

УДК 512.77 517.912

Л. Ф. Илалетдинов, аспирант

М. И. Пономарев, кандидат технических наук, доцент

В. А. Тенев, доктор физико-математических наук, профессор

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

## ПЛАНИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕЛА С ВИНТОВОЙ СИММЕТРИЕЙ\*

На основе численного эксперимента, использующего решение уравнений Навье – Стокса, исследуется взаимодействие винтообразного тела с жидкостью при движении. Численный эксперимент проведен с использованием центрального симметричного ортогонального композиционного плана второго порядка. Получены квадратичные зависимости силы и момента от поступательной и угловой скорости движения тела.

**Ключевые слова:** вязкое движение, уравнения Навье – Стокса, численный эксперимент, винтовая симметрия.

Известно, что возможно перемещение устройств в жидкости за счет движения внутренних частей. При этом движение можно осуществить за счет изменения положения центра масс тела [1, 2]. Показана также возможность движения трехосных эллипсоидов при вращении внутренних роторов [3]. В работе [4] показано, что тело, обладающее винтовой симметрией, может перемещаться в идеальной жидкости с постоянной скоростью при наличии внутреннего вращающегося элемента, хотя винт при безвихревом обтекании тяги не производит. Движение в вязкой жидкости более сложное и требует численного решения уравнений Навье – Стокса. Если на основе численного эксперимента определить силовое воздействие реальной жидкости для типовых движений объекта, то возможно построить некоторую явную феноменологическую модель, связывающую сопротивление среды с кинематическими параметрами движения тела. Для двумерного приближения, используемого при моделировании плавающих тел [5, 6], нет больших затрат при проведении численного эксперимента. В трехмерной постановке расчеты становятся затратными по времени и требуют предварительного планирования проведения численных экспериментов.

Так же, как в работе [7], рассмотрим возможность движения тела с винтовой симметрией, но уже в вязкой жидкости. Тело представляет собой сферу с тремя дисками, повернутыми на 45 градусов (рис. 1). На оси  $Z$  установлен ротор, обеспечивающий продвижение тела. Необходимо рассчитать стационарные составляющие сил и моментов, действующих на тело со стороны жидкости при поступательном и вращательном движении. Нестационарные составляющие сил и моментов определяются через коэффициенты присоединенных масс [8].

Для определения вязкой силы и моментов решается система уравнений Навье – Стокса:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{V},$$

где  $\mathbf{V}$  – вектор абсолютной скорости жидкости;  $p, \rho, \nu$  – давление, плотность и кинематический коэффициент вязкости. Для системы уравнений задавались граничные условия прилипания на поверхности тела и невозмущенные условия на бесконечности.

Силы реакции жидкости на тело и момент вязких сил определяются интегралами по поверхности:

$$\mathbf{F}_R(t) = \int_S \left[ -p\mathbf{I} + \rho\nu(\nabla\mathbf{V} + {}^T\nabla\mathbf{V}) \right] \cdot \mathbf{n} ds,$$

$$\mathbf{G}_R(t) = \int_S \mathbf{r}_s \times \left[ -p\mathbf{I} + \rho\nu(\nabla\mathbf{V} + {}^T\nabla\mathbf{V}) \right] \cdot \mathbf{n} ds.$$

Расчеты параметров движения тела проведены в диапазоне числа Рейнольдса  $Re=1000 \div 5000$  с применением пакета ANSYS CFX. Распределение давления на поверхности вращающегося тела представлено на рис. 1.

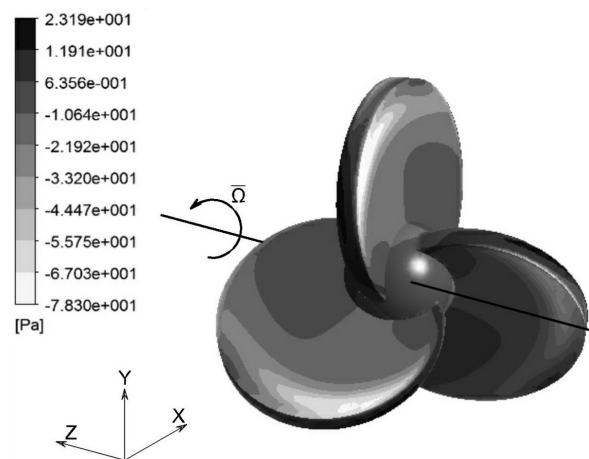


Рис. 1. Вращение тела в жидкости (вид сзади)

На рис. 1 видно, что тело совершает вращение вокруг оси  $Z$ , поэтому с одной стороны на лопастях, которые отбрасывают жидкость, образуется повышенное давление, а с другой – происходит разреже-

ние. Цветовая заливка по поверхности тела с градацией по давлению показывает данное явление. За счет перепада давлений образуется сила тяги винтообразного тела.

Картина движения жидкости около тела показана на рис. 2.

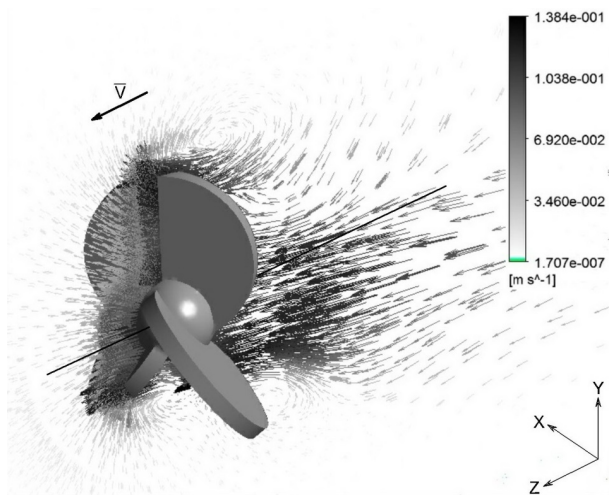


Рис. 2. Поступательное движение (вектора скоростей)

При поступательном движении тела в жидкости на встречной поверхности давление повышается, а сзади образуются вихри и разрежение. В данном случае перепад давлений создает силу сопротивления поступательному движению. По приведенным рисункам также видно, какая часть лопастей обеспечивает необходимую силу тяги.

Численный эксперимент проводился с использованием центрального симметричного ортогонального композиционного плана второго порядка. В отличие от линейных планов, где факторы варьируют на двух уровнях, планы второго порядка требуют как минимум три. Первоначально был использован ортогональный центральный композиционный план второго порядка для трех факторов с варьированием на пяти уровнях. В качестве влияющих факторов взяты:  $x_1$  – поступательная скорость;  $x_2$  – угловая скорость вращения;  $x_3$  – угол поворота тела. Их нормированные значения:  $-\alpha, -1, 0, +1, +\alpha$ .

Для ортогонализации столбцов факторов  $x_0$  и  $x_i^2$ ,  $x_i^2$  и  $x_i^2$  проводится преобразование  $\hat{x}_i^2 = x_i^2 - a$ . Из условия ортогональности преобразованных столбцов вычислены значения  $\alpha$  и  $a$ . Для трех факторов эти значения составляют:  $\alpha = 1,215, a = 0,73$  [9]. Ниже приведен план для трех факторов (табл. 1).

Таблица 1. План для трех факторов

$g$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	$\hat{x}_1^2$	$\hat{x}_2^2$	$\hat{x}_3^2$	$y$
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	0,27	0,27	0,27	$y_1$
2	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	0,27	0,27	0,27	$y_2$
3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	0,27	0,27	0,27	$y_3$
4	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	$y_4$
5	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	0,27	0,27	0,27	$y_5$
6	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	$y_6$
7	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	0,27	0,27	0,27	$y_7$
8	1	1	1	1	1	1	1	1	0,27	0,27	0,27	$y_8$
9	1	-1,215	0	0	0	0	0	0	0,75	-0,73	-0,73	$y_9$
10	1	1,215	0	0	0	0	0	0	0,75	-0,73	-0,73	$y_{10}$
11	1	0	-1,215	0	0	0	0	0	-0,73	0,75	-0,73	$y_{11}$
12	1	0	1,215	0	0	0	0	0	-0,73	0,75	-0,73	$y_{12}$
13	1	0	0	-1,215	0	0	0	0	-0,73	-0,73	0,75	$y_{13}$
14	1	0	0	1,215	0	0	0	0	-0,73	-0,73	0,75	$y_{14}$
15	1	0	0	0	0	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	$y_{15}$
Коэффициенты	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_{12}$	$b_{13}$	$b_{23}$	$b_{123}$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	
$\sum_{g=1}^N x_{ig}^2$	15	10,952			8				4,3727			

По результатам экспериментов составляется полином:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3 + b_4(x_1^2 - 0,73) + b_5(x_2^2 - 0,73) + b_6(x_3^2 - 0,73),$$

коэффициенты которого вычисляются с помощью

$$отношения \quad b_i = \frac{\sum_{g=1}^N x_{ig} y_g}{\sum_{g=1}^N x_{ig}^2}. \quad \text{Составленные таким обра-}$$

зом зависимости сил  $F_x, F_y, F_z$  и моментов  $M_x, M_y, M_z$  от линейной скорости  $V$ , угловой скорости  $\omega$  и угла  $\varphi$  (управляемых факторов) не отразили физической сути изучаемого явления. Это связано с тем, что движение винтового тела по разным осям существенно отличается по характеру взаимодействия с жидкостью. Поэтому были проведены повторные эксперименты на базе такого же плана второго порядка для двух факторов  $V$  и  $\omega$  с варьированием на трех уровнях с нормированными значениями  $-1, 0, +1$  при фиксированном значении угла (движение вдоль оси  $z$ ). Параметры такого плана показаны ниже.

Таблица 3. Результаты численного эксперимента

№	$V, \text{ м/с}$	$\omega, \text{ рад/с}$	Сила $X, \text{ Н}$	Сила $Y, \text{ Н}$	Сила $Z, \text{ Н}$	Момент $X, \text{ Н·м}$	Момент $Y, \text{ Н·м}$	Момент $Z, \text{ Н·м}$
1	0,001	0,01	-1,2E-06	2,207E-07	8,4E-05	-2,227E-07	5,6334E-08	-0,00008697
2	0,1	0,01	-0,00532	-0,006678	-1,3034	-0,0000790	-0,0008588	0,19674
3	0,001	1	-0,03095	0,010079	4,0331	0,0020331	-0,0024098	-1,144
4	0,1	1	-0,02833	0,013444	1,8569	-0,0033729	0,0013765	-0,77195
5	0,001	0,505	-0,00686	0,002563	1,005	0,00042431	-0,0003140	-0,28769
6	0,1	0,505	-0,00461	0,0003651	-0,32438	0,00019706	-0,0001676	-0,087496
7	0,0505	0,01	-0,00108	-0,001668	-0,32709	0,0000161	-0,0001855	0,048257
8	0,0505	1	-0,02547	0,0096131	3,0717	-0,0009458	-0,0006619	-0,97458
9	0,0505	0,505	-0,00791	0,0037532	0,45774	-0,0010937	0,0003461	-0,19484

На основе этих данных составлен план 2-го порядка и вычислены коэффициенты модели в нормированных координатах (табл. 4).

Таблица 4. Нормированные коэффициенты модели

	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_{12}$	$b_{11}$	$b_{22}$
$F_x$	-0,0123	-8E-05	-0,013	0,002	-0,00118	-0,008713
$F_y$	0,0035	-0,0009	0,0069	0,0025	-0,00061	0,0018995
$F_z$	0,94107	-0,8015	1,7654	-0,218	-0,19098	0,8410174
$M_x$	-0,0003	-0,001	-4E-04	-0,001	0,000542	-0,000234
$M_y$	-0,0003	0,00051	-1E-04	0,0012	-0,00023	-0,000411
$M_z$	-0,3573	0,12818	-0,523	0,0438	0,025176	-0,250392

Для перехода к ненормированной модели в полученное уравнение подставим выражения переменных для нормированных координат:

$$x_i = \frac{2(X_i - X_{0i})}{X_{i\max} - X_{i\min}},$$

Параметры плана:

$$N_0 = 2^2 = 4, \quad N = 9, \quad \alpha = 1, \quad a = 2/3, \quad 1 - a = 1/3.$$

Таблица 2. План для двух факторов

$g$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	$x_{11} = x_1^2 - a$	$x_{22} = x_2^2 - a$	$y$
1	1	-1	-1	1	1/3	1/3	$y_1$
2	1	1	-1	-1	1/3	1/3	$y_2$
3	1	-1	1	-1	1/3	1/3	$y_3$
4	1	1	1	1	1/3	1/3	$y_4$
5	1	-1	0	0	1/3	-2/3	$y_5$
6	1	1	0	0	1/3	-2/3	$y_6$
7	1	0	-1	0	-2/3	1/3	$y_7$
8	1	0	1	0	-2/3	1/3	$y_8$
9	1	0	0	0	-2/3	-2/3	$y_9$
$\sum_{g=1}^N x_{ig}^2$	9	6	6	4	2	2	

Полином принимает вид:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}(x_1^2 - 2/3) + b_{22}(x_2^2 - 2/3).$$

Исходные данные для составления аппроксимирующего полинома, вычисленные в 9 точках при численном решении уравнений Навье – Стокса, представлены в табл. 3.

где  $X_{0i}$  – средние;  $X_{i\max}$  – максимальные;  $X_{i\min}$  – минимальные значения физических переменных в исходных координатах.

После элементарных преобразований получим формулы для вычисления ненормированных коэффициентов в исходных координатах:

$$B_0 = b_0 - 0,667b_{11} - 0,667b_{22} - b_1 \frac{X_{1B} + X_{1H}}{X_{1B} - X_{1H}} - b_2 \frac{X_{2B} + X_{2H}}{X_{2B} - X_{2H}} + b_{11} \frac{4X_{01}^2}{(X_{1B} - X_{1H})^2} + b_{22} \frac{4X_{02}^2}{(X_{2B} - X_{2H})^2} + b_{12} \frac{4X_{01}X_{02}}{(X_{1B} - X_{1H})(X_{2B} - X_{2H})},$$

$$B_1 = b_1 \frac{2}{X_{1B} - X_{1H}} - b_{11} \frac{8X_{01}}{(X_{1B} - X_{1H})^2} - b_{12} \frac{4X_{02}}{(X_{1B} - X_{1H})(X_{2B} - X_{2H})},$$

$$B_2 = b_2 \frac{2}{X_{2B} - X_{2H}} - b_{22} \frac{8X_{02}}{X_{2B} - X_{2H}} - b_{12} \frac{4X_{01}}{(X_{1B} - X_{1H})(X_{2B} - X_{2H})},$$

$$B_{12} = b_{12} \frac{4}{(X_{1B} - X_{1H})(X_{2B} - X_{2H})},$$

$$B_{11} = b_{11} \frac{4}{(X_{1B} - X_{1H})^2}, \quad B_{22} = b_{22} \frac{4}{(X_{2B} - X_{2H})^2},$$

где  $X_1$  – линейная скорость  $V$ , м/с;  $X_2$  – угловая скорость  $\omega$ , рад/с.

Вычисленные значения ненормированных коэффициентов приведены в табл. 5.

Таблица 5. Ненормированные коэффициенты модели

	B0	B1	B2	B12	B11	B22
$F_x$	-0,0005	0,00597	0,0051	0,0811	-0,47966	-0,035561
$F_y$	0,00048	-0,0452	0,001	0,1025	-0,24864	0,0077523
$F_z$	-0,0263	-3,8233	0,584	-8,904	-77,9421	3,4323739
$M_x$	-0,0002	-0,0141	0,0029	-0,054	0,221204	-0,000953
$M_y$	0,00024	-0,0042	-9E-04	0,0474	-0,09306	-0,001677
$M_z$	0,00647	0,64884	-0,124	1,7878	10,27505	-1,021904

Из полученной табл. 5 следует, что только сила, действующая по оси  $z$  –  $F_z$ , и момент  $M_z$  имеют большие значения с наиболее существенными вкладами квадратичных слагаемых.

Полученная зависимость проверена на выборке, не участвовавшей в определении коэффициентов модели. Некоторые точки выходят за границы рассматриваемого диапазона планированного эксперимента, как видно из табл. 6.

Таблица 6. Значения переменных в проверочной выборке

$V$	$\omega$
0	1
0,01	1
0,05	1
0,15	1
0,18	1
0,2	1
0	0,5
0,01	0,5
0,05	0,5
0,075	0,5
0,085	0,5
0,1	0,5

Сравнение численных результатов и рассчитанных по полученной формуле значений силы  $F_z$  и момента  $M_z$  показано на рис. 3 и 4.

Прямая линия соответствует идеальному совпадению. Остаточная дисперсия для момента составляет 0,078, а для силы 0,43. В целом, квадратичную аппроксимацию всего по девяти точкам можно считать удовлетворительной для описания рассматриваемого сложного физического процесса. Полученную зависимость можно использовать при расчете самопродвижения винтового тела под действием вращения внутренней массы.

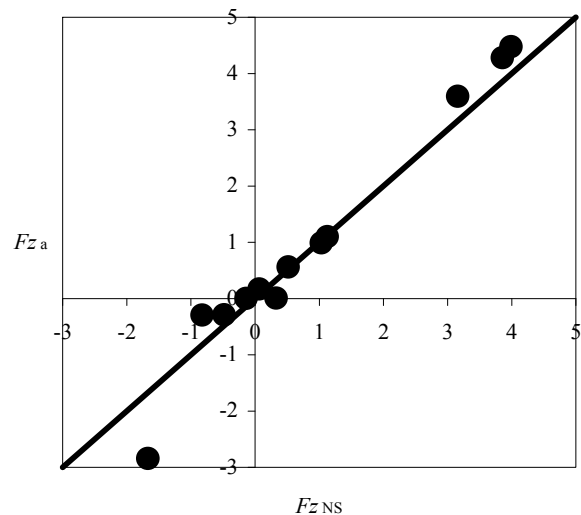


Рис. 3. Сравнение силы  $F_{z_{NS}}$ , полученной из решения уравнений Навье – Стокса, и силы, найденной из аппроксимирующего полинома  $F_{z_a}$

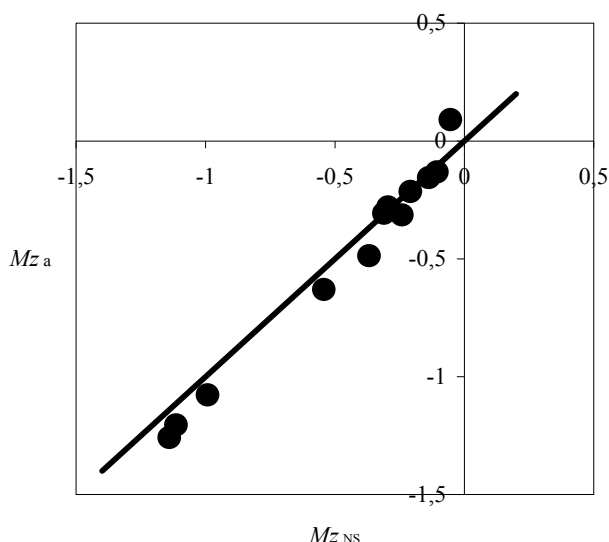


Рис. 4. Сравнение момента  $Mz_{NS}$ , полученной из решения уравнений Навье – Стокса, и момента, найденного из аппроксимирующего полинома  $Mz_a$

#### Библиографические ссылки

1. Childress S., Spagnolie S. E., Tokieda T. A bug on a raft: recoil locomotion in a viscous fluid // J. Fluid Mech., 2011, vol. 669, p. 527–556.

2. Vetchanin E. V., Mamaev I. S., Tenenev V. A. The Self-propulsion of a Body with Moving Internal Masses in a Viscous Fluid // Regular and Chaotic Dynamics, 2013, 18 (1-2), p. 100–117.

3. Vetchanin E. V., Kilin A. A., Tenenev V. A., Shaura A. S. Numerical simulation of motion in the viscous fluid of a three-axial ellipsoid controlled by three rotors. // Fourth International Conference «Geometry, Dynamics, Integrable Systems GDIS 2013: Book of abstracts. – Moscow-Izhevsk: Publishing Center «Institute of Computer Scienc», 2013, p. 54–55.

4. Воинов О. В. Инерциальное движение тела в идеальной жидкости из состояния покоя // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49. – С. 214–220.

5. Childress S., Spagnolie S. E., Tokieda T. A bug on a raft: recoil locomotion in a viscous fluid // J. Fluid Mech., 2011, vol. 669, p. 527–556.

6. Рамоданов С. М., Тенев В. А. Движение тела с переменной геометрией масс в безграничной вязкой жидкости // Нелинейная динамика. – 2011. – Т. 7; № 3. – С. 635–647.

7. Воинов О. В. Указ. соч.

8. Vetchanin E. V., Mamaev I. S., Tenenev V. A. The Self-propulsion of a Body with Moving Internal Masses in a Viscous Fluid // Regular and Chaotic Dynamics, 2013, 18 (1-2), p. 100–117.

9. Судняев Н. И. Теория планирования эксперимента и анализ статистических данных : учеб. пособие. – М. : Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2011. – 399 с.

\*\*\*

L. F. Ilaletdinov, Post-graduate, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

M. I. Ponomarev, PhD in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

V. A. Tenenev, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

#### Planning a numerical experiment to determine the hydrodynamic characteristics of the body with helical symmetry

On the basis of numerical experiments using a solution of the Navier-Stokes equations, the interaction of the helical body with liquid motion is investigated. Numerical experiment is performed using central symmetric orthogonal composition plan of the second-order. The quadratic dependences of the force and moment on the translational and angular velocity of the body motion are obtained.

**Keywords:** viscous motion, Navier-Stokes equations, numerical experiment, helical symmetry.

Получено: 20.11.14

УДК 699.844

А. П. Тюрин, доктор технических наук, профессор

Д. В. Парахин, аспирант

А. А. Шаклеин, аспирант

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

К. Ю. Замотин

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

### К ВОПРОСУ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗВУКОПОГЛОЩАЮЩИХ СВОЙСТВ ШУМОЗАЩИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ЧИСЛЕННЫМИ И ФИЗИЧЕСКИМИ ЭКСПЕРИМЕНТАМИ\*

Одним из существенных моментов акустического проектирования является оценка звукопоглощения материалов. Работа направлена на проработку этапов методологии оценки звукопоглощения шумозащитных конструкций в численном эксперименте с использованием проприетарного программного обеспечения. Оценка собственных колебаний мембраны-пленки производится на основе модели Рейсснера – Миндлина, оценка величины акустических давлений на измерительных микрофонах – с использованием конечно-элементного метода, реализованного в ПО Astran. В качестве физических образцов используются образцы биезонанных сотовых конструкций, подготовленные для физических экспериментов в акустическом интерферометре. Работа выполняется в рамках гранта РФФИ по проекту № 14-38-50170 «Развитие теоретических основ оценки звукопоглощения биезонанных сотовых конструкций на основе экспериментальных исследований».

**Ключевые слова:** коэффициент звукопоглощения, модель Рейсснера – Миндлина, численный и физический эксперимент, проприетарное программное обеспечение.

© Тюрин А. П., Парахин Д. В., Шаклеин А. А., Замотин К. Ю., 2014

\* Работа выполняется в рамках гранта РФФИ по проекту № 14-38-50170 «Развитие теоретических основ оценки звукопоглощения биезонанных сотовых конструкций на основе экспериментальных исследований».