

УДК 534.121.2+539.382.2

М. В. Данилов, кандидат технических наук, докторант

Д. Р. Шишов, аспирант

ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО ЛЕНТОЧНОГО НОСИТЕЛЯ ИНФОРМАЦИИ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

*Исследована тонкая упругая пластинка, которая свободно поддерживается на коротких сторонах и подвергается постоянному натяжению в продольном направлении. Выведены зависимости между степенью нелинейности и параметрами системы. Приведены формулы для определения максимального провисания ленты.*

**Ключевые слова:** тонкая лента, упругая пластинка, рэлеевские волны, прогиб пластинки, геометрическая нелинейность.

В качестве механической модели ленты рассматриваем тонкую упругую пластинку, испытывающую большие деформации. Материал пластинки будем считать (в данной работе) идеально упругим, подчиняющимся закону Гука.

Для составления уравнения движения используем метод Рэлея [1]. В соответствии с этим методом составляем лагранжиан системы (разность кинетической и потенциальной энергии) на основе выражений для собственных форм линейной задачи, удовлетворяющих все граничные условия и имеющий зависящие от времени коэффициенты (обобщенные координаты), определяемые из нелинейных уравнений движения Лагранжа второго рода [2].

Рассматриваемая пластинка свободно оперта по коротким сторонам и подвержена постоянному на-

тяжению в продольном направлении (рис. 1). В первом приближении можно считать, что

$$v = 0, \quad u = u(x, t), \quad w = w(x, t).$$

Будем исходить из дифференциальных уравнений для перемещений и записанных в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial w} - \frac{\partial L}{\partial w} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $L = T - (U_p - U_u)$  – функция Лагранжа;  $T$  – кинетическая энергия пластинки;  $U_p$  – потенциальная энергия растяжения;  $U_u$  – потенциальная энергия изгиба.

Кинетическая и потенциальная энергии выражаются через перемещения следующим образом [3]:

$$\left\{ \begin{aligned} T &= \frac{\rho \delta}{2} \int_0^l \int_0^H (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx dy, \\ U_p &= \frac{E \delta}{2(1-\nu^2)} \int_0^l \int_0^H \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^2 + \right. \\ &+ 2\nu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{1-\nu}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \left. \right\} dx dy, \quad (2) \\ U_u &= \frac{1}{2} D \int_0^l \int_0^H \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right\} dx dy. \end{aligned} \right.$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $D = \frac{E \delta^3}{12(1-\nu^2)}$  – изгибная жесткость;  $\rho$  – плотность материала пластинки. Решение задачи ищем в виде:

$$u(x, t) = u_1(t) \cos \frac{n\pi}{l} x + \varepsilon x, \quad w(x, t) = w_1(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (3)$$

где  $\varepsilon = \sigma/E$  – относительное удлинение.

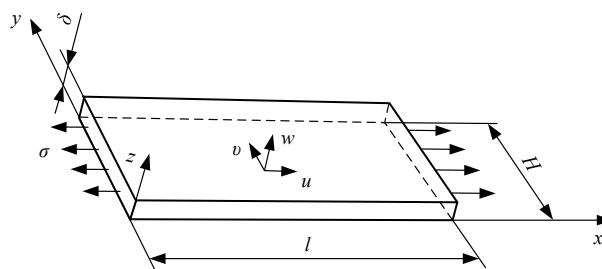


Рис. 1. Распределение действующих сил и геометрические параметры пластинки (отрезка магнитной ленты):  $u, v, w$  – перемещения в соответствующих координатах  $x, y, z$ ;  $\sigma$  – растягивающие усилия;  $H, l, \delta$  – соответственно ширина, длина и толщина пластинки

Подставляя выражения (3) в формулы (2), получаем:

$$\begin{cases} T = \frac{\rho l H \delta}{4} (\dot{u}_1^2(t) + \dot{w}_1^2(t)), \\ U_p = \frac{E l H \delta}{2(1-\nu^2)} \left[ \varepsilon^2 - \frac{4\varepsilon u_1(t)}{2l^2} + \frac{\pi^2 u_1^2(t)}{2l^2} + \frac{\varepsilon \pi^2 w_1^2(t)}{2l^2} - \frac{2\pi^2 u_1(t) w_1^2(t)}{3l^3} + \frac{3\pi^4 w_1^4(t)}{32l^4} \right] \\ U_u = \frac{\pi^4 E H \delta^3 w_1^2(t)}{48(1-\nu^2)l^3}. \end{cases} \quad (4)$$

Первый интеграл системы (1) – полная механическая энергия пластинки [4]:

$$N = T + U_p + U_u. \quad (5)$$

Учитывая формулы (4), преобразуем равенство (5):

$$\begin{aligned} N = & \frac{\pi l H \delta}{4} (\dot{u}_1^2(t) + \dot{w}_1^2(t)) + \frac{E l H \delta}{2(1-\nu^2)} \times \\ & \times \left( \varepsilon^2 - \frac{4\varepsilon u_1(t)}{l} + \frac{\pi^2 u_1^2(t)}{2l^2} + \frac{\varepsilon \pi^2}{2} + \frac{\pi^4 \delta^2}{24l^2} \right) \frac{w_1^2(t)}{l^2} - \\ & - \frac{2\pi^2 u_1(t) w_1^2(t)}{3l^3} + \frac{3\pi^4 w_1^4(t)}{32l^4}. \end{aligned} \quad (6)$$

Пренебрегая инерцией продольных колебаний, как не имеющей существенного значения, из первого уравнения системы (1) с учетом формул (4) находим:

$$\frac{u_1(t)}{l} = \frac{4\varepsilon}{\pi^2} + \frac{2w_1^2(t)}{3l^2}.$$

Тогда уравнение (6) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{(1-\nu^2)\rho}{2E} \dot{w}_1^2(t) = & \frac{2(1-\nu^2)N}{E l H \delta} - \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \varepsilon^2 - \\ - \left[ \left( \frac{\pi^2}{2} - \frac{8}{3} \right) \varepsilon + \frac{\pi^4 \delta^2}{24l^2} \right] \frac{w_1^2(t)}{l^2} - & \pi^2 \left( \frac{3\pi^2}{32} - \frac{2}{9} \right) \frac{w_1^4(t)}{l^4}. \end{aligned} \quad (7)$$

Полученное уравнение движения (7) зависит от восьми постоянных параметров, характеризующих геометрические и механические свойства системы. Количество постоянных параметров можно уменьшить, переходя к более удобным безразмерным комбинациям:

$$\tau = t/l t_0, \quad W_1(\tau) = w_1(t)/l w_0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} t_0 = & \left( \frac{(1-\nu^2)}{2E \left( \left( \frac{\pi^2}{2} - \frac{8}{3} \right) \varepsilon + \frac{\pi^4 \delta^2}{24l^2} \right)} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ w_0 = & \left( \frac{2(1-\nu^2)N - \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \varepsilon^2}{\left( \frac{\pi^2}{2} - \frac{8}{3} \right) \varepsilon + \frac{\pi^4 \delta^2}{24l^2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (9)$$

$\tau$  – период колебаний.

Тогда уравнение (7) можно записать в виде:

$$\dot{W}_1(\tau) = \pm \sqrt{1 - W_1^2(\tau) - \alpha W_1^4(\tau)}, \quad (10)$$

где

$$\alpha = \frac{\pi^2 \left( \frac{2\pi^2}{32} - \frac{2}{9} \right) \left( \frac{2(1-\nu^2)N}{E l H \delta \varepsilon^2} - \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \right)}{\left( \left( \frac{\pi^2}{2} - \frac{8}{3} \right) + \frac{\pi^4 \delta^2}{24\varepsilon l^2} \right)^2}. \quad (11)$$

Формально, анализируя данную формулу, можно было бы прийти к выводу, что параметр нелинейности  $\alpha$  может принимать как положительные, так и отрицательные (при достаточно большом  $\varepsilon$ ) значения. Однако согласно физическому смыслу задачи, полная энергия ленты всегда больше своей части, состоящей только из энергии растяжения, и, следовательно, всегда  $\alpha \geq 0$ . Как видно из формулы (11), безразмерный параметр нелинейности  $\alpha$  зависит от полной энергии пластинки (энергии нелинейных колебаний и энергии растяжения), предварительного натяжения  $\varepsilon = \sigma/E$ , отношения  $\delta/l$ , геометрических размеров ленты  $l, H, \delta$  и модуля Юнга  $E$ .

На рис. 2 представлено семейство соответствующих кривых, позволяющих найти параметр нелинейности в зависимости от всех физических параметров задачи. Заметим, что при  $\alpha = 0$  задача переходит в линейную. С увеличением предварительного натяжения и отношения  $\delta/l$  степень нелинейности убывает, а с увеличением энергии  $N$  – возрастает.

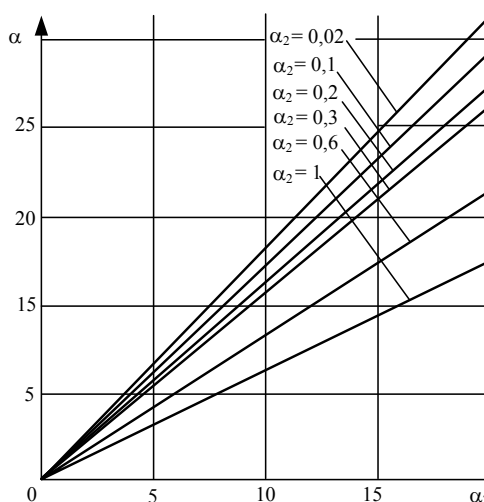


Рис. 2. Зависимость параметра  $\alpha$  от энергии колебаний и от предварительного натяжения  $\varepsilon$ :  $\alpha_2 = \frac{2(1-\nu^2)N}{Hl\delta E \varepsilon^2}$ ;

$$\alpha_3 = \frac{\pi^4 \delta^2}{24l^2 \varepsilon}$$

На фазовой плоскости уравнение (10) представляет собой зависящее от единственного параметра нелинейности семейство замкнутых фазовых траекторий (рис. 3), окружающих особую точку типа центр. При  $\alpha = 0$ , когда нелинейность отсутствует, уравнение (10) обращается в уравнение окружности:

$$\dot{W}_1^2(\tau) + W_1^2(\tau) = 1.$$

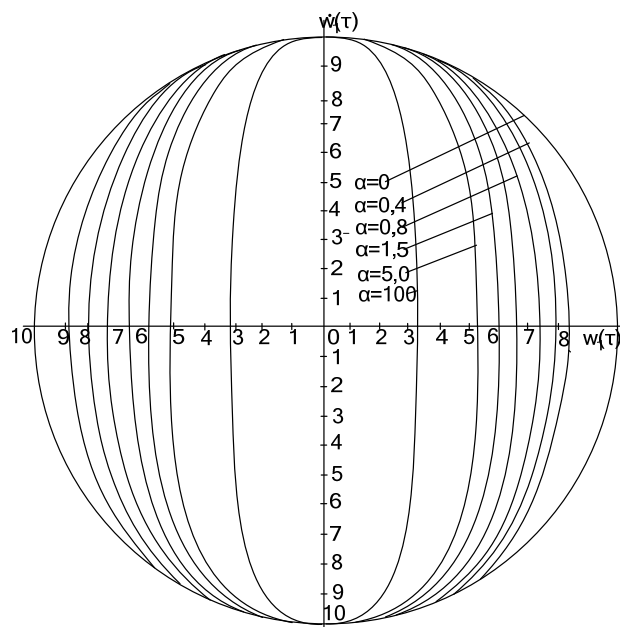


Рис. 3. Семейство фазовых траекторий нелинейных колебаний магнитной ленты при различных значениях параметра

С увеличением степени нелинейности  $\alpha$  увеличивается жесткость ленты, фазовые траектории искажаются, оставаясь замкнутыми траекториями, как и в любом случае консервативной нелинейной системы [5]. Это указывает на то, что колебания остаются периодическими, хотя период колебаний в большой мере зависит от энергии колебаний или от амплитуды.

Прогиб пластинки достигает максимального значения, когда потенциальная энергия равна полной энергии, т. е. когда кинетическая энергия равна нулю.

Предположив  $\dot{W}_1(\tau) = 0$ , из уравнения (10) получим  $\alpha W_1^4(\tau) + W_1^2(\tau) - 1 = 0$ , откуда

$$\max \frac{w_1(t)}{lw_0} = \sqrt{\frac{1+4\alpha-1}{2\alpha}}. \quad (12)$$

Из равенств (10) и (12) получаем формулу для определения безразмерного периода колебаний:

$$\tau/l\tau_0 = 4 \int_0^{\max \frac{w_1(t)}{lw_0}} \frac{dW_1(\tau)}{\sqrt{1-W_1^2(\tau)-\alpha W_1^4(\tau)}}. \quad (13)$$

С ростом параметра нелинейности безразмерная амплитуда колебаний несколько уменьшается, амплитуда скорости не изменяется, а безразмерный период колебаний убывает (рис. 4).

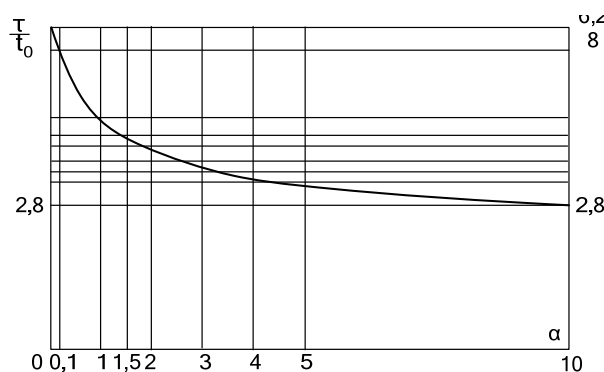


Рис. 4. Зависимость безразмерного периода колебаний от параметра нелинейности  $\alpha$

Для определения соответствующих размерных величин необходимо пользоваться формулами (3), (8) и (9). Таким путем можно, например, найти эпюру прогиба:  $w(x, t) = lw_0 W_1(\tau) \sin \frac{\pi x}{l}$ .

#### Библиографические ссылки

1. Стретт Дж. В. Теория звука. – Т. 1. – М.: Гостехиздат, 1955. – 504 с.
2. Стоккер Дж. Нелинейные колебания в электрических и механических системах. – М.: ИЛ, 1952. – 264 с.
3. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
4. Стоккер Дж. Указ. соч.
5. Там же.

\*\*\*

M. V. Danilov, PhD in Engineering, DSc Applicant, Kalashnikov ISTU  
D. R. Shishov, Post-graduate, Kalashnikov ISTU

#### Investigation of frequencies of non-linear tape medium for phase plane

A plate freely supported on its short sides and subjected to constant tension in its longitudinal direction has been investigated. Dependences between the degree of nonlinearity and parameters of system have been derived. Formulas to determine the maximum of sagging of the tapes are given.

**Keywords:** thin tape, elastic plate, Rayleigh wave, plate deflection, geometric nonlinearity.