УДК 534.121.2+539.382.2

М. В. Данилов, кандидат технических наук, докторант
Д. Р. Шишов, аспирант
В. Е. Лялин, доктор технических наук, доктор экономических наук, доктор геолого-минералогических наук, профессор
ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЛЕНТОЧНОГО НОСИТЕЛЯ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ЕГО ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

В статье приводится точное решение двумерной плоской задачи динамической теории упругости для тонкой пластины с двумя свободными и двумя нагруженными краями. Исследуется влияние геометрических и механических параметров ленты на высокочастотные колебания. Выведены формулы для определения диапазона частот вибрации.

Ключевые слова: идеально упругая лента, деформация ленты, динамика ленты.

Проведем анализ динамики ленты в случае, когда вектор смещения находится в ее плоскости. Хотя задача о статике ленты полностью охватывает все физические особенности рассматриваемого явления в том диапазоне частот, где происходит возбуждение и современная аппаратура позволяет проводить измерения, тем не менее практически имеем дело с переменными (во времени) силами и вынужденными колебаниями ленты, при которых динамика все же может проявиться в виде поправки к статике. Кроме того, интересно знать, в какой мере геометрические и механические параметры ленты влияют на высокочастотные колебания, т. е. в какой степени меняются эти частоты с изменением физико-механических ее параметров H, l, δ, E, ρ (рис. 1 и 2). Здесь E – модуль Юнга ленты; ρ – вес единицы ее объема; δ – толщина ленты.

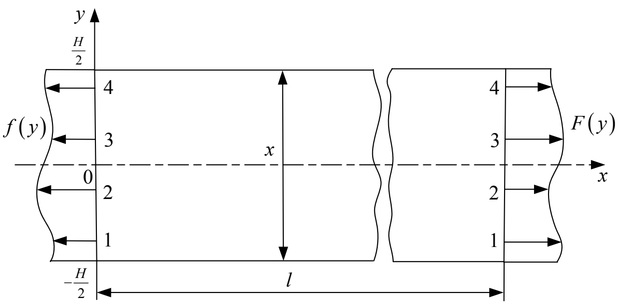

Рис. 1. Распределение действующих сил и геометрические параметры отрезка ленты: $F(y)$ и $f(y)$ – приложенные силы; l – длина ленты; H – ширина ленты

Уравнения движения ленты записываем в виде [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-\nu^2}\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \dfrac{1}{2(1+\nu)}\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \dfrac{1}{2(1-\nu)}\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\ \dfrac{1}{1-\nu^2}\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \dfrac{1}{2(1+\nu)}\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \dfrac{1}{2(1-\nu)}\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \end{cases} \tag{1}$$

где $u_x = u_x(x, y, t)$; $u_y = u_y(x, y, t)$; c – скорость продольных волн.

Приводим граничные условия:

$$\sigma_{yy} = 0, \ \sigma_{xy} = 0 \ \text{ при } \ y = \pm H/2;$$

$$\sigma_{xx} = f(y) e^{-1\omega t} / \delta, \ u_y = 0 \ \text{ при } \ x = 0;$$

$$\sigma_{xx} = F(y) e^{-i\omega t} / \delta, \ u_y = 0 \ \text{ при } \ x = l.$$

Решение краевой задачи ищем в виде выражения установившихся монохроматических колебаний: $u_x = \upsilon_x(x, y) e^{-i\omega t}$, $u_y = \upsilon_y(x, y) e^{-i\omega t}$.

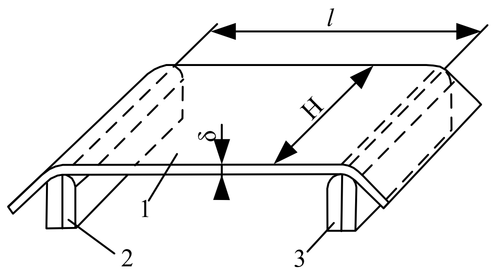

Рис. 2. Отрезок ленты, натянутой на измерительные магнитные головки: *1* – магнитная лента; *2*, *3* – измерительные головки; l, H, δ – длина, ширина, толщина ленты

Подставляя значения в уравнения (1), получаем:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{1-\nu^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{1}{2(1+\nu)}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\omega^2}{c^2} \right) \upsilon_x + \left(\dfrac{1}{2(1-\nu)}\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \upsilon_y = 0, \\ \left(\dfrac{1}{2(1-\nu)}\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \upsilon_x + \left(\dfrac{1}{1-\nu^2}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{1}{2(1+\nu)}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\omega^2}{c^2} \right) \upsilon_y = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Далее переменные рассматриваем относительно граничных условий. Согласно закону Гука, компоненты тензора напряжений выражаются через компоненты тензора деформации [2]:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial y} \right) = \dfrac{1}{\delta} f(y), \\ u_y = 0 \end{cases} \quad \text{при } \ x = 0;$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \dfrac{1}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial y} \right) = \dfrac{1}{\delta} F(y), \\ \upsilon_y = 0 \end{cases} \quad \text{при } \ x = l;$$

$$\begin{cases} \sigma_{yy} = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \nu \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial x}\right) = 0, \\ \sigma_{xy} = \dfrac{E}{2(1+\nu)}\left(\dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{при } y = \pm\frac{H}{2}.$$

Для отыскания функций $\upsilon_x(x,y)$ и $\upsilon_x(x,y)$ заменим их на $\tilde{\upsilon}_x(x,y)$ и $\tilde{\upsilon}_y(x,y)$:

$$\upsilon_x(x,y) = \tilde{\upsilon}_x(x,y) + \frac{1-\nu^2}{E\delta}\left(\frac{x^2}{2l}\big(F(y) - f(y) + xf(y)\big)\right),$$
$$\upsilon_y(x,y) = \tilde{\upsilon}_y(x,y).$$

Подставляя эти функции в систему (2), получаем:

$$\left(\frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{\upsilon}_x + \left(\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right)\tilde{\upsilon}_y =$$
$$= -\frac{1}{E\delta l}\big(F(y) - f(y)\big) - \frac{1-\nu}{2E\delta}\left(\frac{x^2}{2l}\big(F''(y) - f''(y)\big) + xf''(y)\right) -$$
$$-\frac{(1-\nu^2)\omega^2}{E\delta c^2}\left(\frac{x^2}{2l}\big(F(y) - f(y)\big) + xf(y)\right), \tag{3}$$
$$\left(\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right)\tilde{\upsilon}_x + \left(\frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{\upsilon}_y =$$
$$= -\frac{1+\nu}{2E\delta}\left(\frac{x}{l}\big(F'(y) - f'(y)\big) + f'(y)\right).$$

Перепишем граничные условия для функций $\tilde{\upsilon}_x(x,y)$ и $\tilde{\upsilon}_y(x,y)$:

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial \tilde{\upsilon}_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial \tilde{\upsilon}_y}{\partial y}\right) = 0,\ \tilde{\upsilon}_y = 0 \ \text{ при } x = 0; \tag{4}$$

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial \tilde{\upsilon}_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial \tilde{\upsilon}_y}{\partial y}\right) = 0,\ \tilde{\upsilon}_y = 0 \ \text{ при } x = l. \tag{5}$$

Решение системы (3) ищем в виде:

$$\tilde{\upsilon}_x(x,y) = V_{x0}(y) + \sum_{n=1}^{\infty} V_{xn}(y)\cos\frac{n\pi x}{l},$$
$$\tilde{\upsilon}_x(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} V_{yn}(y)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где $V_{x0}(y)$, $V_{xn}(y)$ и $V_{yn}(y)$ – коэффициенты Фурье [3].

При $n = 1, 2, ...$

$$P(x,y) = -\frac{1}{E\delta l}\big(F(y) - f(y)\big) -$$
$$-\frac{1-\nu}{2E\delta}\left(\frac{x^2}{2l}\big(F''(y) - f''(y)\big) + xf''(y)\right) -$$
$$-\frac{(1-\nu^2)\omega^2}{E\delta c^2}\left(\frac{x^2}{2l}\big(F(y) - f(y)\big) + xf(y)\right),$$

$$Q(x,y) = -\frac{1+\nu}{2E\delta}\left(\frac{x}{l}\big(F'(y) - f'(y)\big) + f'(y)\right),$$

а при $n = 0$

$$P(x,y) = \left(\frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\right)V_{x0}(y).$$

Умножив обе части уравнения (3), соответственно, на $\cos\dfrac{n\pi x}{l}$ и $\sin\dfrac{n\pi x}{l}$, проинтегрировав в интервале $[0, l]$, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2(1+\nu)}V''_{xn}(y) + \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{1}{1-\nu^2}\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2\right)V_{xn}(y) + \\ + \dfrac{1}{2(1-\nu)}\dfrac{n\pi}{l}V'_{yn}(y) = p_n(y), \\ \dfrac{1}{1-\nu^2}V''_{yn}(y) + \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{1}{2(1+\nu)}\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2\right)V_{yn}(y) - \\ - \dfrac{1}{2(1-\nu)}\dfrac{n\pi}{l}V'_{yn}(y) = q_n(y), \end{cases} \tag{6}$$

$$\frac{1}{2(1+\nu)}V''_{x0}(y) + \frac{\omega^2}{c^2}V_{x0}(y) = p_0(y), \tag{7}$$

$$p_n(y) = \frac{(1-\nu)l}{E\delta\pi^2 n^2}\big(f''(y) - (-1)^n F''(y)\big) +$$
$$+\frac{2(1+\nu)\omega^2}{c^2}\big(f(y) - (-1)^n F(y)\big), \tag{8}$$

$$p_0(y) = -\frac{1}{E\delta l}\big(F(y) - f(y)\big) -$$
$$-\frac{(1-\nu)l}{4E\delta}\left(\frac{1}{3}\big(F''(y) - f''(y)\big) + f''(y)\right) -$$
$$-\frac{(1-\nu^2)\omega^2 l}{2E\delta c^2}\left(\frac{1}{3}\big(F(y) - f(y)\big) + f(y)\right), \tag{9}$$

$$q_n(y) = \frac{1+\nu}{E\delta\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n}F'(y) - \frac{1}{n}f'(y)\right). \tag{10}$$

Как видим, это система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Следовательно, граничные условия (4) и (5) для функций V_{x0}, V_{xn} и V_{yn} выполнены. Частные решения соответствующей однородной системы имеют вид $V_{x0} = e^{\lambda y}$, $V_{xn} = e^{\lambda y}$, $V_{yn} = e^{\lambda y}$.

Учитывая их, получаем следующие характеристические уравнения:

$$\frac{1}{2(1+\nu)}\lambda^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \ \text{ при } n = 0;$$

$$\lambda^4 + \left(\frac{\omega^2}{c^2}(3 + 2\nu - \nu^2) - \frac{2\pi^2 n^2}{l^2}\right)\lambda^2 + \frac{2\omega^4}{c^4}(1+\nu)(1-\nu^2) -$$
$$-(3 + 2\nu - \nu^2)\left(\frac{n\pi\omega}{cl}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 = 0 \ \text{ при } n = 1, 2, ...$$

Общее решение однородной системы, если корни характеристического уравнения действительные и разные [4]:

$$V_{xn}=\sum_{i=1}^{4}c_i e^{\lambda_i y},\ V_{yn}=\sum_{i=1}^{4}c_i\varepsilon_i e^{\lambda_i y},$$
$$V_{x0}=c_{10}\cos\lambda_1 y+c_{20}\sin\lambda_2 y,$$

где λ_i – корни характеристического уравнения; c_i, c_{i0} – постоянные при $i=1,2,3,4$,

$$\varepsilon_i=-\frac{2(1-\nu)}{n\pi\lambda_i}\left(\frac{\lambda_i^2}{2(1+\nu)}+\frac{\omega^2}{c^2}-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\frac{1}{1-\nu^2}\right).$$

Перейдем к рассмотрению неоднородной системы (6). Считаем, что c_i – переменная величина, т. е.

$$\sum_{i=1}^{4}c_i'(y)e^{\lambda_i y}=0,\ \sum_{i=1}^{4}c_i'(y)\varepsilon_i e^{\lambda_i y}=0,$$
$$\sum_{i=1}^{4}c_i'(y)\lambda_i e^{\lambda_i y}=2(1+\nu)p_n(y),\qquad(11)$$
$$\sum_{i=1}^{4}c_i'(y)\varepsilon_i\lambda_i e^{\lambda_i y}=(1-\nu^2)q_n(y);$$

$$c_{10}'(y)\cos\alpha y+c_{20}'(y)\sin\alpha y=0,$$
$$-c_{10}'(y)\sin\alpha y+c_{20}'(y)\cos\alpha y=\frac{1}{\alpha}p_0(y),\qquad(12)$$

значения которой получаем методом вариации постоянных из $\alpha=\omega\sqrt{2(1+\nu)}/c$.

Решение системы уравнений (11) имеет вид: $c_i'(y)=\Delta_i/\Delta\ (i=1,2,3,4)$, где

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\ \varepsilon_1&\varepsilon_2&\varepsilon_3&\varepsilon_4\\ \lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&\lambda_4\\ \varepsilon_1\lambda_1&\varepsilon_2\lambda_2&\varepsilon_3\lambda_3&\varepsilon_4\lambda_4\end{vmatrix}e^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)y}.$$

Значение Δ_i находим из Δ, заменяя *i*-й столбец на свободные члены системы.

Таким образом,

$$c_{in}(y)=(-1)^{i+1}\times$$
$$\times\int_{-H/2}^{y}\left(\frac{2(1+\nu)\Delta_i^*}{\Delta}p_n(z)-\frac{(1-\nu^2)\Delta_i^{**}}{\Delta}-q_n(z)\right)e^{-\lambda_i z}dz,\qquad(13)$$

$$c_{10}(y)=-\frac{1}{\alpha}\int_{-H/2}^{y}p_0(z)\sin\alpha z dz,$$

$$c_{20}(y)=\frac{1}{\alpha}\int_{-H/2}^{y}p_0(z)\cos\alpha z dz.$$

Входящие в эти формулы определители, соответственно, равны:

$$\Delta_1^*=\begin{vmatrix}\varepsilon_2&\varepsilon_3&\varepsilon_4\\ \lambda_2&\lambda_3&\lambda_4\\ \varepsilon_2\lambda_2&\varepsilon_3\lambda_3&\varepsilon_4\lambda_4\end{vmatrix},\ \Delta_1^{**}=\begin{vmatrix}1&1&1\\ \lambda_2&\lambda_3&\lambda_4\\ \varepsilon_2\lambda_2&\varepsilon_3\lambda_3&\varepsilon_4\lambda_4\end{vmatrix},$$

$$\Delta_2^*=\begin{vmatrix}\varepsilon_1&\varepsilon_3&\varepsilon_4\\ \lambda_1&\lambda_3&\lambda_4\\ \varepsilon_1\lambda_1&\varepsilon_3\lambda_3&\varepsilon_4\lambda_4\end{vmatrix},\ \Delta_2^{**}=\begin{vmatrix}1&1&1\\ \lambda_1&\lambda_3&\lambda_4\\ \varepsilon_1\lambda_1&\varepsilon_3\lambda_3&\varepsilon_4\lambda_4\end{vmatrix},$$

$$\Delta_3^*=\begin{vmatrix}\varepsilon_1&\varepsilon_2&\varepsilon_4\\ \lambda_1&\lambda_2&\lambda_4\\ \varepsilon_1\lambda_1&\varepsilon_2\lambda_2&\varepsilon_4\lambda_4\end{vmatrix},\ \Delta_3^{**}=\begin{vmatrix}1&1&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\lambda_4\\ \varepsilon_1\lambda_1&\varepsilon_2\lambda_2&\varepsilon_4\lambda_4\end{vmatrix},$$

$$\Delta_4^*=\begin{vmatrix}\varepsilon_1&\varepsilon_2&\varepsilon_3\\ \lambda_1&\lambda_2&\lambda_3\\ \varepsilon_1\lambda_1&\varepsilon_2\lambda_2&\varepsilon_3\lambda_3\end{vmatrix},\ \Delta_4^{**}=\begin{vmatrix}1&1&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\lambda_3\\ \varepsilon_1\lambda_1&\varepsilon_2\lambda_2&\varepsilon_3\lambda_3\end{vmatrix}.$$

Следовательно, общее решение неоднородной системы (6) и неоднородного уравнения (7) получим в виде:

$$V_{xn}(y)=\sum_{i=1}^{4}\left(c_{in}^*+c_{in}(y)\right)e^{\lambda_i y},$$
$$V_{yn}(y)=\sum_{i=1}^{4}\left(c_{in}^*+c_{in}(y)\right)\varepsilon^{\lambda_i y},$$
$$V_{x0}(y)=$$
$$=c_{10}^*\cos\alpha y+c_{20}^*\sin\alpha y+\frac{1}{\alpha}\int_{-H/2}^{y}p_0(z)\sin\left(\alpha(y-z)\right)dz.$$

Здесь c_{in}^*, c_{10}^*, c_{20}^* – постоянные интегрирования, а $c_{in}(y)$ – функции, определяемые формулой (13).

И наконец, из граничных условий на кромках ленты при $y=\pm H/2$ получаем уравнения для определения постоянных интегрирования:

$$\sum_{i=1}^{4}c_{in}^*\left(\varepsilon_i\lambda_i-\frac{n\pi\nu}{l}\right)e^{-\tau i}=A_1\left(-\frac{H}{2}\right),\ \sum_{i=1}^{4}c_{in}^*\left(\varepsilon_i\lambda_i-\frac{n\pi\nu}{l}\right)e^{\tau i}=A_1\left(\frac{H}{2}\right),$$
$$\sum_{i=1}^{4}c_{in}^*\left(\frac{n\pi}{l}\varepsilon_i+\lambda_i\right)e^{-\tau i}=A_2\left(-\frac{H}{2}\right),\ \sum_{i=1}^{4}c_{in}^*\left(\frac{n\pi}{l}\varepsilon_i+\lambda_i\right)e^{\tau i}=A_2\left(-\frac{H}{2}\right),$$

где $\tau_i=\lambda_i H/2,\ i=1,2,3,4,$

$$\begin{cases} A_1\left(-\frac{H}{2}\right)=K_1\left(-\frac{H}{2}\right)-\sum_{i=1}^{4}\varepsilon_i R_{in}\left(-\frac{H}{2}\right),\ A_2\left(-\frac{H}{2}\right)=K_2\left(-\frac{H}{2}\right)-\sum_{i=1}^{4}R_{in}\left(-\frac{H}{2}\right), \\ A_1\left(\frac{H}{2}\right)=K_1\left(\frac{H}{2}\right)+\sum_{i=1}^{4}\left(\left(\frac{n\pi\nu}{l}-\varepsilon_i\lambda_i\right)C_{in}\left(\frac{H}{2}\right)e^{\tau_i}-\varepsilon_i R_{in}\left(\frac{H}{2}\right)\right), \\ A_2\left(\frac{H}{2}\right)=K_2\left(\frac{H}{2}\right)-\sum_{i=1}^{4}\left(\left(\frac{n\pi\nu}{l}\varepsilon_i+\lambda_i\right)C_{in}\left(\frac{H}{2}\right)e^{\tau_i}-\varepsilon_i R_{in}\left(\frac{H}{2}\right)\right), \end{cases} \quad (14)$$

$$K_1(y)=\frac{2(1-\nu^2)\nu}{E\delta\pi n}\left((-1)^n F(y)-f(y)\right),\ K_2(y)=-\frac{2(1-\nu^2)l}{E\delta\pi^2 n^2}\left((-1)^n F'(y)-f'(y)\right), \quad (15)$$

$$R_{in}(y)=(-1)^{i+1}\left(\frac{2(1+\nu)\Delta_i^*}{\Delta}p_n(y)-\frac{(1-\nu^2)\Delta_i^{**}}{\Delta}q_n(y)\right),$$

$$C_{in}\left(\frac{H}{2}\right)=(-1)^{i+1}\int_{-H/2}^{H/2}\left(\frac{2(1+\nu)\Delta_i^*}{\Delta}p_n(z)-\frac{(1-\nu^2)\Delta_i^{**}}{\Delta}q_n(z)\right)e^{-\lambda_i z}dz.$$

Используя определитель этой системы

$$\Delta_\omega=\begin{vmatrix} \left(\varepsilon_1\lambda_1-\frac{n\pi\nu}{l}\right)e^{-\tau_1} & \left(\varepsilon_2\lambda_2-\frac{n\pi\nu}{l}\right)e^{-\tau_2} & \left(\varepsilon_3\lambda_3-\frac{n\pi\nu}{l}\right)e^{-\tau_3} & \left(\varepsilon_4\lambda_4-\frac{n\pi\nu}{l}\right)e^{-\tau_4} \\ \left(\varepsilon_1\lambda_1-\frac{n\pi\nu}{l}\right)e^{\tau_1} & \left(\varepsilon_2\lambda_2-\frac{n\pi\nu}{l}\right)e^{\tau_2} & \left(\varepsilon_3\lambda_3-\frac{n\pi\nu}{l}\right)e^{\tau_3} & \left(\varepsilon_4\lambda_4-\frac{n\pi\nu}{l}\right)e^{\tau_4} \\ \left(\frac{n\pi\nu}{l}\varepsilon_1+\lambda_1\right)e^{-\tau_1} & \left(\frac{n\pi\nu}{l}\varepsilon_2+\lambda_2\right)e^{-\tau_2} & \left(\frac{n\pi\nu}{l}\varepsilon_3+\lambda_3\right)e^{-\tau_3} & \left(\frac{n\pi\nu}{l}\varepsilon_4+\lambda_4\right)e^{-\tau_4} \\ \left(\frac{n\pi\nu}{l}\varepsilon_1+\lambda_1\right)e^{\tau_1} & \left(\frac{n\pi\nu}{l}\varepsilon_2+\lambda_2\right)e^{\tau_2} & \left(\frac{n\pi\nu}{l}\varepsilon_3+\lambda_3\right)e^{\tau_3} & \left(\frac{n\pi\nu}{l}\varepsilon_4+\lambda_4\right)e^{\tau_4} \end{vmatrix}$$

получаем уравнение частот собственных колебаний ленты $\Delta_\omega=0$ при $\omega=2\pi f$.

Частный случай, когда силы равны: $F(y)=f(y)=f_0+f_\mu\sin(\mu y+\eta)$.

Здесь значения $p_0(y)$, $p_{2n-1}(y)$, $q_{2n-1}(y)$, соответствующие выражениям (8), (9), (10), будут следующими:

$$p_0(y)=a_0+b_0\sin(\mu y+\eta),$$

$$p_{2n-1}(y)=b_{2n-1}\sin(\mu y+\eta)+b_{2n-1}^*,$$

$$a_0=-\frac{(1-\nu^2)l\omega^2}{2E\delta c^2}f_0,\ b_0=\left(\frac{(1-\nu)l}{4E\delta}\mu^2-\frac{(1-\nu^2)l\omega^2}{2E\delta c^2}\right)f_\mu,$$

$$b_{2n-1}=\frac{2(1-\nu)lf_\mu}{E\delta(2n-1)^2\pi^2}\left(-\mu^2+\frac{2(1+\nu)\omega^2}{c^2}\right),$$

$$b_{2n-1}^*=\frac{4(1-\nu^2)l\omega^2}{E\delta\pi^2(2n-1)^2c^2}f_0,\ q_{2n-1}(y)=d_{2n-1}\cos(\mu y+\eta),$$

$$d_{2n-1}=\frac{2(1+\nu)\mu}{E\delta(2n-1)\pi}f_\mu,$$

а значения $K_1(y)$ и $K_2(y)$, соответствующие уравнениям (15):

$$K_1(y)=\frac{4(1-\nu^2)\nu}{E\delta(2n-1)\pi}\left(f_0+f_\mu\sin(\mu y+\eta)\right),$$

$$K_1(y)=\frac{4(1-\nu^2)l}{E\delta(2n-1)^2\pi^2}\mu f_\mu\cos(\mu y+\eta).$$

Система (6) в этом случае принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{2(1+\nu)}V''_{xn}(y)+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{1}{1-\nu^2}\left(\frac{(2n-1)\pi}{l}\right)^2\right)V_{xn}(y)+ \\ +\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{(2n-1)\pi}{l}V'_{yn}(y)=b_{2n-1}\sin(\mu y+\eta)+b_{2n-1}^*, \\ \frac{1}{1-\nu^2}V''_{yn}(y)+\frac{\omega^2}{c^2}+\frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{(2n-1)\pi}{l}\right)^2V_{yn}(y)- \\ -\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{(2n-1)\pi}{l}V'_{xn}(y)=d_{2n-1}\cos(\mu y+\eta). \end{cases} \quad (16)$$

Частное решение системы найдем методом неопределенных коэффициентов:

$$M_n(y)=V_{x(2n-1)}^*(y)=B_{2n-1}\sin(\mu y+\eta)+B_{2n-1}^*,$$

$$N_n(y)=V_{y(2n-1)}^*(y)=D_{2n-1}\cos(\mu y+\eta).$$

Подставляя эти функции в систему (16), получим алгебраические уравнения относительно постоянных B_{2n-1} и D_{2n-1}:

$$\left(-\frac{\mu^2}{2(1-\nu)}+\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{1}{1-\nu^2}\left(\frac{(2n-1)\pi}{l}\right)^2\right)B_{2n-1}-$$

$$-\frac{\mu}{2(1-\nu)}\frac{(2n-1)\pi}{l}D_{2n-1}=b_{2n-1};$$

$$\left(-\frac{\mu^2}{1-\nu^2}+\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{(2n-1)\pi}{l}\right)^2\right)D_{2n-1}-$$

$$-\frac{\mu}{2(1-\nu)}\frac{(2n-1)\pi}{l}B_{2n-1}=d_{2n-1};$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{1}{1-\nu^2}\left(\frac{(2n-1)\pi}{l}\right)^2\right)B^*_{2n-1}=b^*_{2n-1}.$$

Определитель этой системы равен

$$\bar{\Delta}=$$

$$=\begin{vmatrix} -\frac{\mu^2}{2(1-\nu)}+\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{1}{1-\nu^2}\left(\frac{(2n-1)\pi}{l}\right)^2 & -\frac{\mu}{2(1-\nu)}\frac{(2n-1)\pi}{l} \\ -\frac{\mu}{2(1-\nu)}\frac{(2n-1)\pi}{l} & -\frac{\mu^2}{1-\nu^2}+\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{(2n-1)\pi}{l}\right)^2 \end{vmatrix}$$

$\bar{\Delta}_1$ и $\bar{\Delta}_2$ получаем из $\bar{\Delta}$, заменив 1-й и 11-й столбцы свободными членами.

Отсюда $B_{2n-1}=\bar{\Delta}_1/\bar{\Delta}$, $D_{2n-1}=\bar{\Delta}_2/\bar{\Delta}$, а общее решение неоднородной системы уравнений принимает вид:

$$V_{xn}(y)=\sum_{i=1}^{4}c^*_{in}e^{\lambda_i y}+B_{2n-1}\sin(\mu y+\eta)+B^*_{2n-1},$$

$$V_{yn}(y)=\sum_{i=1}^{4}c^*_{in}\varepsilon_i e^{\lambda_i y}+D_{2n-1}\cos(\mu y+\eta).$$

Граничные условия запишутся в виде системы (14), но с другими правыми частями. В данном случае

$$\begin{cases} A_1(y)=\frac{4(1-\nu^2)\nu}{E\delta(2n-1)\pi}f_0+\frac{(2n-1)\pi\nu}{l}B^*_{2n-1}+ \\ +\left(\frac{4(1-\nu^2)\nu}{E\delta(2n-1)\pi}f_\mu+\frac{(2n-1)\pi\nu}{l}B_{2n-1}-\mu D_{2n-1}\right)\sin(\mu y+\eta); \\ A_2(y)=\left(\frac{4(1-\nu^2)l}{E\delta(2n-1)^2\pi^2}\mu f_\mu-\frac{(2n-1)\pi}{l}D_{2n-1}+\mu B_{2n-1}\right)\times \\ \times\cos(\mu y+\eta). \end{cases}$$

Другим способом находим и решение уравнения (7):

$$\frac{1}{2(1+\nu)}V''_{x0}(y)+\frac{\omega^2}{c^2}V_{x0}(y)=a_0+b_0\sin(\mu y+\eta). \quad (17)$$

Частное решение будем искать в виде $V^*_{x0}(y)=A_0+B_0\sin(\mu y+\eta)$.

Находим постоянные A_0 и B_0:

$$\left(-\frac{\mu^2}{2(1+\nu)}+\frac{\omega^2}{c^2}\right)B_0\sin(\mu y+\eta)+\frac{\omega^2}{c^2}A_0=$$

$$=a_0+b_0\sin(\mu y+\eta);$$

$$A_0=\frac{c^2}{\omega^2}a_0=-\frac{(1-\nu^2)l}{2E\delta}f_0;\quad B_0=\frac{2(1+\nu)c^2}{2(1+\nu)\omega^2-c^2\mu^2}b_0.$$

Общее решение уравнения (17) будет следующим:

$$V_{x0}(y)=c^*_{10}\cos\alpha y+c^*_{20}\sin\alpha y+A_0+B_0\sin(\mu y+\eta).$$

Определим граничные условия (12) для этого уравнения:

$$\begin{cases} -c^*_{10}\sin\frac{\alpha H}{2}+c^*_{20}\cos\frac{\alpha H}{2}= \\ =\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{(1-\nu^2)l^2\mu}{2E\delta}f_\mu-\mu B_0\right)\cos\left(\eta-\frac{\mu H}{2}\right), \\ c^*_{10}\sin\frac{\alpha H}{2}+c^*_{20}\cos\frac{\alpha H}{2}= \\ =\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{(1-\nu^2)l^2\mu}{2E\delta}f_\mu-\mu B_0\right)\cos\left(\eta+\frac{\mu H}{2}\right). \end{cases} \quad (18)$$

Решение данной системы:

$$c^*_{10}=\frac{1}{2\alpha\sin\frac{\alpha H}{2}}\left(A_0\left(\frac{H}{2}\right)-A_0\left(-\frac{H}{2}\right)\right),$$

$$c^*_{20}=\frac{1}{2\alpha\cos\frac{\alpha H}{2}}\left(A_0\left(\frac{H}{2}\right)-A_0\left(-\frac{H}{2}\right)\right),$$

где $\alpha=\frac{\omega}{l}\sqrt{2(1+\nu)}$, $A_0\left(-\frac{H}{2}\right)$ и $A_0\left(\frac{H}{2}\right)$ – правые части уравнений (18).

Как видим, аналитическое исследование продолжать далее становится крайне затруднительным из-за громоздкости формул. Поэтому для окончания расчетов целесообразно воспользоваться ЭВМ. Отметим, что систему, состоящую из роликов и натянутой на них ленты (рис. 3), нецелесообразно исследовать с помощью волновых уравнений, т. к. масса ленты является крайне незначительной по сравнению с массой роликов. Физически адекватная модель системы вполне исчерпывается эквивалентной системой из масс (роликов), установленных на пружинах (отрезках ленты) (рис. 4).

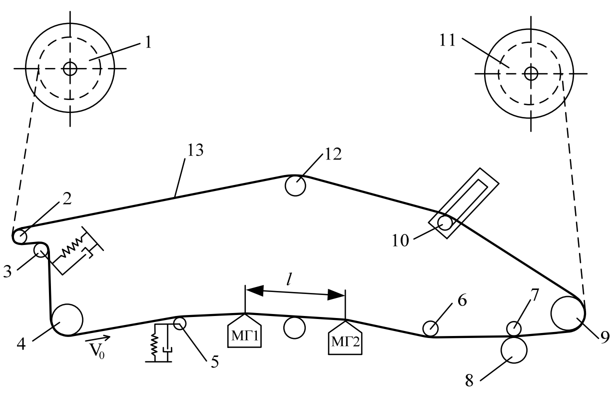

Рис. 3. Кинематическая схема лентопротяжного механизма: МГ – измерительные магнитные головки; *1* – подающий узел; *2*, *12* – направляющие ролики; *3* – указатель натяжения (направляющая стойка); *4*, *9* – инерционные ролики; *5* – развязывающий механический фильтр (направляющая стойка); *6* – направляющая стойка; *7* – ведущий вал; *8* – лентоприжимной ролик; *10* – натяжной ролик; *11* – приемный узел; *13* – магнитная лента; $\overline{V_0}$ – средняя скорость протяжки

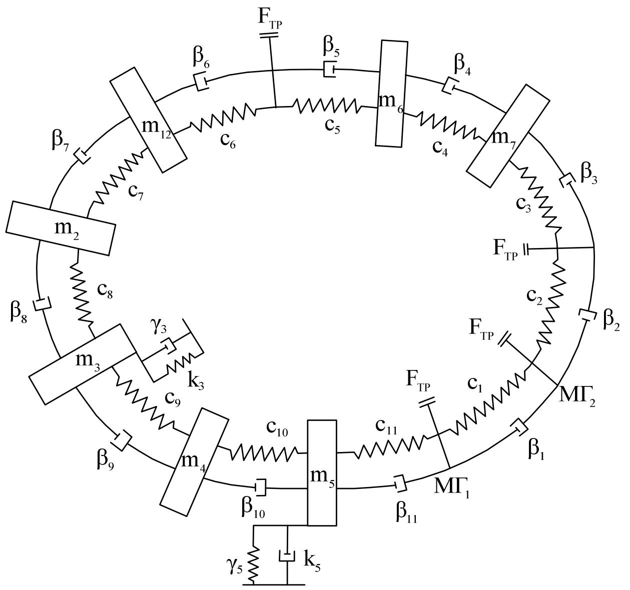

Рис. 4. Динамическая модель исследуемого лентопротяжного механизма: $c_1,...,c_{11}$ – коэффициенты упругости отрезков магнитной ленты; $\beta_1,...,\beta_{11}$ – коэффициенты демпфирования отрезков магнитной ленты; $F_{тр}$ – силы трения между головками, стойками и магнитной лентой; $m_1,...,m_{11}$ – массы соответствующих роликов; γ_3,γ_5 – коэффициенты демпфирования пружин; k_3,k_5 – коэффициенты упругости пружин; l – отрезок ленты между головками, для которого подсчитываются частоты собственных колебаний

Библиографические ссылки

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. – Изд. 5-е. – М. : Физматлит, 2003. – 264 с.

2. Там же.

3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. – М. : Физматлит, 1959. – 468 с.

4. *Краснов М. А., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. – М. : Наука, 1971. – 256 с.

* * *

M. V. Danilov, PhD in Engineering, DSc Applicant, Kalashnikov ISTU
D. R. Shishov, Post-graduate, Kalashnikov ISTU
V. E. Lyalin, DSc in Engineering, Doctor of Economics, Doctor of Geology, Professor, Kalashnikov ISTU

Mathematical modeling of tape deformation under its dynamic loading

The precise solution of two-dimensional plane problem of dynamic theory of elasticity has been given for a thin plate with two free and two loaded edges. The influence of geometrical and mechanical parameters of the tape on the high-frequency oscillations is investigated. Formulas for establishing the vibration frequency band have been derived.

Keywords: perfectly elastic tape, tape deformation, dynamics of the tape.

Получено: 27.02.15