или, преобразуя, будем иметь

$$P_{\text{кр}} = \delta\sigma_p + \frac{E}{2}\frac{h_{\text{сж}}^2}{h}\left[\operatorname{tg}\beta + f\sin^2\beta + \mu\left(f + \cos^2\beta\right)\right]. \qquad (7)$$

При условии $n \neq 1$ в выражении (4) значение усилия $P_{\text{сж}}$ должно определяться на следующем основании:

$$dP_{\text{сж}} = \sqrt[n]{\frac{E}{h}\left(h_{\text{сж}} - \frac{x}{tg\beta}\right)}dx\ ;$$

$$P_{\text{сж}} = \int_0^{h_{\text{сж}}\operatorname{tg}\beta}\left[\frac{E}{h}\left(h_{\text{сж}} - \frac{x}{\operatorname{tg}\beta}\right)\right]^{\frac{1}{h}}dx,$$

следовательно,

$$P_{\text{сж}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\left(\frac{E}{h}\right)^{\frac{1}{n}} h_{\text{сж}}^{1+\frac{1}{n}}\operatorname{tg}\beta\,. \qquad (8)$$

Наиболее важным следствием из выражений (5) и (8) является то, что усилие $P_{\text{сж}}$ находится в сложной зависимости от $h_{\text{сж}}$, т. е. от величины внедрения лезвия в материал, при которой на его режущей кромке возникает разрушающее напряжение $\sigma_{\text{р}}$.

Усилие $P_{\text{кр}}$ характеризует основную взаимосвязь между наиболее важными конструктивными, физико-механическими и некоторыми режимными параметрами, управляющими процессом резания.

УДК 519.863

Е. Н. Тарасова, соискатель
Г. З. Муратова, соискатель
В. А. Тененёв, доктор физико-математических наук, профессор
Ижевский государственный технический университет

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОРПОРАТИВНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФИНАНСОВО-ПРОМЫШЛЕННОЙ СИСТЕМЫ НА ОДНОРОДНОМ РЫНКЕ

Рассмотрена экономико-математическая модель конкуренции предприятий в составе финансово-промышленной системы на однородном рынке сбыта. Приводится формулировка соответствующей задачи многокритериальной оптимизации с интегральными целевыми функциями, в которой динамика развития описывается системой дифференциальных уравнений. Дана экономическая интерпретация полученных результатов.

В работе [1] предложена схема и построена замкнутая математическая модель корпоративного взаимодействия участников финансово-промышленной системы. Рассмотрим модель открытого типа, в которой более полно описано калькулирование себестоимости продукции и учтена возможность производителей влиять на отпускную цену.

Уместно сделать ряд предварительных замечаний.

1. Конкуренция имеет место между производителями взаимозаменяемых (и даже однотипных) товаров. Допустим, в данном случае речь идет о производстве и реализации на рынке одного вида товара.

2. Предположим, что имеет место ситуация, когда цена на производимый товар контролируется либо государством, либо структурами его заменяющими, поэтому в течение рассматриваемого периода будем считать ее постоянной и не зависящей от интересов участников конфликта.

3. Важным фактором конкуренции является качество товара. Однако само понятие «качество» включает множество факторов: долговечность, прочность, удобство в эксплуатации, эстетика и т. п. В разных слоях общества шкала предпочтения этих свойств различна. Важную роль при этом играет цена продукта, так что потребитель ориентируется не на само качество, а на отношение цены к качеству. В результате в каждом слое общества, в котором потребители имеют примерно одинаковые накопления (и/или доходы), живут в одинаковых условиях и имеют одинаковую шкалу предпочтений, конкурируют фирмы, производящие однотипные товары (сходные по цене и качеству). Производители товаров другого качества (и цены) конкурируют в другой рыночной нише.

В состав модели входят n предприятий $A_1, ..., A_n$, производящих продукцию П, m предприятий $B_1, ..., B_m$, потребляющих продукцию предприятий A_1, …, A_n, и банк-кредитор Б.

Будем считать, что для усовершенствования производства и увеличения выпуска продукции каждого i-производителя используются банковские кредиты и реинвестированные средства только i-го предприятия-производителя. Также допустим, что банк Б, владеющий частью акций предприятий $B_1,...,B_m$, заинтересован в совместной деятельности с предприятиями этой структуры.

Описание математической модели

Участники взаимодействуют в течение конечного непрерывного отрезка времени $[0,T]$.

Пусть $y_i(t)$ – объем производимого предприятием A_i продукта П;

$c_i(t)$ – полная себестоимость одной единицы продукта;

$p_i(t)$ – отпускная цена продукта П;

p_0 – рыночная цена, причем $c_i(t) \le p_i(t) \le p_0$;

$V_i(t)$ – объем реинвестированных средств, направленных i-м предприятием на расширение производства;

$K_i(t)$ – объем кредитных средств, выделенных банком под процент τ, который не больше, чем процент другого внешнего банка;

$W(t)$ – свободный банковский ресурс, который банк может использовать на кредитование производителей A_i на условиях τ либо на приобретение доли $\omega_j(t)$ акций предприятий B_j на сумму $\Omega_j(t)$, причем

$$W(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i(t) + \sum_{j=1}^{m} \Omega_j(t); \tag{1}$$

α_j^o – доля акций предприятия B_j, принадлежащая банку в начальный момент времени.

Динамика изменения системы описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i(t) = K_i(t) + V_i(t), \quad i = 1, ..., n, \tag{2}$$

где $x_i(t)$ – количество фондов i-го производителя, выраженное в денежных единицах.

Известно количество фондов предприятия в начальный момент времени:

$$x_i(0) = x_i^0. \tag{3}$$

Фонды предприятия складываются из оборотных фондов в объеме $Pez \cdot x_i(t)$ и основных фондов, равных $(1 - Pez) \cdot x_i(t)$.

Предполагается мгновенное освоение капиталовложений, отсутствие временного лага между осуществлением затрат и началом функционирования производственных фондов.

Полную себестоимость единицы продукции определим следующим образом:

$$c_i(t) = \frac{(1+n_1)\eta_i L_i(t) + n_2(1-Pez)\,x_i(t) + A_i(t) + O_i(t) + n_{5i}S_i + \tau K_i(t)}{y_i(t)} +$$

$$+ d_i(t) + \sum_{l=1}^{k} g_{il}(t) r_{il}(t), \tag{4}$$

где $i \in \{1, ..., n\}$ – номер предприятия-производителя продукции; k – количество видов комплектующих и материалов; $\eta_i L_i(t)$ – затраты на заработную плату с учетом единого социального налога; n_1 – ставка единого социального налога 26 % от фонда заработной платы; n_2 – ставка налога на имущество (обычно ≤ 2,2 %); $A_i(t)$ – амортизационные отчисления; $g_{il}(t)$ – цена одной единицы l-го вида сырьевого ресурса, используемого при производстве i-м производителем; $d_i(t)$ – стоимость хранения единицы производимого продукта; $O_i(t)$ – прочие расходы, связанные с оплатой электроэнергии, прочих коммунальных услуг и т. д.; S_i – кадастровая стоимость земельного участка, находящаяся в собственности i-го предприятия; n_{5i} – ставка земельного налога (будем считать равной 1,5 %); $r_{il}(t)$ – количество l-го вида комплектующих и материалов, необходимых для производства единицы продукции i-му производителю, тогда $\sum_{l=1}^{k} g_{il}(t) r_{il}(t)$ – затраты на комплектующие и материалы.

Амортизационные отчисления изменяются пропорционально основным фондам:

$$A_i(t) = \theta_i (1 - Pez)\, x_i(t). \tag{5}$$

Отпускную цену единицы продукции i-м производителем j-му потребителю зададим следующим образом:

$$p_i(t) = c_i(t) + \xi_i [p_0 - c_i(t)], \; 0 \le \xi_i \le 1. \tag{6}$$

Предприятие B_j покупает продукцию П у производителей в объеме $Y_j(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}y_i(t)$, где $\alpha_{ij}y_i(t)$ – количество продукта, покупаемого j-м потребителем у i-го производителя, $\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\le 1$.

Обозначим через $z_i(t)=y_i(t)\left(1-\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\right)$ объем продукта П, нереализованного i-м производителем в момент времени t.

Прибыль i-го производителя в момент времени t состоит из выручки от продажи продукта П за вычетом производственных издержек, расходов на хранение нереализованного товара и расчетам по кредитам. Прибыль банка Б в момент времени t есть сумма процентов по кредитам предприятий A_i и отчислений от прибыли предприятий B_j, соответствующих доле, которой к данному моменту времени владеет банк. Прибыль предприятия B_j в момент времени t определяется объемом денежных средств, полученных от продажи продукции П с учетом выплаченных процентов банку Б, а также расходов, связанных с выплатой заработной платы персоналу и арендных платежей.

Тогда

$$\pi_{A_i}(x_i(t),y_i(t))=(1-n_3)\big((p_i(t)-c_i(t))(y_i(t)-z_i(t))-z_i(t)d_i(t)-K_i(t)\big),\ i=1,...,n; \quad (7)$$

$$\pi_{Bj}(X(t),Y_j(t))=(1-n_3)\left[\left(1-q_j^0(t)\right)\sum_{i=1}^{n}\big((p_0-p_i(t))\alpha_{ij}y_i(t)\big)-Ar_j(t)-(1+n_1)\gamma_j\Lambda_j(t)\right]$$

$$q_j^0(t)=\alpha_j^0+\omega_j(t),\ \ j=1,...,m; \quad (8)$$

$$\pi_{\text{Б}}(X(t),Y(t))=(1-n_3)\tau\sum_{i=1}^{n}K_i(t)+(1-n_4)\sum_{j=1}^{m}q_j^0(t)\pi_{B_j}(X(t),Y_j(t)), \quad (9)$$

где $X(t)=(x_1(t),...,x_n(t));\ Y(t)=(Y_1(t),...,Y_m(t))$;

n_3 – ставка налога на прибыль 20 %;

$Ar_j(t)$ – арендная плата предприятия B_j;

$\gamma_j\Lambda_j(t)$ – затраты на заработную плату с учетом единого социального налога (n_1 – ставка единого социального налога 26 % от фонда зарплаты);

n_4 – ставка налога на прибыль, полученную от выплаты дивидендов (9 %).

Пусть $J_{A_i}(T),J_{B_j}(T),J_{\text{Б}}(T)$ – интегральные дисконтированные накапливаемые доходы соответственно предприятий-производителей A_i, предприятий-потребителей B_j и банка Б на отрезке [0,T]. Тогда задачи для участников имеют вид

$$J_{A_i}(T)=\int_0^T\left[\pi_{A_i}(x_i(t),y_i(t))-V_i(t)\right]e^{-\mu_{A_i}t}dt\to\max_{\substack{y_i(t)\in U\\ V_i(t)\in Z\\ \xi_i\in[0,1]}},\ \text{где}\ i=1,...,n; \quad (10)$$

$$J_{\text{Б}}(T)=\int_0^T\pi_{\text{Б}}\big(X(t),Y(t)\big)e^{-\mu_{\text{Б}}t}dt\to\max_{K_i(t)\in K}; \quad (11)$$

$$J_{B_j}(T)=\int_0^T \pi_{B_j}(X(t),Y_j(t))e^{-\mu_{B_j}t}dt \to \max_{\alpha_{ij}\in[0,1]},\ \text{где}\ j=1,\ldots,m. \quad (12)$$

Здесь $\mu_{A_i}, \mu_{B_j}, \mu_{Б}$ – коэффициенты дисконтирования; $y_i(t), V_i(t), \xi_i$ – управления i-го производителя; $K(t)=(K_1(t),\ldots,K_n(t))$ – управление банка; α_{ij} – управления j-го потребителя; Z, K, U – компактные множества; $K_i(t), V_i(t)$ – кусочно-непрерывные функции на K и Z соответственно.

Таким образом, предприятиям A_i необходимо, выбирая объем производства, объем реинвестированных средств, отпускную цену продукции в каждый момент времени t, перевести динамическую систему (2) из начального состояния (3) в конечное состояние в момент времени T таким образом, чтобы величина критерия оптимальности (10) была максимальной; предприятиям B_j необходимо выбрать объемы приобретаемого товара у различных предприятий A_i в каждый момент времени t так, чтобы величина критерия оптимальности (11) была максимальной; банк-кредитор должен выбирать объемы кредитов предприятиям A_i при ограничениях (1) в каждый момент времени t так, чтобы величина критерия оптимальности (12) была максимальной.

Решение данной задачи требует использования алгоритма решения задач многокритериальной оптимизации. Используем подход, основанный на применении генетических алгоритмов [2].

Результаты параметрических исследований

Рассматривается корпоративная структура, состоящая из двух предприятий-производителей A_1, A_2 продукта П, двух предприятий-потребителей B_1, B_2 этого продукта и банка-кредитора Б. Для производства продукта П используется два вида сырьевого ресурса. Кроме того, будем считать, что банк может владеть не более чем 40 % акций каждого предприятия B_j.

Пусть $p_0=2$; $\tau=0{,}1$; $T=12$; $W(t)=4$, $t\in[0,T]$; $\alpha_1^0=\alpha_2^0=0{,}1$; $\theta_1=\theta_2=0{,}005$; $k=2$; $\mu_{A_i}=\mu_{B_j}=\mu_{Б}=0$.

Пример 1

Рассмотрим ситуацию, когда предприятия находятся в равных условиях. Значения исходных данных указаны в табл. 1, 2, 3.

Таблица 1. **Исходные данные предприятий A_1, A_2**

Показатель	A_1	A_2
$\eta_i L_i(t)$	0,5	0,5
S_i	1,25	1,25
$d_i(t)$	0,1	0,1
$O_i(t)$	0,2	0,2
n_{i5}	0,15	0,15
x_i^0	100	100
Pez	0,5	0,5

Таблица 2. **Исходные данные предприятий B_1, B_2**

Показатель	B_1	B_2
$\gamma_i \Lambda_i(t)$	0,2	0,2
$Ar_j(t)$	0,2	0,2

Таблица 3. **Расход и стоимость сырья**

Показатель	A_1	A_2
$g_{i1}(t)$	0,6	0,6
$g_{i2}(t)$	0,6	0,6
$r_{i1}(t)$	0,5	0,5
$r_{i2}(t)$	0,5	0,5

В результате решения задачи многоцелевой оптимизации получены управляющие воздействия (рис. 1, 2, 3).

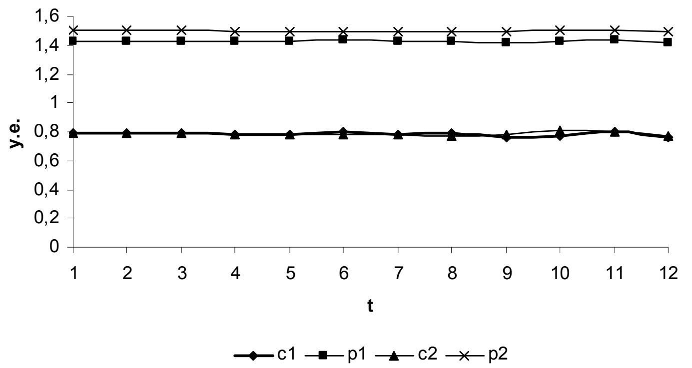

Рис. 1. Полная себестоимость c_i и отпускная цена p_i

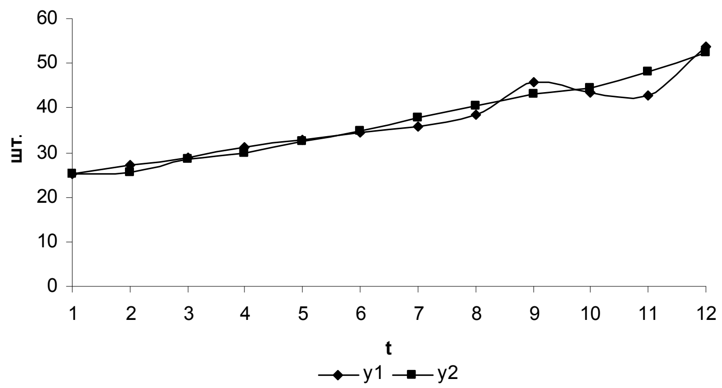

Рис. 2. Объем выпускаемой продукции предприятий A_i

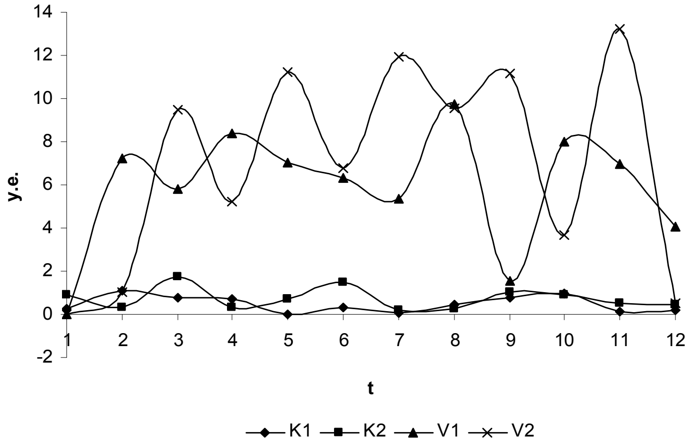

Рис. 3. Объемы реинвестированных средств $V_i(t)$ и полученных кредитов $K_i(t)$

Оптимизационная задача решена за 200 итераций. Полученная при численном решении интегральная накапливаемая прибыль предприятий A_1 и A_2 отличается несущественно, а именно: $J_{A_1} = 138{,}7634$, $J_{A_2} = 141{,}761$, так же как и предприятия-потребители получают за период времени T прибыль, равную $J_{B_1} = 103{,}3597$, $J_{B_2} = 108{,}1917$. Прибыль банка составила $J_Б = 72{,}7513$. Таким образом, общая рентабельность предприятий $R_{A_1} = 78$ %, $R_{A_2} = 74$ %.

Пример 2

Пусть теперь один из производителей A_1 имеет более масштабное производство, нежели другой A_2, кроме того, при производстве на обоих предприятиях используются одни и те же сырьевые ресурсы, закупаемые по одинаковой цене. Значения исходных данных указаны в табл. 4, 5, 6.

Таблица 4. **Исходные данные предприятий A_1, A_2**

Показатель	A_1	A_2
$\eta_i L_i(t)$	0,5	0,2
S_i	1,25	0,5
$d_i(t)$	0,1	0,1
$O_i(t)$	0,2	0,2
n_{i5}	0,15	0,15
x_i^0	100	70
Pez	0,5	0,6

Таблица 5. **Исходные данные предприятий B_1, B_2**

Показатель	B_1	B_2
$\gamma_i \Lambda_i(t)$	0,2	0,2
$Ar_j(t)$	0,2	0,2

Таблица 6. **Расход и стоимость сырья**

Показатель	A_1	A_2
$g_{i1}(t)$	0,6	0,6
$g_{i2}(t)$	0,6	0,6
$r_{i1}(t)$	0,5	0,5
$r_{i2}(t)$	0,5	0,5

В результате решения задачи многоцелевой оптимизации получены управляющие воздействия (рис. 4, 5, 6).

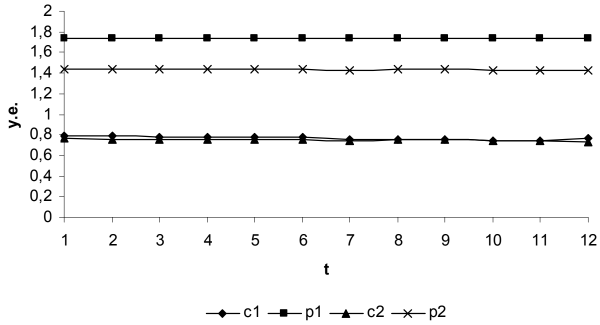

Рис. 4. Полная себестоимость c_i и отпускная цена p_i

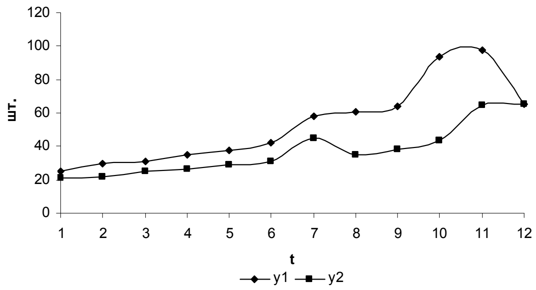

Рис. 5. Объем выпускаемой продукции предприятий A_i

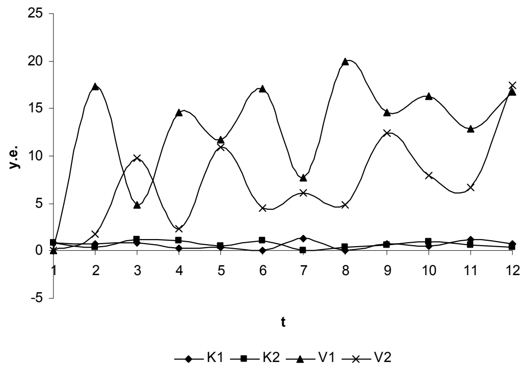

Рис. 6. Объемы реинвестированных средств $V_i(t)$ и полученных кредитов $K_i(t)$

Себестоимость продукции, производимой предприятиями A_1 и A_2, одинакова, но поскольку отпускная цена и объем производства предприятия A_1 больше соответствующих показателей предприятия A_2, то интегральная прибыль первого выше прибыли второго $\left(J_{A_1} = 335,3321,\ J_{A_2} = 135,0978\right)$. Заметим, что предприятие A_1 получило большую прибыль и его общая рентабельность составила $R_{A_1} = 128\ \%$, в то время как $R_{A_2} = 83\ \%$, т. е. в данных условиях конкурентной борьбы более эффективно работает предприятие A_1. Прибыль B_1 и B_2 в данной ситуации $J_{B_1} = 87,8055,\ J_{B_2} = 101,8857$. Прибыль банка $J_Б = 68,134$.

Пример 3

Пусть предприятие A_2 в условиях предыдущего примера кроме того выпускает продукт-заменитель, при производстве которого используются более дешевые сырьевые ресурсы. Значения исходных данных указаны в табл. 7, 8, 9.

Таблица 7. **Исходные данные предприятий A_1, A_2**

Показатель	A_1	A_2
$\eta_i L_i(t)$	0,5	0,2
S_i	1,25	0,5
$d_i(t)$	0,1	0,1
$O_i(t)$	0,2	0,2
n_{i5}	0,15	0,15
x_i^0	100	70
Рez	0,5	0,6

Таблица 8. **Исходные данные предприятий B_1, B_2**

Показатель	B_1	B_2
$\gamma_i \Lambda_i(t)$	0,2	0,2
$Ar_j(t)$	0,2	0,2

Таблица 9. **Расход и стоимость сырья**

Показатель	A_1	A_2
$g_{i1}(t)$	0,6	0,55
$g_{i2}(t)$	0,6	0,55
$r_{i1}(t)$	0,5	0,5
$r_{i2}(t)$	0,5	0,5

В результате решения задачи многоцелевой оптимизации получены управляющие воздействия (рис. 7, 8, 9).

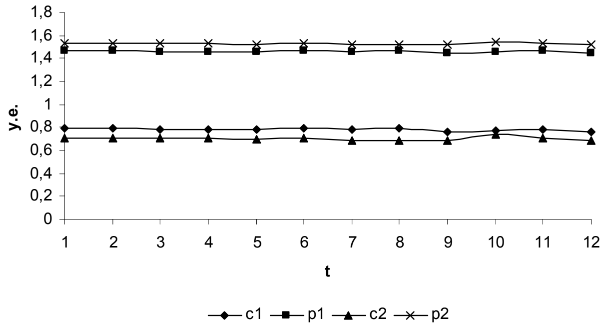

Рис. 7. Полная себестоимость c_i и отпускная цена p_i

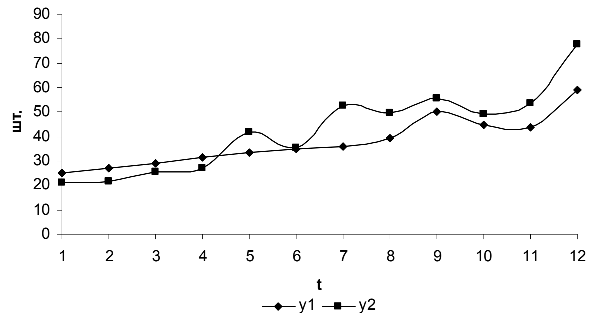

Рис. 8. Объем выпускаемой продукции предприятий A_i

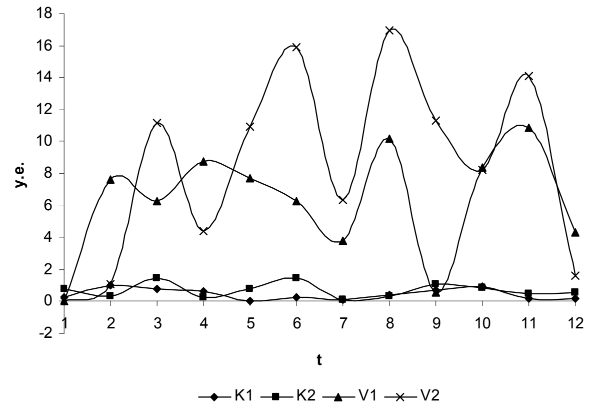

Рис. 9. Объемы реинвестированных средств $V_i(t)$ и полученных кредитов $K_i(t)$

В результате себестоимость продукции, производимой предприятием A_2, меньше и у него появляется возможность снизить отпускную цену, тем самым увеличивая объем продаж, что ведет к увеличению прибыли $\left(J_{A_1} = 153{,}8115,\ J_{A_2} = 189{,}6776\right)$. Заметим, что в этом случае предприятие A_2, общая рентабельность которого составила $R_{A_2} = 105\ \%$, получило и чистую прибыль, по абсолютной величине больше, нежели первое, рентабельность которого $R_{A_1} = 85\ \%$. То есть мелкому предприятию в условиях конкурентной борьбы выгоднее ориентировать свое производство на выпуск более дешевых аналогов. Прибыль B_1 и B_2 в данной ситуации $J_{B_1} = 98,4378,\ J_{B_2} = 114,8331$. Прибыль банка $J_Б = 74,2429$.

Список литературы

1. *Муратова, Г. З.* Модель оптимизации корпоративного взаимодействия элементов финансово-промышленной системы / Г. З. Муратова, Е. Н. Тарасова. – Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2008. – № 2 (15) – С. 146–163.

2. *Тененёв, В. А.* Решение задачи многокритериальной оптимизации генетическими алгоритмами // Интеллектуальные системы в производстве. – 2006 – № 2. – С. 103–109.

УДК 519.816

В. А. Тененёв, доктор физико-математических наук, профессор
А. В. Тененёва, студентка
Ижевский государственный технический университет

ПОСТРОЕНИЕ ПРОДУКЦИОННЫХ ПРАВИЛ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА

В статье предложен новый метод извлечения продукционных правил из данных для нечетких систем, основанный на иерархической кластеризации. Сравнение с известными методами показало возможность получения более компактных наборов непротиворечивых правил.

Метод нечеткого логического вывода [1] основан на введении некоторых правил-высказываний, ставящих результат в зависимость от условий. Условия и результат описываются лингвистическими переменными.

Связи, характеризующие нечеткую степень влияния входных переменных системы на выходную переменную, описываются нечеткими переменными, которые могут задаваться функциями принадлежности. Задание взаимосвязей между элементами с помощью функций принадлежности позволяет формировать продукционные модели в виде множества нечетких правил. Количественный результат взаимодействия между элементами определяется на основе нечеткого вывода.

Набор правил может формироваться на основе экспертных оценок. Представим нечеткое правило в виде $A \Rightarrow B$. Условие A в общем случае представлено в форме

$$if\,(x_1 \in A\ )\text{AND}...(x_j \in A_j)\text{AND}...(x_m \in A_m)\text{then}(y \in B_i)\,,$$

где $x_j, j = \overline{1,m},$ – входные переменные; $y(\mathbf{x})$ – выходная переменная; $A_j, j = \overline{1,m}, B$ – нечеткие множества состояний параметров системы или термы.

Каждому правилу соответствуют функции принадлежности условия и следствия. Функции принадлежности для всех переменных задаются на каждом терме $\left[\tau_k^L, \tau_k^R\right]$. Набор продукционных правил запишем в виде

$$R_r : if\ \bigcap x_i \in A_{ir}\ \text{ then }\ y\ \text{ is }\ B_r,\ r = 1, K_R\,. \quad (1)$$

Основной задачей при использовании систем нечеткого вывода является построение набора правил (1). Как уже отмечалось, для формирования набора правил,