УДК 330.47

С. Л. Ким, кандидат физико-математических наук
Институт механики УрО РАН
Н. П. Шамаева, кандидат экономических наук, доцент
Удмуртский государственный университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ КООПЕРАЦИИ

Во многом перспективы развития российской экономики зависят от решения проблемы создания условий для устойчивого экономического роста, который, в первую очередь, предполагает качественные изменения. Только в этом случае можно надеяться, что Россия будет поддерживать территориальную целостность. Математическая модель научно-производственной кооперации, которая адекватно описывает динамику переменных, характеризующих активность. Модель может быть основой для постановки и решения задач теории оптимального управления взаимодействия науки и промышленности.

Ключевые слова: взаимодействие науки и производства, математическая модель динамики, линеаризованное уравнение динамики, логистическая кривая.

Научно-производственная кооперация является одним из определяющих факторов развития экономики [1]. К числу переменных, характеризующих процесс взаимодействия науки с производством (на корпоративном, региональном или национальном уровнях), относятся:

n – число используемых патентов на новые наукоемкие технологии;

w – средства на НИОКР (относительное количество: $w = \dfrac{w_1}{w_2}$, где w_1 – финансовые средства, направляемые на НИОКР; w_2 – общая сумма финансовых средств, используемых для производства продукции);

s – доля технологически продвинутого продукта, связанного с наукоемким производством ($s = \dfrac{s_1}{s_2}$, где s_1 – количество изделий, произведенных по новым технологиям, или количество технологически продвинутых изделий; s_2 – общее количество произведенных изделий);

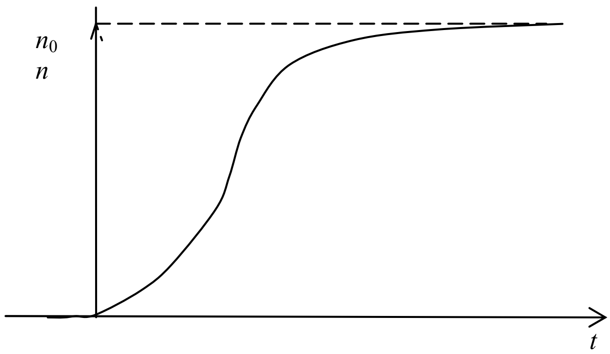
γ – степень технологического развития (γ характеризует технологическое отставание): $\gamma = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$, где γ_1 – число используемых новых передовых наукоемких технологий; γ_2 – общее число используемых технологий;

μ – относительная численность персонала, занятого НИОКР: $\mu = \dfrac{\mu_1}{\mu_2}$, где μ_1 – численность персонала, занятого НИОКР; μ_2 – общая численность персонала.

Математическая модель динамики этих переменных представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой описывает зависимость от времени этих переменных. Она имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}n(t) = k \cdot w \cdot n(t) \cdot (n_0 + \dfrac{d}{kw} - n(t)) - d \cdot n(t) + \Delta \cdot \mu^{\alpha}, \\ \dfrac{d}{dt}\gamma(t) = \sigma \cdot n(t) - f_1(\gamma(t)) + f_2(w(t)), \\ \dfrac{d}{dt}s(t) = \gamma \cdot (f_3(s(t)) - f_4(s(t))), \\ \dfrac{d}{dt}\mu(t) = f_5(\mu(t)) + \delta \cdot \gamma(t). \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь d – время, за которое число используемых патентов уменьшается в e раз при условии $k = \Delta = 0$, число патентов на изобретения в области определенной наукоемкой технологии хорошо описывается логистической кривой, являющейся решением уравнения для $n(t)$ системы (1).



Когда научное открытие или экспериментальная установка превращается в промышленное изделие, количество используемых патентов экспоненциально растет:

$$\frac{d}{dt}n(t) \approx kwn_0 n(t) \text{ или } n(t) \sim e^{-kw(t)n_0 t},$$

этот рост становится все менее заметным при больших t, когда уже «все» запатентовано, при $t \to \infty$, $n \to n_0$. Начальный экспоненциальный рост количества патентов и определяет коэффициент k. Δ – коэффициент пропорциональности между количеством исследовательских групп, работающих над определенным проектом, и ростом числа патентов; α – среднее число членов в такой группе.

Динамику технологического отставания описывает второе сверху уравнение системы (1). Входящие в него функции $f_1(\gamma(t))$ и $f_2(w(t))$ описывают рост технологического отставания при отсутствии финансирования НИОКР и скорость уменьшения технологического отставания, зависящую от степени финансирования НИОКР соответственно; σ – коэффициент пропорциональности между уменьшением технологического отставания и числом действующих патентов.

Третье сверху уравнение описывает динамику относительного количества технологически продвинутых изделий s в зависимости от потребности в данном продукте (спрос) $f_3(s(t))$ и наличия на рынке данной продукции (предложение) $f_4(s(t))$.

Динамику относительной численности персонала, занятого НИОКР, описывает самое нижнее из уравнений системы (1). Оно отражает зависимость скорости увеличения (уменьшения) относительной численности персонала занятого НИОКРом от относительного количества этого персонала $f_5(\mu(t))$ и технологического отставания (δ – коэффициент этой зависимости).

Линеаризуем систему уравнений (1) в окрестности ее стационарного решения, определяемого множеством условий: $\{\tilde{n} = n_0;\ \tilde{\mu} = 0;\ \tilde{w} = 0;\ \delta n_0 = f_1(\gamma_0) = 0;$ $\tilde{\gamma} = \gamma_0;\ \tilde{s} = s_0;\ f_3(s_0) = f_4(s_0);\ \tilde{\mu} = \mu_0;\ f_5(\mu_0) + \delta\cdot\gamma_0 = 0\}$. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}n(t) = -k\cdot w\cdot n_0\cdot(n-n_0)+\Delta\cdot\mu_0{}^{\alpha}, \\ \dfrac{d}{dt}\gamma(t) = \sigma\cdot(n-n_0)-\dfrac{d}{dt}f_1(\gamma_0)\cdot(\gamma-\gamma_0)+\dfrac{d}{dt}f_2(0)\cdot w, \\ \dfrac{d}{dt}\mu(t) = \dfrac{d}{dt}f_5(\mu_0)\cdot(\mu-\mu_0)+\delta\cdot(\gamma-\gamma_0), \\ \dfrac{d}{dt}s(t) = \gamma_0\cdot\left(\dfrac{d}{dt}f_3(s_0)-\dfrac{d}{dt}f_4(s_0)\right)\cdot(s-s_0). \end{cases} \quad (2)$$

Введем новые переменные: $n - n_0 = x^1$, $\gamma - \gamma_0 = x^2$, $\mu - \mu_0 = x^3$, тогда первые три уравнения системы (2) примут вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x^1 = -k\cdot w\cdot n_0\cdot x^1+\Delta\cdot\mu_0{}^{\alpha}, \\ \dfrac{d}{dt}x^2 = \sigma\cdot x^1-\dfrac{d}{dt}f_1(\gamma_0)\cdot x^2+\dfrac{d}{dt}f_2(0)\cdot w, \\ \dfrac{d}{dt}x^3 = \dfrac{d}{dt}f_5(\mu_0)\cdot x^3+\delta\cdot x^2. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим теперь переменные x_1, x_2 и x_3 как компоненты вектора $\vec{x} = x_1\cdot\vec{e}_1 + x_2\cdot\vec{e}_2 + x_3\cdot\vec{e}_3$. С помощью оператора А, который в базисе $\vec{e}_1$, ..., $\vec{e}_3$ имеет матрицу $A\,\vec{e}_i = \alpha_i^k\ \vec{e}_k$:

$$\left\|\alpha_i^k\right\| = \begin{pmatrix} -kwn_0 & 0 & 0 \\ \sigma & -\dfrac{d}{dt}f_1(\gamma_0) & 0 \\ 0 & \delta & \dfrac{d}{dt}f_5(\mu_0) \end{pmatrix} \quad (4)$$

и вектора $\vec{u} = \Delta\cdot\mu_0^{\alpha}\cdot\vec{e}_1 + \dfrac{d}{dt}f_2(0)\cdot w\cdot\vec{e}_2$, систему уравнений (3) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x}+\vec{u} = A(\vec{x}+A^{-1}\vec{u}) \quad (5)$$

или

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y}, \quad (6)$$

где $\vec{y} = \vec{x} + A^{-1}\vec{u}$.

Решение уравнения (6) имеет вид:

$$\vec{y} = \vec{x} + A^{-1}\vec{u} = e^{At}\vec{y}_0$$

или

$$\vec{x} = e^{At}\vec{y}_0 - A^{-1}\vec{u}, \quad (7)$$

где постоянный вектор $\vec{y}_0$ определяется начальными условиями:

$$\vec{y}_0 = \vec{x}(0)+A^{-1}\vec{u} = x^1(0)\vec{e}_1+x^2(0)\vec{e}_2+$$
$$+x^3(0)\vec{e}_3+\Delta\mu_0^{\alpha}A^{-1}\vec{e}_1+\frac{d}{dt}f_2(0)wA^{-1}\vec{e}_2.$$

Здесь $x^1(0) = n(0) - n_0$; $x^2(0) = \gamma(0) - \gamma_0$; $x^3(0) = \mu(0) - \mu_0$ – начальные отклонения системы от положения равновесия (стационарной точки). A^{-1} – оператор, обратный к оператору А.

Его матрица находится из соотношения:

$$AA^{-1}=1, \quad (8)$$

что соответствует матричному уравнению:

$$\begin{pmatrix} -kwn_0 & 0 & 0 \\ \sigma & -\dfrac{d}{dt}f_1(\gamma_0) & 0 \\ 0 & \delta & \dfrac{d}{dt}f_5(\mu_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -kwn_0b_{11} & -kwn_0b_{12} & -kwn_0b_{13} \\ \delta b_{11}-\dfrac{d}{dt}f_1(\gamma_0)b_{21} & \delta b_{12}-\dfrac{d}{dt}f_1(\gamma_0)b_{22} & \delta b_{13}-\dfrac{d}{dt}f_1(\gamma_0)b_{23} \\ \delta b_{21}+\dfrac{d}{dt}f_5(\mu_0)b_{31} & \delta b_{22}+\dfrac{d}{dt}f_5(\mu_0)b_{32} & \delta b_{23}+\dfrac{d}{dt}f_5(\mu_0)b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

из которого и следует система уравнений для нахождения элементов матрицы оператора A^{-1}:

$$b_{11}=-\frac{1}{kwn_0};\ b_{12}=0;\ b_{13}=0;$$

$$-\frac{\delta}{kwn_0}-\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)b_{21}=0\Rightarrow b_{21}=-\frac{\delta}{\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)kwn_0};$$

$$\delta b_{12}-\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)b_{22}=1\Rightarrow b_{22}=-\frac{1}{\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)};$$

$$\delta b_{13}-\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)b_{23}=0\Rightarrow b_{23}=0;$$

$$\delta b_{21}+\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)b_{31}=0\Rightarrow b_{31}=-\frac{\delta}{\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)}b_{21}=$$

$$=\frac{\delta\sigma}{\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)kwn_0};$$

$$\delta b_{22}+\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)b_{32}=0\Rightarrow b_{32}=-\frac{\delta}{\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)}b_{22}=$$

$$=\frac{\delta}{\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)};$$

$$\delta b_{23}+\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)b_{33}=1\Rightarrow b_{33}=\frac{1}{\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)}.$$

Таким образом, матрица оператора A^{-1} имеет вид:

$$A^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\mathrm{kwn}_0} & 0 & 0 \\ -\frac{\delta}{\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)kwn_0} & -\frac{1}{\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)} & 0 \\ \frac{\delta\sigma}{\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)kwn_0} & \frac{\delta}{\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)} & \frac{1}{\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Найдем теперь собственные значения и собственные векторы оператора А. Уравнение для их нахождения имеет вид:

$$A\vec{\xi}=\lambda\vec{\xi},\ \text{или}\ (A-\lambda 1)\vec{\xi}=\vec{0}=\xi^i(A-\lambda 1)\vec{e}_i, \tag{10}$$

что означает линейную зависимость векторов $(A-\lambda 1)\vec{e}_i$, а значит, равенство 0 их детерминанта:

$$0=Det((A-\lambda 1)\vec{e}_1,(A-\lambda 1)\vec{e}_2,(A-\lambda 1)\vec{e}_3)=$$

$$=\begin{vmatrix} -(kwn_0+\lambda) & 0 & 0 \\ \delta & -\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)-\lambda & 0 \\ 0 & \delta & \frac{d}{dt}f_5(\mu_0)-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=-(kwn_0+\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)-\lambda & 0 \\ \delta & \frac{d}{dt}f_5(\mu_0)-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(kwn_0+\lambda)\cdot\left(\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)+\lambda\right)\cdot\left(\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)-\lambda\right),$$

что и дает 3 собственных значения оператора А: $\lambda_1=-kwn_0$; $\lambda_2=-\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)$; $\lambda_3==\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)$. Вычислим собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям.

Для собственного значения λ_1 уравнение (10) примет вид:

$$(A-\lambda_1 1)\vec{\xi}_1=0\ \text{или}$$

$$\vec{0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \delta & kwn_0-\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0) & 0 \\ 0 & \delta & \frac{d}{dt}f_5(\mu_0)+kwn_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

что и дает систему уравнений для определения компонент вектора $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} \delta x+\left[kwn_0-\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)\right]y=0, \\ \delta y+\left[\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)+kwn_0\right]z=0. \end{cases} \tag{11}$$

Решение этой системы уравнений имеет вид:

$$y=1,\ x=\frac{1}{\sigma}\left[\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)-kwn_0\right],\ z=\frac{-\delta}{\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)+kwn_0}.$$

И, таким образом, собственный вектор $\vec{\xi}_1$ имеет вид:

$$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma}\left[\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)-kwn_0\right] \\ 1 \\ \frac{-\delta}{\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)+kwn_0} \end{pmatrix}.$$

Аналогично вычисляются компоненты собственных векторов $\vec{\xi}_2$ и $\vec{\xi}_3$:

$$\vec{0} = (A - \lambda_2 1)\vec{\xi}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} f_1(\gamma_0) - kwn_0 & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \delta & \left(\frac{d}{dt} f_5(\mu_0) + \frac{d}{dt} f_1(\gamma_0)\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

отсюда $\left(\frac{d}{dt} f_1(\gamma_0) - kwn_0\right) \cdot x_1 = 0$; $\sigma \cdot x_1 = 0$; $\delta \cdot y_1 + \left(\frac{d}{dt} f_5(\mu_0) + \frac{d}{dt} f_1(\gamma_0)\right) \cdot z_1 = 0$, что дает: $x_1 = 0$; $y_1 = \dfrac{-\left(\frac{d}{dt} f_5(\mu_0) + \frac{d}{dt} f_1(\gamma_0)\right)}{\delta}$; $z_1 = 1$. И вектор $\vec{\xi}_2$ имеет вид:

$$\vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-\left(\frac{d}{dt} f_5(\mu_0) + \frac{d}{dt} f_1(\gamma_0)\right)}{\delta} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение

$$\vec{0} = (A - \lambda_3 1)\vec{\xi}_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} -\left(kwn_0 + \frac{d}{dt} f_5(\mu_0)\right) & 0 & 0 \\ \sigma & -\left(\frac{d}{dt} f_1(\gamma_0) + \frac{d}{dt} f_5(\mu_0)\right) & 0 \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

дает условия для определения компонент вектора $\vec{\xi}_3$:

$$-\left(kwn_0 + \frac{d}{dt} f_5(\mu_0)\right) \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0,$$

$$\sigma \cdot x_2 - \left(\frac{d}{dt} f_1(\gamma_0) + \frac{d}{dt} f_5(\mu_0)\right) \cdot y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 0,$$

$$\delta y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 0.$$

Отсюда $\vec{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Теперь, вернувшись к решению (7), мы можем разложить вектор $\vec{y}_0$ по собственным векторам оператора A: $\vec{\xi}_1$, $\vec{\xi}_2$ и $\vec{\xi}_3$:

$$A\vec{\xi}_1 = -kwn_0\vec{\xi}_1;\ A\vec{\xi}_2 = -\frac{d}{dt} f_1(\gamma_0)\vec{\xi}_2;$$

$$A\vec{\xi}_3 = \frac{d}{dt} f_5(\mu_0)\vec{\xi}_3;\ \vec{y}_0 = c_1\vec{\xi}_1 + c_2\vec{\xi}_2 + c_3\vec{\xi}_3 =$$

$$= (n(0) - n_0)\vec{e}_1 + (\gamma(0) - \gamma_0)\vec{e}_2 + (\mu(0) - \mu_0)\vec{e}_3 +$$

$$+ \Delta\mu_0^\alpha A^{-1}\vec{e}_1 + \frac{d}{dt} f_2(0) w A^{-1}\vec{e}_2. \qquad (12)$$

Из этого равенства (12) определяются коэффициенты разложения $\vec{y}_0$ по собственным векторам $\vec{\xi}_1$, $\vec{\xi}_2$, $\vec{\xi}_3$ оператора A: c_1, c_2 и c_3. Подставляя это разложение в решение (7) уравнения (5), получим:

$$\vec{X} = e^{At}\vec{y}_0 - A^{-1}\vec{u} = e^{At}(c_1\vec{\xi}_1 + c_2\vec{\xi}_2 + c_3\vec{\xi}_3) - A^{-1}\begin{pmatrix} \Delta\mu_0^\alpha \\ \frac{d}{dt} f_2(0) w \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 e^{-kwn_0 t}\vec{\xi}_1 + c_2 e^{-\frac{d}{dt} f_1(\gamma_0) t}\vec{\xi}_2 + c_3 e^{\frac{d}{dt} f_5(\mu_0) t}\vec{\xi}_3 +$$

$$+ \begin{pmatrix} \dfrac{1}{kwn_0} & 0 & 0 \\ \dfrac{\sigma}{\frac{d}{dt} f_1(\gamma_0) kwn_0} & \dfrac{1}{\frac{d}{dt} f_1(\gamma_0)} & 0 \\ \dfrac{-\delta\sigma}{\frac{d}{dt} f_5(\mu_0) \frac{d}{dt} f_1(\gamma_0) kwn_0} & \dfrac{-\delta}{\frac{d}{dt} f_5(\mu_0) \frac{d}{dt} f_1(\gamma_0)} & \dfrac{1}{\frac{d}{dt} f_5(\mu_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mu_0^\alpha \\ \frac{d}{dt} f_5(0) w \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 e^{-kwn_0 t} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sigma}\left[\frac{d}{dt} f_1(\gamma_0) - kwn_0\right] \\ 1 \\ \dfrac{-\delta}{\frac{d}{dt} f_5(\mu_0) + kwn_0} \end{pmatrix} +$$

$$+\,c_2 e^{-\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)t}\begin{pmatrix}0\\ -\dfrac{\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)+\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)}{\delta}\\ 1\end{pmatrix}+c_3 e^{\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{\Delta\mu_0^{\alpha}}{kwn_0}\\ \dfrac{\sigma\Delta\mu_0^{\alpha}}{\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)kwn_0}+\dfrac{\frac{d}{dt}f_2(0)}{\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)}\\ -\dfrac{\delta\sigma\Delta\mu_0^{\alpha}+\delta\frac{d}{dt}f_2(0)kw^2n_0}{\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)kwn_0}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{c_1e^{-kwn_0t}}{\sigma}\left[\dfrac{d}{dt}f_1(\gamma_0)-kwn_0\right]+\dfrac{\Delta\mu_0^{\alpha}}{kwn_0}\\ c_1e^{-kwn_0t}-c_2e^{-\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)t}\dfrac{\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)+\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)}{\delta}+\dfrac{\sigma\Delta\mu_0^{\alpha}+\frac{d}{dt}f_2(0)w^2kn_0}{\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)kwn_0}\\ \dfrac{-c_1\delta e^{-kwn_0t}}{\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)+kwn_0}+c_2e^{-\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)t}+c_3e^{\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)t}-\dfrac{\delta\sigma\Delta\mu_0^{\alpha}+\delta\frac{d}{dt}f_2(0)w^2kn_0}{\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)kwn_0}\end{pmatrix}.$$

Компоненты этого вектора позволяют показать зависимость от времени динамических переменных n, γ, μ и s, характеризующих нашу систему:

$$n=n_0+x_1=n_0+\frac{\Delta\mu_0^{\alpha}}{kwn_0}+\frac{c_1}{\sigma}e^{-kwn_0t}\left[\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)-kwn_0\right].$$

При $t\to\infty$ $n\to n_0+\dfrac{\Delta\mu_0^{\alpha}}{kwn_0}$ стационарному состоянию. Очевидным становится тот факт, что обильное финансирование w>>1 снижает стационарное количество используемых патентов, поскольку теряется стимул.

$$\gamma=\gamma_0+x_2=\gamma_0+\frac{\sigma\Delta\mu_0^{\alpha}+kn_0\frac{d}{dt}f_2(0)w^2}{\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)kwn_0}+$$
$$+\,c_1e^{-kwn_0t}-\frac{c_2}{\delta}e^{-\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)t}\left(\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)+\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)\right).$$

Для технологического отставания γ следует различать два варианта поведения:

если $\dfrac{d}{dt}f_1(\gamma_0)+\dfrac{d}{dt}f_5(\mu_0)=0$, то при $t\to\infty$

$\gamma\to\gamma_0+\dfrac{\sigma\Delta\mu_0^{\alpha}+kn_0\frac{d}{dt}f_2(0)w^2}{\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)kwn_0}\equiv\tilde{\gamma}$, и при хорошем финансировании (w>>1) стационарная точка $\tilde{\gamma}$, к которой стремится технологическое отставание при $t\to\infty$, будет прямо пропорционально финансированию $\left(\text{с коэффициентом } \dfrac{\frac{d}{dt}f_2(0)}{\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)}\right)$:

$\tilde{\gamma}\approx\gamma_0+\dfrac{\frac{d}{dt}f_2(0)}{\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)}w$, а при плохом финансировании (w<<1) $\tilde{\gamma}\approx\gamma_0+\dfrac{\sigma\Delta\mu_0^{\alpha}}{\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)kn_0w}$ и уменьшение степени технологического отставания может быть получено за счет увеличения относительной численности персонала, занятого НИОКР μ_0.

Если же $\dfrac{d}{dt}f_1(\gamma_0)+\dfrac{d}{dt}f_5(\mu_0)\neq 0$, то, поскольку $\dfrac{d}{dt}f_1(\gamma_0)$<0, происходит бифуркация (т. е. изменение динамического поведения) системы к новому положению равновесия ($t\to\infty$):

$$\gamma\to\gamma_0+\frac{\sigma\Delta\mu_0^{\alpha}+kn_0\frac{d}{dt}f_2(0)w^2}{\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)kwn_0}-$$
$$-\frac{c_2}{\delta}A\left(\frac{d}{dt}f_1(\gamma_0)++\frac{d}{dt}f_5(\mu_0)\right),$$

здесь А, характеризующая отклонение системы от старого положения равновесия при переходе к новому, определяется разложением в ряд Тейлора правых частей системы уравнений (1) с точностью до более высоких степеней, чем первая.

Зависимость от времени относительной численности персонала, занятого НИОКР, описывается функцией $\mu(t)$:

$$\mu = \mu_0 + x^3 = \mu_0 - \frac{c_1 e^{-kwn_0 t}}{\frac{d}{dt} f_5(\mu_0) + kwn_0} - c_2 e^{-\frac{d}{dt} f_1(\gamma_0) t} +$$

$$+ c_3 e^{\frac{d}{dt} f_5(\mu_0) t} - \frac{\delta\sigma\Delta\mu_0^\alpha + \delta \frac{d}{dt} f_2(0) k n_0 w^2}{\frac{d}{dt} f_5(\mu_0) \frac{d}{dt} f_1(\gamma_0) kwn_0},$$

так как $\frac{d}{dt} f_1 < 0$, $\frac{d}{dt} f_5 > 0$, то в условиях экономического кризиса $c_2 = 0$ и $c_3 = 0$, $w << 1$, $t \to \infty$ $\mu \to \mu_0 - \frac{\delta\sigma\Delta\mu_0^\alpha}{\frac{d}{dt} f_5(\mu_0) \frac{d}{dt} f_1(\gamma_0) kwn_0} \langle\langle 1$. В условиях экономического роста $c_2 \neq 0$ и $c_3 \neq 0$ и μ растет:

$$\mu \approx c_2 e^{-\frac{d}{dt} f_1(\gamma_0) t} + c_3 e^{\frac{d}{dt} f_5(\mu_0) t},$$

т. е. происходит бифуркация к новому положению равновесия.

Доля технологически продвинутого продукта s определяется балансом спроса и предложения. Действительно линеаризованное уравнение динамики для s легко решается и дает зависимость s от времени t:

$$s = s_0 + c_4 \exp\left\{ \gamma_0 \left(\frac{d}{dt} f_3(s_0) - \frac{d}{dt} f_4(s_0) \right) t \right\},$$

если спрос и предложение сбалансированы $\frac{d}{dt} f_3(s_0) = \frac{d}{dt} f_4(s_0)$, то $s = s_0 + c_4$, система не является асимптотически устойчивой, c_4 может быть случайной величиной и s флуктуирует вокруг положения равновесия s_0 – среднего количества выпуска наукоемкой продукции.

Если же $\frac{d}{dt} f_3(s_0) \langle \frac{d}{dt} f_4(s_0)$, предложение наукоемкой продукции больше, чем спрос на нее (например, в случае страны, живущей за счет экспорта своих природных ресурсов), то $s \to s_0$ и s_0 – асимптотически устойчивое положение равновесия (которое в случае технологически отсталой страны может быть равно 0).

Если, напротив, $\frac{d}{dt} f_3(s_0) \rangle \frac{d}{dt} f_4(s_0)$, т. е. спрос на технологически развитую продукцию растет, опережая предложение, то производство высокотехнологической продукции s экспоненциально растет.

Таким образом, построенная математическая модель деятельности научно-производственной кооперации достаточно адекватно описывает динамику переменных, характеризующих эту деятельность. Поэтому она может быть взята за основу при постановке и решении задач теории оптимального управления функционирования научно-производственной кооперацией.

Другое возможное использование этой модели – это изучение функционирования научно-производственной кооперации в любых [2] формах ее проявления во всех возможных точках этой модели. Для этого необходимо найти все стационарные точки (1) и изучить динамику переходов из одной стационарной точки в другую при изменении параметров, входящих в уравнение (1), что и является основной задачей синергетики. Чтобы это сделать, надо разложить правые части уравнений, входящих в (1), с точностью до членов более высокого порядка малости, чем в случае линеаризации.

Библиографические ссылки

1. *Шамаева Н. П.* Оценка современного состояния и возможных перспектив развития научно-производственной кооперации в Удмуртской Республике // Вестник Удмуртского университета. – 2012. – № 2-3. – С. 80–85.

2. *Шамаева Н. П., Мохначев К. С.* Интеграция образования, науки и бизнеса в регионе в условиях модернизации экономики // Экономика образования. – 2012. – № 5. – С. 46–53.

* * *

S. L. Kim, PhD (Physics and Mathematics), Institute of Mechanics UB RAS
N. P. Shamaeva, PhD in Economics, Associate Professor, Udmurt State University

Mathematical modeling of processes in the scientific-industrial cooperation

In many aspects prospects of development of Russian economy depend on the solution of the problem of creating conditions for sustained economic growth which, first of all, assumes high-quality changes. Only in this case it is possible to hope that Russia will keep the territorial integrity. A mathematical model of the scientific-production cooperation, which adequately describes the dynamics of the variables characterizing the activity, is given. The model can be the basis for the formulation and solution of problems of the theory of optimal control of the interaction of science and industry.

Keywords: science and industry cooperation, dynamics mathematical model, linearized dynamic equation, logistic curve.

Получено: 26.12.14