

УДК 621.391

*О. В. Пономарева*, кандидат технических наук, доцент  
Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова  
*А. В. Пономарев*, кандидат экономических наук,  
руководитель аппарата Центральной избирательная комиссия Удмуртской Республики  
*В. А. Пономарев*, доктор технических наук, профессор  
Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

## ИЗМЕРЕНИЕ СКОЛЬЗЯЩЕГО ВЗВЕШЕННОГО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ДИСКРЕТНО-ВРЕМЕННОГО СПЕКТРА ТОНАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ

*Исследованы методы и алгоритмы измерения скользящего взвешенного энергетического дискретно-временного спектра гармонических компонент на конечных интервалах. Приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований косвенных спектральных измерений характеристик тональных компонент.*

**Ключевые слова:** дискретный сигнал, конечный интервал, скользящие спектральные измерения, параметрические дискретные экспоненциальные функции, инвариантность.

### Введение

В настоящее время сложно назвать область науки и техники, где бы для повышения качества продукции и достижения высокой эффективности эксплуатации современных изделий не проводились косвенные измерения спектрально-временных характеристик измерительных сигналов (частотных спектров, временных спектров, корреляционных функций и других спектрально-временных характеристик), так как они часто являются основным физическим носителем информации о состоянии исследуемого объекта. При этом во многих областях научных исследований сталкиваются с необходимостью решения задачи выявления скрытых периодичностей [1–31] (задачи обнаружения и измерения параметров тональных компонент). Среди таких предметных областей можно назвать анализ временных рядов и прогнозирование социально-экономических процессов и явлений, виброакустическое диагностирование, медицинскую диагностику, активную и пассивную гидролокацию, распознавание речи и изображения, сейсмологию, геофизику.

Одним из методов эффективного выявления скрытых периодичностей в сигналах такого рода является измерение на конечных интервалах их скользящих спектров Фурье в базе дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) или в базе параметрических ДЭФ (ДЭФ-П), являющихся обобщением ДЭФ. Суть скользящих измерений заключается в измерении дискретного спектра Фурье-сигнала, взвешенного прямоугольным или иным временным окном в  $N$  отсчетов, которое перед повторным спектральным измерением смещается на один отсчет.

В основе скользящих косвенных методов измерений параметров тональных сигналов или гармонических составляющих сложных полигармонических сигналов лежит, как правило, применение двух видов измерительных преобразований взвешенных дискретных сигналов на конечных интервалах: дискретного преобразования Фурье (ДФ) или параметрического дискретного преобразования Фурье (ДФ-П).

При этом, как показал анализ работ по косвенным измерениям спектрально-временных характеристик сигналов, некоторые известные (а тем более неизвестные!) процессы и эффекты, проявляющиеся в приложениях цифрового спектрального анализа и присущие цифровой обработке сигналов как таковой, к сожалению, ускользают от внимания исследователей, что в результате может приводить (и приводит [32]) к ошибочным выводам. Это объясняется, прежде всего, тем, что у исследователей часто преобладают знания в конкретной предметной области, а не в области цифровых методов измерений спектрально-временных характеристик сигналов.

Целью настоящей работы является восполнение указанного пробела и исследование процессов и эффектов, возникающих при измерении скользящего взвешенного энергетического дискретно-временного спектра действительных гармонических сигналов на конечных интервалах.

### Методы измерения взвешенного дискретно-временного спектра Фурье действительных гармонических сигналов на конечных интервалах

Известно, что взвешенное дискретно-временное преобразование Фурье (ВДВФ) представляет собой  $z$ -преобразование сигнала  $x(n); n = 0, \overline{N-1}$ , вычисленное на единичной окружности:

$$S(f) = S(z) \Big|_{z=\exp(-j2\pi f)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp(-j2\pi \cdot f \cdot n);$$

$$-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}.$$

Назовем спектр  $S(f)$ , полученный методом ВДВФ, *взвешенным дискретно-временным спектром Фурье* (ВДВСФ).

Отметим, что ВДВФ определяет непрерывный спектр Фурье и является теоретическим понятием, которое цифровыми методами может быть реализовано лишь приближенно. Но ВДВСФ, как будет показано в дальнейшем, может быть измерен на определенной сетке частот с помощью выбранного измерительного преобразования.

В работах авторов введены дискретные функции вида:

$$def_p(k, n, \theta) = W_N^{(k+\theta)n} = \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} (k + \theta)n\right],$$

$$n, k = \overline{0, N-1}, \quad (1)$$

которые получили название *параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ-П)*. Базис ДЭФ-П является обобщением базиса ДЭФ и тождественен ему при значении параметра  $\theta = 0$ . ДЭФ-П в отличие от ДЭФ не являются функциями двух равноправных переменных  $k$  и  $n$ . Следовательно, матрица ДЭФ-П  $F_{N,\theta}$  асимметрична:

$$F_{N,\theta} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) \end{matrix} & n \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^\theta & \dots & W_N^{\theta(N-1)} \\ 1 & W_N^{(1+\theta)} & \dots & W_N^{(1+\theta)(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{(N-1+\theta)} & \dots & W_N^{(N-1+\theta)(N-1)} \end{bmatrix} & \end{matrix} \quad (2)$$

Перечислим свойства, которыми обладают ДЭФ-П, доказательство которых приведено в работах авторов [33, 34].

1. ДЭФ-П являются *периодическими по переменной  $k$  и параметрическими периодическими по переменной  $n$  с периодом  $N$* :

$$def_p(k \pm pN, n, \theta) = def_p(k, n, \theta),$$

$$def_p(k, n \pm pN, \theta) = def_p(k, n, \theta) W_N^{\pm \theta \cdot N \cdot p}.$$

2. Система ДЭФ-П не мультипликативна по переменной  $k$ :

$$def_p(k, n, \theta) def_p(l, n, \theta) \neq def_p(k+l, n, \theta),$$

$$k, l = \overline{0, N-1}; k \neq l$$

и мультипликативна по переменной  $n$ :

$$def_p(k, n, \theta) def_p(k, m, \theta) = def_p(k, (n+m), \theta),$$

$$n, m = \overline{0, N-1}; n \neq m.$$

3. Среднее значение ДЭФ-П по переменной  $k$  равно нулю:

$$\sum_{k=0}^{N-1} def_p(k, n, \theta) = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} \theta n\right) \frac{1 - \exp(-j2\pi n)}{1 - \exp(-j \frac{2\pi}{N} n)},$$

а по переменной  $n$  не равно нулю:

$$\sum_{n=0}^{N-1} def_p(k, n, \theta) = \frac{1 - \exp[-j2\pi n(k + \theta)]}{1 - \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} (k + \theta)\right]}.$$

4. Система ДЭФ-П ортогональна по обеим переменным:

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{(k+\theta)n} [W_N^{(l+\theta)n}]^* = \frac{1 - W_N^{-(k-l)N}}{1 - W_N^{-(k-l)}} = \begin{cases} N, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(k+\theta)n} [W_N^{(k+\theta)m}]^* = \frac{1 - W_N^{-(m-n)N}}{1 - W_N^{-(m-n)}} = \begin{cases} N, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

5. Система ДЭФ-П является *полной системой*, т. к. число линейно независимых функций равно размерности множества дискретных сигналов.

Разложение по базисной системе ДЭФ-П является *параметрическим дискретным преобразованием Фурье (ДПФ-П)*, которое может определяться в матричной форме:

$$S_{N,\theta} = \frac{1}{N} F_{N,\theta} X_N, \quad 0 \leq \theta < 1, \quad (3)$$

или в обычной форме:

$$S_N(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n}, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (4)$$

Существует *обратное ДПФ-П (ОДПФ-П)*, которое определяется в обычной форме:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k, \theta) W_N^{-(k+\theta)n}, \quad n = \overline{0, N-1}, \quad 0 \leq \theta < 1, \quad (5)$$

или в матричной форме:

$$X_N = F_{N,\theta}^* S_{N,\theta}, \quad 0 \leq \theta < 1. \quad (6)$$

В рамках аппарата ДПФ-П вводятся понятия энергетического спектра  $G_N(k, \theta)$  и спектра мощности  $P_N(k, \theta)$  [35, 36]:

$$G_N(k, \theta) = \frac{P_N(k, \theta)}{\Delta f} = N |S_N(k, \theta)|^2,$$

$$P_N(k, \theta) = |S_N(k, \theta)|^2, \quad 0 \leq \theta < 1; \Delta f = \frac{1}{N}.$$

При этом переход от нормированной  $\Delta f$  к «истинной»  $\Delta f_{\text{ист}}$  осуществляется согласно выражению,  $\Delta f_{\text{ист}} = \Delta f \cdot F_s$ , где  $F_s$  – частота дискретизации сигнала  $x(n)$ .

Отметим, что при значении параметра  $\theta = 0$  ДПФ-П переходит в стандартное ДПФ. Эти два измерительных преобразования являются основными методами измерения взвешенного дискретно-временного спектра Фурье действительных гармонических сигналов на конечных интервалах.

Следует упомянуть еще один метод измерения взвешенного дискретно-временного спектра Фурье. Это метод ДПФ исходного сигнала, *дополненного нулевыми отсчетами*. Этот подход имеет существенные недостатки: дополнение нулями требует значительно дополнительного объема памяти и значительных непроизводительных вычислительных затрат из-за необходимости проведения большого числа операций с нулевыми отсчетами. Однако нередко этот метод до сих пор предлагается к применению.

Коэффициенты ДПФ-П  $S_N(k, \theta)$  последовательности  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$  при значении параметра  $\theta = 0$  по определению (3), (4) равны значениям ее

z-преобразования в точках  $\{2\pi k/N\}$ ,  $k = \overline{0, (N-1)}$ , равномерно расположенных на единичной окружности в z-плоскости.

Коэффициенты ДПФ-П  $S_N(k, \theta)$  последовательности  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$  при значении параметра  $\theta \neq 0$  по определению (3), (4) равны значениям ее z-преобразования в точках  $\{2\pi(k + \theta)/N\}$ ,  $k = \overline{0, (N-1)}$ ,  $0 \leq \theta < 1$ , равномерно расположенных на единичной окружности в z-плоскости.

Таким образом, ДПФ и ДПФ-П как измерительные преобразования позволяют на определенной сетке частот (для ДПФ сетка частот фиксирована, для ДПФ-П сетка частот изменяется параметром  $\theta$ ) измерять взвешенный непрерывный спектр сигнала на конечном интервале (ВДВСФ), который получен методом дискретно-временного преобразования Фурье.

С точки зрения приложений важно учитывать, что измерительное преобразование ДПФ наряду с достоинствами имеет и ряд недостатков, связанных с проявлением специфических эффектов, сопровождающих его практическое применение. Отметим два из них.

- ДПФ не дает ответа на вопрос: каковы значения z-преобразования последовательности  $x(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$  (значения ДВПФ) между этими точками, порождая так называемый эффект частотола.

- Применению ДПФ сопутствует еще одно явление, называемое в отечественной научной литературе эффектом паразитной модуляции спектра, а в зарубежной – гребешковым эффектом. Появление данного эффекта связано с тем, что т. к. амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) каждого бина [37]

ДПФ имеет вид  $\frac{\sin x}{N \sin(x/N)}$ , то в общей АЧХ ДПФ

появляются провалы, достигающие почти 4 дБ при измерении энергетического спектра Фурье дискретного сигнала на конечных интервалах.

Измерительное преобразование ДПФ-П позволяет по сравнению с методом ДПФ исходного сигнала, дополненного нулевыми отсчетами, при измерении ДВСФ:

- не увеличивать требуемый объем памяти, сократить непроизводительные вычислительные затраты;
- свести влияние эффектов частотола и паразитной модуляции фурье-спектра к минимуму;
- находить значения ДВСФ сигнала на любых частотах, варьируя параметром  $\theta$ , что позволяет существенно повысить различение гармоник в частотной области.

В силу того что теория спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в любом дискретном, полном и ортогональном базисе определяет сдвиг сигнала как некоторую операцию перестановки его отсчетов, то этот сдвиг, в свою очередь, определяет и некоторую операцию периодического продолжения исходного сигнала.

Следовательно, любая базисная система ДЭФ-П при определенном  $\theta$  задает продолжение исходного

сигнала в виде параметрической  $N$ -периодической последовательности:

$$x_\theta(n) = x(n \bmod N) W_N^{-\theta N \text{ent}[n/N]}, \quad (7)$$

где  $\text{ent}[n/N]$  – символ взятия целой части.

В частном случае при  $\theta = 0$  мы имеем обычное периодическое продолжение исходного дискретного сигнала, а при  $\theta = 1/2$  приходим к понятию  $N$ -антипериодической дискретной функции:

$$x_{1/2}(n + N) = -x_{1/2}(n).$$

### Измерение скользящего взвешенного энергетического дискретно-временного спектра Фурье действительных гармонических сигналов на конечных интервалах

Рассмотрим вопрос измерения скользящего энергетического дискретно-временного спектра Фурье действительных гармонических сигналов на конечных интервалах для двух видов его продолжения в прямоугольном временном окне:

- естественного («реального») продолжения сигнала;
- «искусственного» продолжения сигнала, «навязанного» выбранным измерительным преобразованием.

Введем символическое обозначение для измерительных преобразований ДПФ-П и ОДПФ-П параметрической  $N$ -периодической последовательности  $x_\theta(n)$ ,  $n = \overline{0, N-1}$ :

$$x_\theta(n) \xleftarrow{F-P} S_N(k, \theta). \quad (8)$$

Тогда теорему сдвига для ДПФ-П можно записать в следующем виде [38, 39]:

$$\text{если } x_\theta(n) \xleftarrow{F-P} S_N(k, \theta),$$

$$\text{то } x_\theta(n + m) \xleftarrow{F-P} W_N^{-(k+\theta)m} S_N(k, \theta). \quad (9)$$

Из данной теоремы непосредственно следует *инвариантность* скользящего взвешенного энергетического дискретно-временного спектра Фурье параметрической  $N$ -периодической последовательности  $x_\theta(n)$  (7), измеренного на сетке частот ДПФ-П. Полученный вывод не является неожиданным, т. к. «искусственное» продолжение сигнала «согласовано» с используемым измерительным преобразованием.

ВДВПФ представляет собой непрерывное преобразование Фурье дискретного сигнала, заданного на интервале в  $N$  отсчетов, определяет его *теоретический непрерывный спектр* – ВДВСФ и может применяться для описания скользящих измерений энергетических спектров Фурье. Как отмечалось, выполнить ВДВПФ точно невозможно, т. к. интервал между соседними частотами в ВДВСФ представляет собой *бесконечно малую величину*, а длительность входного дискретного сигнала стремится к бесконечности. Другими словами, даже в том случае, когда входной сигнал задан на конечном  $N$ -интервале, для определения ВДВСФ нужно *доопределить* входной дискретный сигнал  $x(n)$ ;  $n = \overline{0, N-1}$ , на беско-

нечный интервал нулевыми отсчетами и выполнить его непрерывное преобразование Фурье. Естественно, выполнить такую операцию на практике *невозможно*. Однако, и это следует подчеркнуть, можно *измерить* ВДВСФ с помощью измерительного преобразования ДПФ-П с заданным шагом по частоте.

Алгоритм измерения ВДВСФ дискретного сигнала  $x(n); n = \overline{0, N-1}$  методом ДПФ-П представим в виде выполнения следующих операций.

- Находим ДПФ-П (4) сигнала  $x(n); n = \overline{0, N-1}$ , при значении параметра  $\theta = 0$ , шаг по частоте которого равен:  $\Delta f = \frac{1}{N}$ .

$$\begin{matrix} k/p \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (N-1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ S_N(0,0) \Rightarrow \Re(0) \\ S_N(1,0) \Rightarrow \Re(p) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S_N((N-1),0) \Rightarrow \Re((N-1) \cdot p) \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} p \\ S_N(0,(p-1)/p) \Rightarrow \Re(p-1) \\ S_N(1,(p-1)/p) \Rightarrow \Re(2p-1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S_N((N-1),(p-1)/p) \Rightarrow \Re(N \cdot p-1) \end{bmatrix}$$

- В массиве  $\Re$  размером  $N \cdot p$  находятся результаты измерения ВДВСФ дискретного сигнала  $x(n); n = \overline{0, N-1}$  с шагом  $\Delta f_1 = \frac{1}{N \cdot p}$ .

В результате работы алгоритма получаем не только значения ВДВСФ в точках  $\{2\pi k/N\}$ , но и значения ВДВСФ в точках  $\{2\pi k/M\}$ ,  $k = \overline{0, (M-1)}$ .

В предельном случае, при шаге по частоте:  $\Delta f_1 = \frac{1}{N \cdot p}$ , стремляемся к бесконечно малой вели-

- Задаем необходимый шаг по частоте:

$$\Delta f_1 = \frac{1}{N \cdot p}$$

- Выполняем  $(p-1)$  раз ДПФ-П сигнала  $x(n); n = \overline{0, N-1}$  при значениях параметра

$$\theta: \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{(p-1)}{p}$$

- Размещаем в массиве  $\Re$  размером  $N \cdot p$  полученные значения ДПФ-П  $S_N(k, \theta); k = \overline{0, N-1}$  при значениях параметра  $\theta = \frac{m}{p}; m = \overline{0, p-1}$  в следующей последовательности:

чине, ДПФ-значения массива  $\Re$  могут рассматриваться как ВДВПФ дискретного сигнала  $x(n)$ .

Для иллюстрации (рис. 1) работы алгоритма был выбран тональный сигнал в виде тональной компоненты  $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right); N=16, k=4; n = \overline{0, N-1}$ .

А для иллюстрации собственно ВДВПФ параметр  $p$  был выбран равным восьми, для измерения значений ВДВСФ параметр  $p$  выбран равным двум.

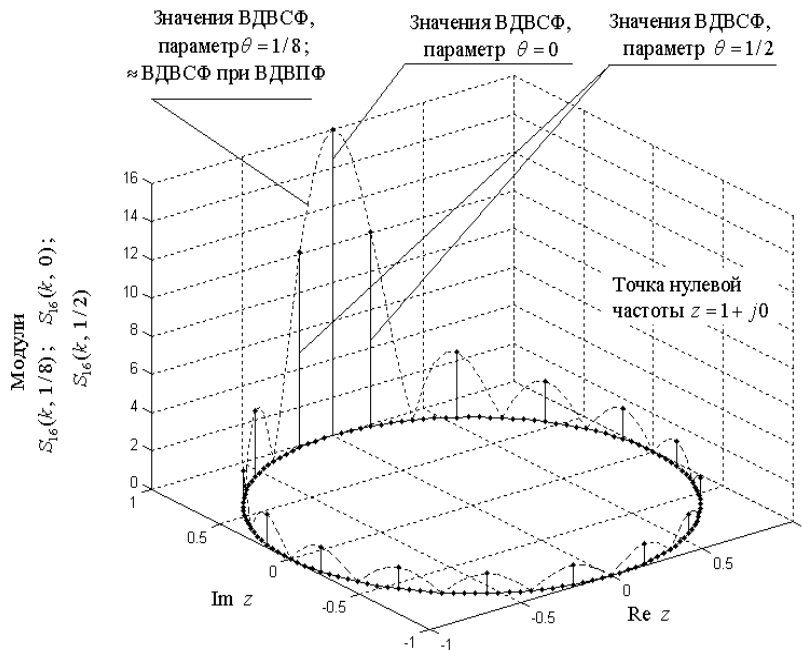


Рис. 1. Расположение значений ВДВСФ тонального сигнала на единичной окружности, параметр  $p = 8; p = 2; N = 16; k = 4$

**Инвариантность значений скользящего взвешенного энергетического дискретно-временного спектра Фурье действительных гармонических сигналов на конечных интервалах**

Рассмотрим вопрос инвариантности значений скользящего взвешенного энергетического дискретно-временного спектра Фурье действительных дискретных гармонических сигналов при их естественном («реальном») продолжении в прямоугольном временном окне.

Пусть задан тональный действительный дискретный сигнал вида:

$$x(n) = \cos \left[ \frac{2\pi}{N} (k + q)n \right], \tag{10}$$

где  $q = 1/2; 1/4, 1/3; k = 3; N = 16$ .

Моделирование измерений значений скользящего взвешенного энергетического дискретно-временного спектра Фурье проводилось следующим образом.

При каждом сдвиге прямоугольного временного окна по естественному продолжению сигнала с выбранным параметром  $q$  (10) находился скользящий энергетический ВДВСФ с шагом  $\Delta f$ . Число сдвигов  $m = 1, 63$  прямоугольного временного окна было выбрано равным шестидесяти четырем, а шаг по частоте  $\Delta f$  – одна сто двадцать восьмая.

Все полученные при определенном значении параметра  $q$  скользящие ВДВСФ  $G_{x,m,ДВПФ,\theta}$  выводились на один график в логарифмическом масштабе:

$$G_{x,m,ДВПФ}^{lg} = 10 \cdot \log_{10} \left[ \frac{G_{x1,m,ДВПФ}}{\max[G_{x1,m,ДВПФ}]} \right].$$

Результаты моделирования представлены на рис. 2–4.

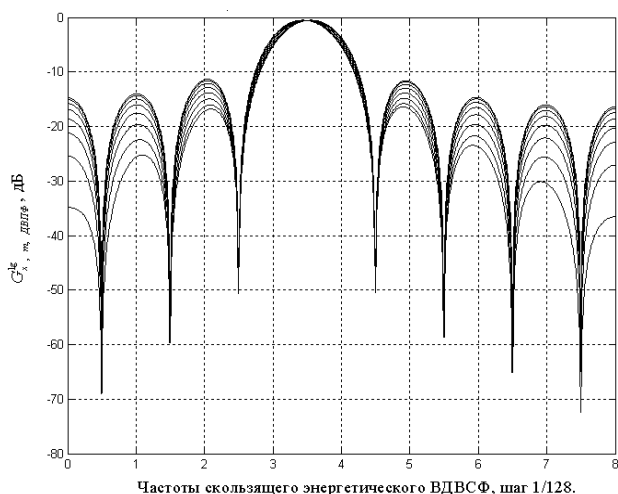
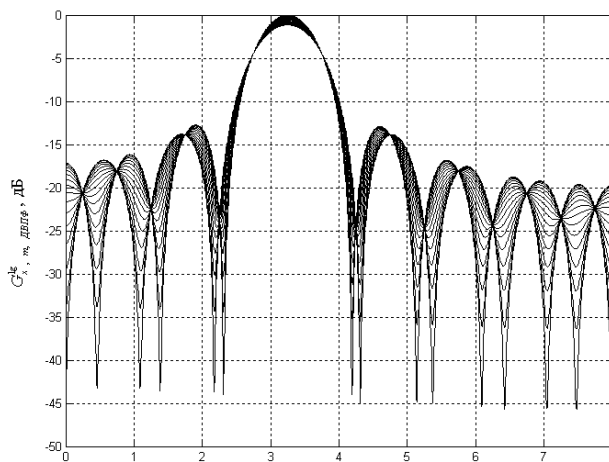


Рис. 2. Значения скользящего энергетического ВДВСФ-

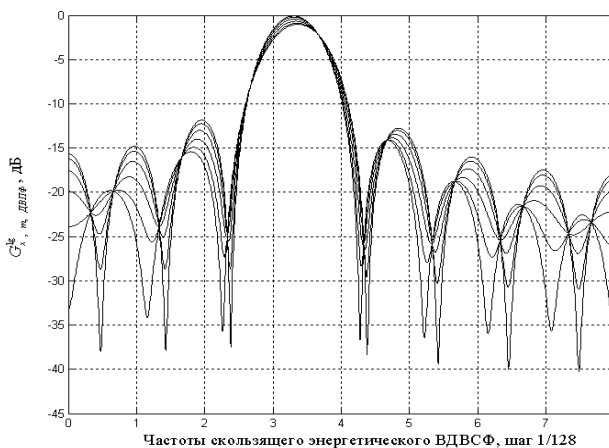
$$\text{сигнала } x(n) = \cos \left[ \frac{2\pi}{N} \left( k + \frac{1}{2} \right) n \right]$$



Частоты скользящего энергетического ВДВСФ, шаг 1/128.

Рис. 3. Значения скользящего энергетического ВДВСФ-

$$\text{сигнала } x(n) = \cos \left[ \frac{2\pi}{N} \left( k + \frac{1}{4} \right) n \right]$$



Частоты скользящего энергетического ВДВСФ, шаг 1/128

Рис. 3. Значения скользящего энергетического ВДВСФ-

$$\text{сигнала } x(n) = \cos \left[ \frac{2\pi}{N} \left( k + \frac{1}{3} \right) n \right]$$

«Размытость» кривых на рис. 2–4 характеризует изменение скользящего энергетического ВДВСФ исходного сигнала от сдвига при «естественном» (реальном) продолжении входного сигнала и, следовательно, характеризует на соответствующих частотах неинвариантность скользящего энергетического ВДВСФ сдвигу реального сигнала в прямоугольном временном окне.

**Заключение**

Преимущества цифровой обработки сигналов предопределяют постоянное расширение применения цифровых спектральных методов в различных областях научных исследований. Измерительные сигналы в каждой предметной области, как правило, обладают своей спецификой, что приводит к постоянному росту и числа исследований процессов, и эффектов, сопровождающих их цифровую обработку. Результаты исследований, изложенные в данной работе, позволяют расширить круг исследуемых процессов и эффектов, возникающих при измерении

скользящих взвешенных энергетических дискретно-временных спектров действительных гармонических сигналов на конечных интервалах и по-новому взглянуть на некоторые результаты косвенных измерений их спектральных характеристик.

#### Библиографические ссылки

1. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Виброакустическое диагностирование коробок передач станков цифровыми методами // Станки и инструмент. – 1983. – № 9. – С. 18–21.
2. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Обобщение дискретного преобразования Фурье для интерполяции во временной области // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 1983. – Т. XXVI, № 9. – С. 67–68.
3. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Временные окна при оценке энергетических спектров методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Автометрия. – 1983. – № 4. – С. 39–45.
4. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач интерполяции и свертки функций // Радиотехника и электроника. – 1984. – Т. 29. – № 8. – С. 1561–1570.
5. Пономарева О. В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базе параметрических экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов. – 2010. – № 2. – С. 7–11.
6. Пономарева О. В. Вероятностные свойства спектральных оценок, полученных методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. – 2010. – № 2 (16). – С. 36–41.
7. Алексеев В. А., Пономарев В. А., Пономарева О. В. Методология определения погрешностей измерения вероятностных характеристик случайных процессов, реализуемых процессорными измерительными средствами // Интеллектуальные системы в производстве. – 2010. – № 2 (16). – С. 91–99.
8. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. – 2011. – № 1. – С. 2–6.
9. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Скользящее параметрическое ДПФ в задачах обнаружения тональных компонент // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 4. – С. 2–7.
10. Пономарева О. В., Пономарева Н. В. Модификация фильтра на основе частотной выборки для решения задач цифровой обработки случайных процессов со скрытыми периодичностями // Интеллектуальные системы в производстве. – 2012. – № 2 (20). – С. 122–129.
11. Пономарева О. В. Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. 2012. – № 2. – С. 2–5.
12. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2013. – № 2. – С. 10–15.
13. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарев В. А. Обобщение алгоритма Герцеля для решения задач выявления скрытых периодичностей // Интеллектуальные системы в производстве. – 2013. – № 1 (21). – С. 41–46.
14. Пономарева О. В., Алексеев В. А., Пономарев А. В. Цифровой периодограммный анализ и проблемы его практического применения // Вестник Ижевского государственного технического университета. – 2013. – № 2 (58). – С. 130–133.
15. Пономарева О. В., Пономарева Н. В. Повышение точности и расширение функциональных возможностей цифровых фильтров на основе частотной выборки // Приборы и методы измерений. – 2013. – № 2 (7). – С. 114–119.
16. Пономарева О. В., Пономарев В. А. Измерение текущего энергетического фурье-спектра комплексных и действительных сигналов на конечных интервалах // Интеллектуальные системы в производстве. – 2013. – № 2 (22). – С. 149–157.
17. Пономарева О. В., Пономарев В. А., Пономарев А. В. Иерархическая морфологическо-информационная модель системы функционального диагностирования объектов на основе цифровой обработки сигналов // Датчики и системы. – 2014. – № 1 (176). – С. 2–8.
18. Пономарев В. А., Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Обобщение алгоритмов Герцеля и скользящего параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 1. – С. 3–11.
19. Пономарев В. А., Пономарева О. В., Пономарев А. В. Метод эффективного измерения скользящего параметрического спектра Фурье // Автометрия. – 2014. – Т. 50., № 2. – С. 31–38.
20. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Инвариантность текущего энергетического фурье-спектра действительных дискретных сигналов на конечных интервалах // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2014. – № 1. – С. 15–21.
21. Пономарева О. В. Измерение спектров комплексных сигналов на конечных интервалах методом аperiodического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. – 2014. – № 1 (23). – С. 100–107.
22. Пономарева О. В. Инвариантность скользящего энергетического спектра Фурье дискретных сигналов в базисной системе параметрических экспоненциальных функций // Вестник Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова. – 2014. – № 2 (62). – С. 102–106.
23. Пономарева О. В., Алексеев В. А., Пономарев А. В. Быстрый алгоритм измерения спектра действительных сигналов методом аperiodического дискретного преобразования Фурье // Вестник Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова. – 2014. – № 2 (62). – С. 106–109.
24. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Инвариантность текущего энергетического спектра Фурье комплексных дискретных сигналов на конечных интервалах // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. – 2014. – Т. 2. – С. 8–16.
25. Пономарева О. В. Неинвариантность скользящего энергетического параметрического фурье-спектра действительных тональных сигналов // Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 2. – С. 7–14.
26. Пономарева О. В., Тюрикова Е. Ф. Методы и алгоритмы спектрально-корреляционной компьютерной обработки электроэнцефалограмм // Современные информационные и электронные технологии. – 2014. – Т. 1, № 15. – С. 70–71.
27. Пономарев В. А., Пономарева О. В., Пономарева Н. В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Гильберта в частотной области // Современные информационные и электронные технологии. – 2014. – Т. 1, № 15. – С. 183–184.
28. Пономарев В. А., Пономарева О. В., Пономарев А. В. Обобщенная функционально-структурная модель информационно-измерительных систем функционального диаг-

ностирования объектов // Современные информационные и электронные технологии. – 2013. – Т. 1, № 14. – С. 115–118.

29. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Иерархическое морфологическо-информационное описание систем функционального диагностирования объектов // Современные информационные и электронные технологии. – 2013. – Т. 1, № 14. – С. 121–124.

30. Пономарева О. В., Пономарева Н. В. Модификация фильтра на основе частотной выборки путем обобщения разностного уравнения неперекрестивного гребчатого фильтра // Современные информационные и электронные технологии. – 2013. – Т. 1, № 14. – С. 244–247.

31. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Формализованное описание погрешностей измерения вероятностных характеристик случайных процессов процессорными измерительными средствами // Современные информационные и электронные технологии. – 2013. – Т. 1, № 14. – С. 90–93.

32. Пономарева О. В., Алексеев В. А., Пономарев А. В. Цифровой периодограммный анализ и проблемы его практического применения // Вестник Ижевского государственного технического университета. – 2013. – № 2 (58). – С. 130–133.

33. Пономарева О. В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базе параметрических экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов. – 2010. – № 2. – С. 7–11.

34. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. – 2011. – № 1. – С. 2–6.

35. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Инвариантность текущего энергетического фурье-спектра действительных дискретных сигналов на конечных интервалах // Технологии и конструирование в электронной аппаратуре. – 2014. – № 1. – С. 15–21.

36. Пономарева О. В. Неинвариантность скользящего энергетического параметрического фурье-спектра действительных тональных сигналов // Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 2. – С. 7–14.

37. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Инвариантность текущего энергетического спектра Фурье комплексных дискретных сигналов на конечных интервалах // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. – 2014. – Т. 2. – С. 8–16.

38. Пономарева О. В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базе параметрических экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов. – 2010. – № 2. – С. 7–11.

39. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. – 2011. – № 1. – С. 2–6.

\*\*\*

O. V. Ponomareva, PhD in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

A. V. Ponomarev, PhD in Economics, Chief of staff of Central Election Commission of Udmurt Republic

V. A. Ponomarev, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

#### Measurement of sliding weighted energy discrete-time spectrum of tonal components

*Methods and algorithms of measurement of sliding weighted energy discrete-time spectrum of harmonic components on finite intervals have been investigated. The results of theoretical and experimental research of indirect spectral measurements of tonal component characteristics are presented.*

**Keywords:** discrete signal, finite interval, sliding spectral measurements, parametric discrete exponential functions, invariance.

Получено: 22.10.14

УДК 621.391

О. В. Пономарева, кандидат технических наук, доцент  
Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

### ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ СПЕКТРОВ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ МЕТОДОМ МОДИФИЦИРОВАННОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

*Предложено модифицированное параметрическое дискретное преобразование Фурье для восстановления значений непрерывных дискретных сигналов. Разработан метод восстановления значений временных спектров дискретных сигналов на базе предложенного преобразования и показано, что предложенный метод обладает рядом преимуществ перед существующими методами.*

**Ключевые слова:** дискретный сигнал, конечный интервал, параметрические дискретные экспоненциальные функции, параметрическое дискретное преобразование Фурье, модифицированное параметрическое дискретное преобразование Фурье.

#### Введение

Дискретный базис Фурье (базис дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ)), благодаря ряду преимуществ перед другими базисами, занимает важное место в косвенных измерениях на конечных интервалах корреляционных функций и спектров дискретных сигналов. Разложение сигнала по систе-

ме ДЭФ носит название *дискретного преобразования Фурье (ДПФ)*, которое при дискретных косвенных измерениях является *измерительным преобразованием*, т. к. позволяет *однозначно представить* дискретный временной сигнал  $x(n)$ ;  $n = 0, (N - 1)$ , заданный на интервале в  $N$  отсчетов ( $N$ -интервале) в частотной области. Правда, с одним существенным