемой волатильности от цены исполнения для опционов на фьючерсный контракт на курс рубль/доллар с исполнением 15.06.2011 г., обращающихся на FORTS, вычисленная по расчетным ценам за 10.03.2011 г., приведена на рис. 3. Такая «улыбка волатильности» согласно [9] является типичной для валютного рынка. Волатильность валютных опционов «около денег» относительно невелика, однако чем больший выигрыш или проигрыш приносит опцион, тем большей становится волатильность. Таким образом, опционы колл и пут со страйками, существенно отличающимися от текущей цены базового актива, стоят относительно дороже опционов из центральных серий.



Jbk. *3.* «Улыбка волатильности» для опционов на фьючерсный контракт на курс рубль/доллар

Изображенная на рис. 3 «улыбка волатильности» возникает, поскольку инвесторы оценивают вероятности значительных и экстремальных изменений валютного курса выше, чем предписывается классической моделью. Можно показать, что распределение риск-нейтральных вероятностей цены базового актива в момент завершения опциона, соответствующее «улыбке волатильности», изображенной на рис. 3, должно быть схожим с предельным распределением случайного блуждания в случайной среде (5), плотность которого изображена на рис. 2. Для этого рассмотрим опцион колл «глубоко вне денег» (опцион с большим проигрышем). Этот опцион окупается, только если валютный курс существенно увеличивается, а вероятность этого события для предельного распределения (5) выше, чем для нормального распределения (из-за относительно более «тяжелых хвостов»). Следовательно, можно ожидать, что цена такого опциона O_1, вычисленная на основе исторической волатильности с использованием предельного распределения (5), будет выше по сравнению с ценой того же опциона O_2, вычисленной по классической формуле Блэка – Шоулза при том же значении волатильности. Поскольку рыночная цена такого опциона оказывается выше теоретической цены O_2, для ее обоснования с помощью классической модели приходится искусственно завышать применяемый в традиционном расчете параметр волатильности, что и приводит к возникновению «улыбки волатильности». Напротив, использование предельного распределения (5) должно устранить или, по крайней мере, снизить различия в подразумеваемых волатильностях для различных страйков опционов.

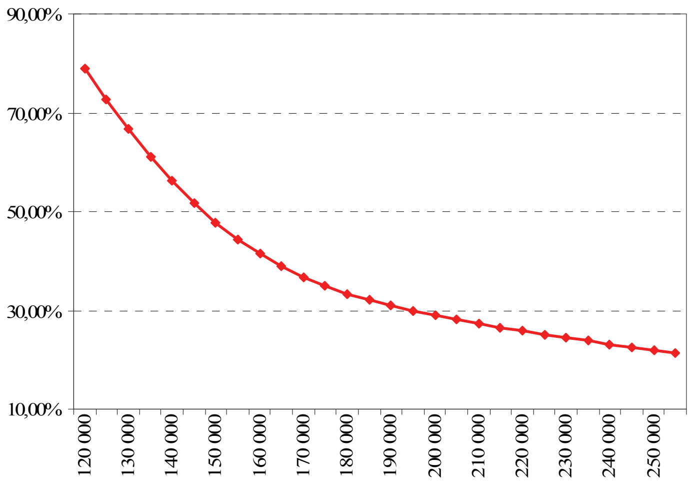


Рис. 4. «Улыбка волатильности» для опционов
на фьючерсный контракт на индекс РТС

Зависимость подразумеваемой волатильности от цены исполнения для опционов на фьючерсный контракт на индекс РТС с исполнением 15.06.2011 г., обращающихся на FORTS, вычисленная по расчетным ценам за 01.03.2011 г., приведена на рис. 4. Такая «улыбка волатильности» является типичной для фондового рынка (как для отдельных акций, так и для фондовых индексов). При увеличении цены исполнения волатильность уменьшается. Такой «улыбке волатильности» соответствует асимметричное распределение с «тяжелым левым хвостом»: при использовании такого распределения стоимость опциона со страйком ниже текущей цены базового актива оказывается выше стоимости того же опциона, вычисленной на основе предположения о логнормальном распределении. Для опционов с высокими страйками такого перекоса не возникает. Как подчеркивается в [9], зависимость, представленная на рис. 4, наблюдается только после краха фондового рынка США в октябре 1987 года. До этого времени подразумеваемая волатильность намного меньше зависела от цены акции. Это позволило Марку Рубинштейну предположить, что одной из причин такой «улыбки волатильности» является «крахофобия». Трейдеры боятся повторения октябрьских событий 1987 года и соответственно оценивают опционы.

Список литературы

1. Rbjy_\ *: . G*. Основы стохастической финансовой математики : в 2 т. – М. : Фазис, 1998. – Т. 1 : Факты. Модели. – 512 с.
2. ?jfZdh\ *F . X .*, *Ezlqbdh\ : . <.*, *Nzhjh\ L. X* . Предельное распределение для геометрического случайного блуждания в случайной среде // Вестн. Удмурт. ун-та. – 2007. – № 1. – С. 37–54.
3. *Solomon*, *F*. Random walks in a random environment // The Annals of Probability. – 1975. – Vol. 3, nr 1. – Pp. 1–31.
4. Dhaeh\ *F .* <. Блуждания в одномерной случайной среде // Теория вероятностей и ее применения. – 1973. – Т. 18, вып. 2. – С. 406–408.
5. *Kesten*, *H.*, *Kozlov*, *M. V.*, *Spitzer*, *F.* A limit law for random walks in a random environment // Compositio Mathematica. – 1975. – Vol. 30, nr 2. – Pp. 145-168.
6. KbgZc *Y.* =. Предельное поведение одномерного случайного блуждания в случайной среде // Теория вероятностей и ее применения. – 1982. – Т. 27, вып. 2. – С. 247–258.
7. =hehkh\ *: . H*. О локализации случайного блуждания в случайной среде // Успехи мат. наук. – 1984. – Т. 39, № 2. – С. 145–146.
8. *Kesten*, *H*. The limit distribution of Sinai’s random walk in a random environment // Physica A: Statist. Mech. a. its Applications. – 1986. – Vol. 138, Iss. 1-2. – Pp. 299-309.
9. OZee > *. D*. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты / пер. с англ. и ред. Д. А. Клюшина. – 6-е изд. – М. : Вильямс, 2008. – 1056 с.

***

T. Yu. Fedorov, Postgraduate Student, Udmurt State University

Application of geometric random walk in random environment model to the description of financial time series

The asymptotical properties of the stochastic process called geometrical random walk in a random environment are considered. The density and Laplace transform of its limit distribution are found. It is shown that the limit distribution of the constructed random process describes empirical distributions of returns on a stock market more accurately in comparison with the normal distribution.

Keywords: geometric random walk in random environment, limit distribution, financial time series, logarithmic returns

Получено: 13.04.11