УДК 539.1.07

*И. Н. Ефимов*, доктор технических наук, профессор
*Е. А. Морозов*, доктор технических наук, профессор
Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова
*К. М. Селиванов*, кандидат физико-математических наук, доцент
Пермский национальный исследовательский политехнический университет

# ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ*

*На основе формализма Гамильтона построена математическая модель, описывающая индукционное ускорение и прецизионную фокусировку заряженных частиц в аксиально-симметричном магнитном поле. Приведены результаты исследования фокусирующих свойств с использованием алгоритмов численного интегрирования, устойчивых к накоплению погрешности счета.*

**Ключевые слова:** заряженные частицы, аксиально-симметричное магнитное поле, математические модели, численное интегрирование, движение.

## Введение

В проектируемом индукционном ускорителе предполагается получить на мишени высокую плотность мощности потока заряженных частиц посредством прецизионной фокусировки. В этой связи возникает необходимость дальнейшего развития теории движения заряженных частиц в переменном магнитном поле, исследование его фокусирующих и ускоряющих свойств.

Математические модели движения заряженных частиц чаще всего строятся на основе формализма Лагранжа, в нерелятивистском случае – Ньютона [1–3]. При анализе движения частиц в переменном магнитном поле затруднение вызывает необходимость использования двух видов сил, магнитной силы, осуществляющей формирование траекторий частиц, и индукционной электрической силы, осуществляющей их ускорение.

В данной работе математическая модель строится в рамках релятивисткой механики [4] и формализма Гамильтона [5]. Использование векторного потенциала [6], как функции координат и времени, позволяет с единой позиции рассматривать ускоряющие и фокусирующие свойства поля. Другой особенностью использования Гамильтонова формализма является возможность построения для уравнений движения канонических алгоритмов численного интегрирования [7], устойчивых к накоплению погрешности счета.

## Уравнение Гамильтона для релятивисткой частицы

Пусть заданное векторным потенциалом $A$ магнитное поле линейно возрастает от нуля до некоторого значения $A_{\max}$ в течение времени $t_0$. Используя введенные константы, запишем безразмерные комбинации соответственно для времени, расстояния, векторного потенциала, также для импульса, скорости и энергии покоя частиц:

$$t^* = t \cdot t_0^{-1};\ r^* = r \cdot \rho_0^{-1};\ A^* = A \cdot A_{\max}^{-1};$$
$$p^* = p \cdot e^{-1} A_{\max}^{-1};\ v^* = v \cdot c^{-1};$$
$$E_0^* = mc \cdot e^{-1} A_{\max}^{-1}, \tag{1}$$

где $m$ – масса частицы; $e$ – ее заряд; $c$ – скорость света.

В работе [8] было показано, что движение частицы в заданных условиях будет складываться из движения вдоль стационарной траектории по закону:

$$\frac{d\varphi}{dt^*} = \frac{t_0 c}{\rho_0} \frac{p^*}{H_0^*}, \tag{2}$$

где $H_0^* = \sqrt{E_0^{*2} + p^{*2}}$ – безразмерная функция Гамильтона для частицы; $\varphi$ – угловая координата частицы и движения в плоскости, перпендикулярной стационарной траектории в линейном приближении по закону:

$$\frac{dP_x^*}{dt^*} = -f_0 \frac{\nabla_{x0} A^{*2}}{H^*} \cdot x;\quad \frac{dP_z^*}{dt^*} = -f_0 \frac{\nabla_z A^{*2}}{H} \cdot z;$$
$$\frac{dx^*}{dt} = f_0 \frac{P_x^*}{H^*};\quad \frac{dz^*}{dt^*} = f_0 \frac{P_z^*}{H^*}, \tag{3}$$

где $f_0 = t_0 c \cdot \rho_0^{-1}$; $x^*, z^*, P_x^*, P_z^*$ – безразмерные координаты и импульсы частиц в плоскости. Поставим задачу определения вида поля, обеспечивающего одновременную или, как говорят, двойную фокусировку частиц в направлениях $x, z$.

В работе [9] было показано, что бетатронное условие обеспечивает постоянство траекторий частиц при возрастании векторного потенциала во времени, следовательно, для исследования фокусирующих свойств достаточно рассмотреть фокусировку частиц в постоянном поле.

Пусть $A = A_{\max} = \text{const}$. В этом случае в (3) необходимо вернутся к размерному времени и записать в виде:

$$\frac{dP_x^*}{dt} = -\frac{c}{\rho_0 H^*} \nabla_{x0}^2 A^* \cdot x^*;\ \frac{dP_z^*}{dt^*} = -\frac{c}{\rho_0 H^*} \nabla_{z0}^2 A^* \cdot z^*;$$
$$\frac{dx^*}{dt} = \frac{c}{\rho_0 H^*} P_x;\quad \frac{dz^*}{dt} = \frac{c}{\rho_0 H^*} P_z, \tag{4}$$



* Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ, номер гос. регистрации 01201262557.

где $H^* = \sqrt{E_0^{*2} + P_x^{*2} + P_z^{*2} + A^{*2}}$ – функция Гамильтона; $x_0, y_0$ – начальные координаты.

Переходя в (4) к уравнениям второго порядка, получим:

$$\frac{d^2 x^*}{dt^2} = \left(\frac{c}{\rho_0 H^*}\right)^2 \nabla_{x0}^2 A^* \cdot x^*;$$
$$\frac{d^2 z^*}{dt^2} = \left(\frac{c}{\rho_0 H^*}\right)^2 \nabla_{z0}^2 A^* \cdot z^*. \quad (5)$$

Исследуем фокусирующие свойства векторного потенциала.

**Условие двойной фокусировки**

Выражения, стоящие перед переменными $x^*$, $z^*$ в правых частях (5), являются частотами линейных колебаний. Для двойной фокусировки необходимо выполнение условия кратности или синхронизации частот:

$$n^2 \nabla_{\rho 0}^2 A^* = \kappa^2 \nabla_{z0}^2 A^*, \quad n, \ \kappa = 1, 2, ... \quad (6)$$

В этом случае в некоторые моменты времени обе системы (5) будут одновременно проходить через положение равновесия. Запишем условие синхронизации в форме дифференциального уравнения:

$$\kappa^2 \nabla_{\rho 0}^2 A^* = -n^2 \nabla_{\rho 0}^2 A^2 - n^2 \nabla_{\rho 0}\left(\rho^{-1} A\right). \quad (7)$$

Интегрируя (7), получим выражение для векторного потенциала, обеспечивающего кратность частот колебаний:

$$A^* = x^{*\alpha}; \quad \alpha = \frac{n^2}{n^2 + \kappa^2}. \quad (8)$$

Используя уравнение $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ и переходя к размерным величинам, получим известную формулу [10] для индукции магнитного поля спектрометра:

$$B_z = B_0 \rho^\beta; \quad \beta = -\frac{\kappa^2}{n^2 + \kappa^2}. \quad (9)$$

Запишем динамические уравнения (5) для векторного потенциала (8):

$$\frac{d^2 x^*}{dt^2} = -\alpha \left(\frac{c}{\rho_0 H^*}\right)^2 \cdot x^*; \quad \frac{d^2 z^*}{dt^2} = -\alpha \left(\frac{c}{\rho_0 H^*}\right)^2 \cdot z^*. \quad (10)$$

Исследуем полученные уравнения.

**Прецизионная фокусировка частиц**

Подставляя в уравнение (2) значение векторного потенциала на равновесной траектории $A^* = 1$ и переходя к размерному времени, пишем:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{\rho_0 H_0^*}. \quad (11)$$

Поскольку углы вылета из источника предполагаются малыми, можно положить $H \approx H_0$ и, используя (11), перейти в (10) к уравнениям траекторий:

$$\frac{d^2 x^*}{d\varphi^2} = -\alpha \cdot x^*; \quad \frac{d^2 z^*}{d\varphi^2} = -\alpha \cdot z^*. \quad (12)$$

Интегрируя (12), с начальными условиями $\varphi = 0, x^* = 0, z^* = 0$ и с учетом, что углы вылета $\sin\psi_x \approx \psi_x$, $\sin\psi_z \approx \psi_z$, получим:

$$x^* = \frac{\psi_x}{\sqrt{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\alpha}\varphi\right); \quad z^* = \frac{\psi_z}{\sqrt{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\alpha}\varphi\right). \quad (13)$$

Частицы, выходящие из точечного источника под малыми углами к стационарной траектории, первый раз сфокусируются на ней при значении аксиального угла $\varphi = \pi \cdot \alpha^{-1}$. Прецизионная фокусировка предполагает $\varphi < 2\pi$, т. е. частицы должны фокусироваться в пределах одного оборота. Единственным показателем степени, удовлетворяющим этому условию, является $\alpha = 0,5$. В этом случае частицы будут фокусироваться под углом $\varphi = \pi\sqrt{2} \approx 255°$. Такое поле используется в магнитных спектрометрах [11] для осуществления прецизионной фокусировки электронов на мишени. В бетатронах [12], где отсутствует прецизионная фокусировка, типичным является показатель $\alpha = 0,6$.

Максимальное значение амплитуды отклонения потока частиц от равновесной траектории определяется формулой

$$x_{\max} = z_{\max} = \frac{\psi}{180} \pi \sqrt{2} \rho_0. \quad (14)$$

В частности, полагая $\alpha = 0,5$; $\rho_0 = 1$ м; $\psi_x = \psi_z = \psi = 5°$, получим $x_{\max} = z_{\max} = 0,12$ м.

**Условие синхронизации**

Помимо выполнения условия двойной фокусировки, при ускорении частиц необходимо обеспечить синхронизацию ускорения и фокусировки. Темп ускорения частиц в поле возрастающего векторного потенциала зависит от скорости возрастания последнего, т. е. от величины $t_0^{-1}$. Следовательно, условием синхронизации будет равенство времени ускорения и фокусировки:

$$A(t_0) = A_{\max}. \quad (15)$$

Пусть векторный потенциал имеет вид (8), при показателе степени $\alpha = 0,5$ возрастает во времени по линейному закону, тогда

$$A^* = t^* \rho^{*0,5}. \quad (16)$$

Подставляя в (11) найденный выше угол двойной фокусировки, находим время ускорения:

$$t_0 = \rho_0 c^{-1} \pi \sqrt{2} \left(H_0^* - E_0^{*2}\right)^{-1}. \quad (17)$$

В частности, если ускоряются и фокусируются электроны, то имеет место ультрарелятивистский случай, полагая $H_0^* \approx A^*$, $E_0^* \ll A^*$, при радиусе равновесной траектории $\rho_0 = 1$ м из (18) получим $t_0 = 1{,}48 \cdot 10^{-8}$ с.

**Численное интегрирование**

Запишем уравнения (3) для линейно возрастающего потенциала (16):

$$\frac{dP_x^*}{dt^*} = -\frac{1}{2}\frac{f_0^*}{H^*}t^* \cdot x^*; \quad \frac{dP_z^*}{dt^*} = -\frac{1}{2}\frac{f_0^*}{H^*}t^* \cdot z^*;$$
$$\frac{dx^*}{dt^*} = \frac{f_0^*}{H^*}P_x^*; \quad \frac{dz^*}{dt^*} = \frac{f_0^*}{H^*}P_z^*. \tag{18}$$

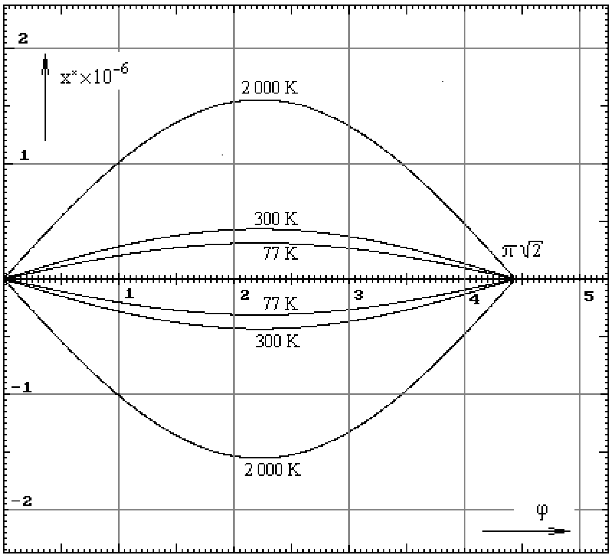
Пусть начальные импульсы частиц определяются тепловой скоростью эмиттера. Тогда среднее значение модуля скорости будет [13]:

$$\langle v_T \rangle = \sqrt{2\kappa T \pi^{-1} m^{-1}}, \tag{19}$$

где $k$ – постоянная Больцмана; $T$ – температура эмиттера, а безразмерный начальный импульс примет вид:

$$\langle P_T^* \rangle = E_0 \left(1 - \langle v_T^* \rangle^2\right)^{-0,5}. \tag{20}$$

На рисунке приведен результат расчета траекторий $x = x(\varphi)$ электронов при различных температурах эмиттера.




Траектории электронов $x = x(\varphi)$ при различных значениях температуры эмиттера

При частоте $\sqrt{\alpha}$ электроны фокусируются под углом $\pi\sqrt{2}$ за время $t^* = 1$, т. е. закончив ускорение, что подтверждает результат, полученный выше аналитически.

**Заключение**

Построенная в рамках гамильтоновой механики математическая модель движения релятивистского заряда в поле векторного потенциала позволяет исследовать аналитическими и численными методами свойства магнитных полей. При использовании высокочастотного магнитного поля показана возможность одновременного осуществления ускорения и прецизионной фокусировки потока заряженных частиц. Полученные результаты могут быть использованы при расчете ускорителей и приборов электронной и ионной оптики.

**Библиографические ссылки**


1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. – М. : Наука, 1967. – 460 с.
2. *Зигбан К.* Альфа-, бета-, гамма-спектроскопия. – М. : Атомиздат, 1969. – 567 с.
3. *Фейман Р.* [и др.]. Фейнмановские лекции по физике. – Вып. 6. Кн. 4. – М. : Мир, 1977. – 247 с.
4. Там же.
5. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М. : Наука, 1974. – 432 с.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. – М. : Наука, 1967. – 460 с.
7. *Ефимов И. Н., Морозов Е. А.* Каноническое интегрирование динамических систем. – Екатеринбург : Институт экономики УрО РАН, 2006. – 198 с.
8. *Ефимов И. Н., Морозов Е. А.* Фокусировка и ускорение заряженных частиц в высокочастотном магнитном поле // Интеллектуальные системы в производстве. – 2013. – № 2 (22). – С. 16–20.
9. Там же.
10. *Зигбан К.* Указ. соч.
11. Там же.
12. *Фейман Р.* [и др.]. Указ. соч. – 247 с.
13. *Кикоин А. К., Кикоин И. К.* Молекулярная физика. – М. : Наука, 1976. – 480 с.


* * *


*I. N. Efimov,* DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
*E. A. Morozov,* DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
*K. M. Selivanov,* PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Perm National Research Polytechnic Institute


**Integration of motion equations for charged particles in the axially symmetric magnetic field**


*On the basis of Hamilton mechanics, a mathematical model is developed, describing inductive acceleration and precision focusing of charged particles in axially symmetric magnetic field. Calculation results are given for focusing properties with applying the algorithms of numerical integration, resistant to accumulation of account errors.*



**Keywords:** charged particles, axially symmetric magnetic field, mathematical models, numerical integration, motion.

Получено: 19.09.14